УДК 533.5, 535.233

Применение неявной схемы Мак-Кормака для расчета сверхзвуковых турбулентных струй с использованием параболизованных уравнений Навье – Стокса

А.М. МОЛЧАНОВ,
д-р техн. наук,
А.С. МЯКОЧИН,
д-р техн. наук,
И.Н. БОРОВИК,
канд. техн. наук,
А.С. ТУШКАНОВ
(МАИ, Москва)
myakochinas@mai.ru

Для решения уравнений, описывающих течение сверхзвуковых турбулентных струй, разработан эффективный безусловно устойчивый численный метод, не требующий инверсии блочных трехдиагональных систем алгебраических уравнений. Получены результаты по данному методу, согласующиеся с результатами расчетов на основе других методов и экспериментальными данными.

Сверхзвуковые струи, турбулентность, сжимаемость, уравнения Навье – Стокса, параболизация

За последние десятилетия был достигнут значительный прогресс в математическом моделировании сверхзвуковых течений газа. Задача решается на основе полных уравнений Навье – Стокса [1, 2], а также с использованием упрощенных (параболизированных) уравнений Навье – Стокса [3–6].

Для расчета струй на основе параболизованных уравнений Навье – Стокса, как правило, используются явные численные методы. Основной недостаток таких схем – ограничение размера продольного шага интегрирования, которое может привести к значительной потере компьютерного времени. При использовании неявных схем [6] возникает необходимость построения весьма сложных матриц и их решения, особенно в отношении течений с дозвуковыми областями.

В начале 1980-х гг. Мак-Кормак [7] предложил эффективный неявный метод решения полных нестационарных уравнений Навье – Стокса, основными достоинствами которого является безусловная устойчивость, отсутствие необходимости в решении уравнений с блочными трехдиагональными матрицами.

В настоящей работе представлена модификация неявного метода Мак-Кормака, применимая для решения параболизованных уравнений Навье – Стокса. Особое внимание уделено моделированию турбулентности в сверхзвуковых потоках.

Уравнения течения турбулентной газовой смеси могут быть получены с помощью формального осреднения нестационарных уравнений Навье – Стокса. В данной работе используются два метода деления переменных на средние и пульсационные компоненты:

1) $p = \overline{p} + p'$, где линия означает осреднение по ансамблю;

2) $u = \tilde{u} + u''$, где $\tilde{u} = \overline{\rho u} / \overline{\rho}$ – осреднение с использованием плотности в качестве весового множителя.

Уравнения для осесимметричной струи при больших числах Рейнольдса при отсутствии химических реакций:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho}\tilde{u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\rho}\tilde{v}\right) + \frac{\overline{\rho}\tilde{v}}{y} = 0; \tag{1}$$

$$\overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho}\widetilde{u''^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\rho}\widetilde{u''v''}\right) - \frac{\overline{\rho}\widetilde{u''v''}}{y}; \tag{2}$$

$$\overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho}\widetilde{u''v''}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\rho}\widetilde{v''^2}\right) - \frac{\overline{\rho}\left(\widetilde{v''^2} - \widetilde{w''^2}\right)}{y}; \tag{3}$$

$$\overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho}\widetilde{u''H''}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\rho}\widetilde{v''H''}\right) - \frac{\overline{\rho}\widetilde{v''H''}}{y}; \tag{4}$$

$$\overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial \tilde{C}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho}\widetilde{u''C''}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\rho}\widetilde{v''C''}\right) - \frac{\overline{\rho}\widetilde{v''C''}}{y}; \tag{5}$$

$$\tilde{H} = \int_0^{\tilde{T}} C_p dT + 0{,}5\left(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2\right) + K, \quad \overline{p} = \overline{\rho}R\tilde{T}/M_\Sigma, \tag{6}$$

где x, y – ортогональная система координат (ось x совпадает с осью струи); u, v – осевая и радиальная компоненты скорости; ρ – плотность; p – давление; H – удельная полная энтальпия; C – массовая доля инертного компонента; R – универсальная газовая постоянная; M_Σ – молекулярная масса газовой смеси; C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; T – температура.

Для замыкания системы необходимо использовать какую-либо модель турбулентности. В данной работе использовалась модификация k–ε-модели турбулентности, учитывающая влияние высокоскоростной сжимаемости на интенсивность турбулентности и показавшая наилучшее совпадение с экспериментом при расчете турбулентных струй [8, 9]. Авт!

это одна и та же величина здесь и далее?

Эта модель включает следующие уравнения для K и ε:

$$\bar{\rho}\tilde{u}\frac{\partial K}{\partial x}+\bar{\rho}\tilde{v}\frac{\partial K}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}\widetilde{u''K}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\rho}\widetilde{v''K}\right)-\frac{\bar{\rho}\widetilde{v''K}}{y}+P-\bar{\rho}\varepsilon+\kappa\,; \tag{7}$$

$$\bar{\rho}\tilde{u}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+\bar{\rho}\tilde{v}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\rho}\widetilde{u''\varepsilon}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\rho}\widetilde{v''\varepsilon}\right)-\frac{\bar{\rho}\widetilde{v''\varepsilon}}{y}+\frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon 1}P-C_{\varepsilon 2}\bar{\rho}\varepsilon\right), \tag{8}$$

где $P=-\bar{\rho}\left[\widetilde{u''^2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+\widetilde{u''v''}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}+\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right)+\widetilde{v''^2}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{\widetilde{w''^2}\tilde{v}}{y}\right]$, $\kappa=\overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}$.

Здесь: K – кинетическая энергия турбулентности; ε – диссипация турбулентности; P – генерация турбулентной энергии.

Для коэффициента турбулентной вязкости и для корреляции пульсаций давления с дивергенцией скорости используются следующие формулы [9]:

$$\mu_T=\frac{C_\mu}{1+0{,}29M_T}\frac{\bar{\rho}K^2}{\varepsilon}\,;\ \kappa=-0{,}29M_T\,, \tag{9}$$

где $M_T=\sqrt{2K}/a$ – турбулентное число Маха; a – скорость звука.

В модели используются следующие числовые константы:

$$C_\mu=0{,}09\,;\ C_{\varepsilon 1}=1{,}44\,;\ C_{\varepsilon 2}=1{,}92\,.$$

Как уже указывалось, данная модель справедлива только для течений с большими числами Рейнольдса, так как при меньших значениях необходимо учитывать в системе (1) – (5) молекулярный пренепрос, а в уравнении (8) – поправки на ламинаризацию.

Параболизация исходных дифференциальных уравнений производится отбрасыванием некоторой части вязких членов, входящих в эти уравнения. Считается, что их влиянием можно пренебречь.

Обычно это отбрасывание осуществляется после перехода к новой системе координат, преобразующей реальную геометрии расчетной области в прямоугольную [5, 6]. В этом случае решаемая система и соответственно результат расчетов зависят от того, как будет произведено это преобразование координат, т.е. получается сеточно-зависимое решение. В данной работе использовался другой подход, основанный только на анализе физики процессов турбулентного смешения.

Прежде всего рассмотрим θ (угол наклона потока в середине слоя смешения по отношению к оси x) и введем «ориентированную на слой смешения» ортогональную систему координат (s, n).

Для вязких членов предполагается, что

$$\frac{\partial}{\partial s}\ll\frac{\partial}{\partial n},\quad V_s\gg V_n\,. \tag{10}$$

Из допущения (10) следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial n}\sin\theta\approx\frac{\partial f}{\partial n}\sin\theta\,;\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial s}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial n}\cos\theta\approx\frac{\partial f}{\partial n}\cos\theta\,, \tag{11}$$

где f – любой параметр, входящий в вязкие члены системы.

Рассмотрим сначала уравнение переноса скалярной величины (5). Используем предположения о градиентном законе для турбулентной диффузии:

$$\overline{\rho}\widetilde{V''C''} = -\frac{\mu_T}{Sc_T}\nabla\tilde{C}. \tag{12}$$

Тогда с учетом формул (11) для вязких членов в правой части уравнения (5) справедливо

$$-\nabla\left(\overline{\rho}\widetilde{\mathbf{V}''C''}\right) = \nabla\left(\frac{\mu_T}{\mathrm{Sc}_T}\nabla C\right) \approx \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial n}\left(y\frac{\mu_T}{\mathrm{Sc}_T}\frac{\partial C}{\partial n}\right) \approx \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\mu_T}{\mathrm{Sc}_T}\frac{\partial C}{\partial y}\right). \tag{13}$$

Здесь учитывается то, что угол θ не зависит от координаты y. Sc_T – турбулентное число Шмидта. Аналогичные преобразования справедливы для всех уравнений переноса скалярных величин.

В работе [10] показано, что в компонентах уравнения количества движения (2), (3) вязкие члены можно представить в виде

$$\nabla\left(\mu_T\nabla u\right) + S_u;\ \nabla\left(\frac{4}{3}\mu_T\nabla v\right) + S_v \tag{14}$$

и, пренебрегая дополнительными членами S_u, S_v, использовать для них формулы, аналогичные формуле (13).

В результате получаем следующую систему уравнений, описывающих турбулентные осесимметричные газовые струи:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho}\tilde{v}) + \frac{\overline{\rho}\tilde{v}}{y} = 0; \quad \overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{1}{\cos^2\theta}\mu_T\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right);\\
\overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4}{3}\frac{1}{\cos^2\theta}\mu_T\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\right); \quad \overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial C}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\mu_T}{\mathrm{Sc}_T}\frac{\partial C}{\partial y}\right);\\
\overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial\tilde{H}}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left[y\frac{1}{\cos^2\theta}\mu_T\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}_T}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\tilde{u}}{\cos^2\theta}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)\right];\\
\overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial K}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{1}{\cos^2\theta}\mu_T\frac{\partial K}{\partial y}\right) + P - \overline{\rho}\varepsilon + \kappa;\\
\overline{\rho}\tilde{u}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \overline{\rho}\tilde{v}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon 1}P - C_{\varepsilon 2}\overline{\rho}\varepsilon + \kappa\right).
\end{gathered} \tag{15}$$

Генерация турбулентной энергии описывается формулой $P = \frac{\mu_T}{\cos^4\theta}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y}\right)^2$, а числовые константы полагаются: $\mathrm{Pr}_T = \mathrm{Sc}_T = 0,7$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

Следует отметить, что параболизованные уравнения в форме (15) могут использоваться только для сверхзвуковых течений. Вопрос расчета струй с дозвуковыми областями будет рассмотрен далее.

Система уравнений (15) в консервативной форме имеет следующий векторный вид:

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial y} + \boldsymbol{H} = \boldsymbol{Y}^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{YL}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial y}\right) + \boldsymbol{S}, \tag{16}$$

где

$$\boldsymbol{F} = \left(\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uH, \rho uC, \rho u\varepsilon, \rho uK\right)^T;$$

$$\boldsymbol{G} = \left(\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vH, \rho vC, \rho v\varepsilon, \rho vK\right)^T;$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{y}\left(\rho v, \rho uv, \rho v^2, \rho vH, \rho vC, \rho v\varepsilon, \rho vK\right)^T;$$

$$\boldsymbol{\psi} = (\rho, u, v, h, C, \varepsilon, K)^T;$$

$$Y=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&\bar{y}&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&\bar{y}&0&0&0\\0&0&0&0&\bar{y}&0&0\\0&0&0&0&0&\bar{y}&0\\0&0&0&0&0&0&\bar{y}\end{pmatrix};\quad L=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\0&\mu_T&0&0&0&0&0\\0&0&\frac{4}{3}\mu_T&0&0&0&0\\0&\frac{u\mu_T}{\cos^2\theta}&0&\mu_T/\mathrm{Pr}_T&0&0&\mu_T\\0&0&0&0&\mu_T/\mathrm{Sc}_T&0&0\\0&0&0&0&0&\mu_T/\sigma_\varepsilon&0\\0&0&0&0&0&0&\mu_T\end{pmatrix}\frac{1}{\cos^2\theta},$$

$$S=\left(0,0,0,0,0,\frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon1}\rho\underset{\sim}{\mathrm{P}}-C_{\varepsilon2}\rho\varepsilon+\pi_K+\kappa\right),\rho\underset{\sim}{\mathrm{P}}+\pi_K+\kappa-\rho\varepsilon\right)^T,$$

$\bar{y}=\dfrac{y}{R_a}$, R_a – радиус начального сечения струи.

Знаки осреднения в этих формулах опущены.

Система решается в новой системе координат с использованием простого прямоугольного преобразования

$$\xi=\bar{x};\ \eta=\eta(\bar{x},\bar{y}),\tag{17}$$

где $\bar{x}=\dfrac{x}{R_a}$.

Преобразованная форма уравнения (16)

$$\frac{\partial\bar{F}}{\partial\xi}+\frac{\partial\bar{G}}{\partial\eta}+\bar{H}=Y^{-1}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\bar{L}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)+\bar{S},\tag{18}$$

где $\bar{F}=F/b$; $\bar{G}=G+\bar{a}\,F/b$; $\bar{H}=HR_a/b$; $\bar{L}=YLb/R_a$; $\bar{S}=\dfrac{SR_a}{b}$; $\bar{a}=\dfrac{\partial\eta}{\partial\bar{x}}$; $b=\dfrac{\partial\eta}{\partial\bar{y}}$.

Для решения системы (18) был использован метод расщепления [11]. Для решения уравнения (18) без источника применяется специальная модификация неявного метода Мак-Кормака. Для невязкого случая она представлена в работе [12].

Предиктор:

$$\Delta\tilde{F}_k^n=\Delta\xi\frac{\bar{G}_k^n-\bar{G}_{k+1}^n}{\Delta\eta}-\Delta\xi\bar{H}_k^n+\left(Y^{-1}\right)_k^n\frac{\Delta\xi}{2\Delta\eta^2}\left[\left(\bar{L}_k^n+\bar{L}_{k+1}^n\right)\left(\psi_{k+1}^n-\psi_k^n\right)-\left(\bar{L}_k^n+\bar{L}_{k-1}^n\right)\left(\psi_k^n-\psi_{k-1}^n\right)\right];\tag{19}$$

$$\left(E+\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}|\Omega|_k^n+\Delta\xi|\Phi|_k^n\right)\delta\tilde{F}_k^{\overline{n+1}}=\Delta\tilde{F}_k^n+\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}|\Omega|_{k+1}^n\delta\tilde{F}_{k+1}^{\overline{n+1}};\tag{20}$$

$$\tilde{F}_k^{\overline{n+1}}=\tilde{F}_k^n+\delta\tilde{F}_k^{\overline{n+1}}.\tag{21}$$

Корректор:

$$\Delta\tilde{F}_k^{\overline{n+1}}=\Delta\xi\frac{\bar{G}_{k-1}^{\overline{n+1}}-\bar{G}_k^{\overline{n+1}}}{\Delta\eta}-\Delta\xi\bar{H}_k^{\overline{n+1}}+$$

$$+\Delta\xi\left(Y^{-1}\right)_k^{n+1}\frac{1}{2\Delta\eta^2}\left[\left(\bar{L}_k^{\overline{n+1}}+\bar{L}_{k+1}^{\overline{n+1}}\right)\left(\psi_{k+1}^{\overline{n+1}}-\psi_k^{\overline{n+1}}\right)-\left(\bar{L}_k^{\overline{n+1}}+\bar{L}_{k-1}^{\overline{n+1}}\right)\left(\psi_k^{\overline{n+1}}-\psi_{k-1}^{\overline{n+1}}\right)\right];\tag{22}$$

$$\left(E+\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}|\Omega|_k^{\overline{n+1}}+\Delta\xi|\Phi|_k^{\overline{n+1}}\right)\delta\tilde{F}_k^{n+1}=\Delta\tilde{F}_k^{\overline{n+1}}+\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}|\Omega|_{k-1}^{\overline{n+1}}\delta\tilde{F}_{k-1}^{n+1};\tag{23}$$

$$\tilde{F}_k^{n+1}=\frac{1}{2}\left(\tilde{F}_k^n+\tilde{F}_k^{\overline{n+1}}+\delta\tilde{F}_k^{n+1}\right).\tag{24}$$

Здесь: $\mathbf{E}$ – единичная матрица; матрицы $|\mathbf{\Omega}|$ и $|\mathbf{\Phi}|$ имеют положительные собственные значения и связаны с матрицами Якоби $\mathbf{\Omega} = \dfrac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{F}}$; $\mathbf{\Phi} = \dfrac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{F}}$.

После каждого шага физические переменные $\rho, u, v, p, C, K, \varepsilon$ должны быть определены по консервативным переменным $\bar{F}$.

Рассмотрим определение $|\mathbf{\Omega}|$ и $|\mathbf{\Phi}|$ для сверхзвуковых областей.

Матрица $|\mathbf{\Omega}|$ диагонализируется как

$$|\mathbf{\Omega}| = \boldsymbol{\sigma}^{-1} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\sigma}, \tag{25}$$

где $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ – матрица собственных векторов $\mathbf{\Omega}$, и $\boldsymbol{\sigma}$ – обратная к $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$; $\boldsymbol{D}$ – диагональная матрица со следующими элементами:

$$d_j = \max\left\{0{,}5\left(|\omega|_j + \frac{2l}{\Delta\eta} - \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}\right), 0\right\}. \tag{26}$$

Здесь: $|\omega|_j = |b\lambda_j + \bar{a}|$; $\lambda_{1,2,5,6,7} = v/u$; $\lambda_{3,4} = (uv \mp aw)/N$; $w = \sqrt{u^2 + v^2 - a^2}$; $N = u^2 - a^2$; $l = \dfrac{b^2 \mu_T}{\rho R_a u N \cos^2\theta}\left[u^2\left(\gamma/\mathrm{Pr}_T + 1\right) - a^2/\mathrm{Pr}_T\right]$; γ – удельная теплоемкость.

Матрица $\boldsymbol{\sigma}^{-1}$ определяется как

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta u & (uw + av)/w & (uw - av)/w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta v & (vw - au)/w & (vw + au)/w & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & H & H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & C & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & K & K & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где $b_{41} = 2a^2 - \beta(H - 2\alpha)$; $b_{42} = a^2 + 2\alpha$; $H = h + \alpha$; $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)$; $\beta = \gamma - 1$.

Влияние вязкости учитывается только корректировкой собственных значений в матрице $\boldsymbol{D}$.

Матрица $|\mathbf{\Phi}|$ является диагональной

$$|\mathbf{\Phi}| = \varphi \mathbf{E};\ \varphi = \max\{0{,}5z - 1/\Delta\xi, 0\}, \tag{28}$$

где

$$z = \frac{1}{\bar{y}}\left(\frac{|z_1| + \sqrt{z_1^2 - 4z_2}}{2}\right);\ z_1 = \frac{(\gamma + 1)uv}{N};\ z_2 = \frac{\gamma v^2}{N}.$$

Главное преимущество такого подхода в том, что обращение матриц в неявной части (уравнения (20), (23)) сводится к быстрым операциям – двукратному перемножению матриц и обращению диагональной матрицы.

Для подавления осцилляций в районе скачков уплотнения в разностную схему вводилось демпфирование четвертого порядка [13].

Для расчета течений с дозвуковыми областями чаще всего применяется технология Виньерона [14], основанная на разделении вектора $\boldsymbol{F}$ на две части в зависимости от значения продольного числа Маха. Этот метод дает хорошие результаты при расчете сверхзвукового обтекания тел, т.е. при наличии небольших дозвуковых областей в пристеночной области [6, 13]. Для расчета затопленных струй, у которых дозвуковые области занимают существенную часть течения, метод неудобен.

К недостаткам технологии Виньерона стоит отнести и существенное усложнение матриц, входящих в численную схему, поэтому в данной работе применялся иной подход к расчету дозвуковых областей.

В дозвуковых областях использовалась неконсервативная форма основных уравнений, т.е. система (15) в чистом виде.

Давление считается заданным. Для решения системы используется численная схема предиктор – корректор, аналогичная формулам (19) – (14). Стыковка «сверхзвуковой» и «дозвуковой» методик осуществляется следующим образом.

В каждом сечении струи $\xi = \xi^n$ определяются граничные точки разностной сетки KU и KD (рис. 1), в которых скорость $u < 1{,}2a$ (точка KD существует только при наличии дозвуковой области за диском Маха).

В узловых точках $k = 1, ..., KD$ и $k = KU, KU + 1, ..., NN$ расчет ведется по «дозвуковой» методике (NN – число узлов сетки). При $k = KD + 1, ..., KU - 1$ используется «сверхзвуковая» методика. При переходе от «дозвуковой» методики к «сверхзвуковой» в узлах $k = KU$ и $k = KD$ по известным значениям приращений неконсервативного вектора, содержащего искомые параметры, проводится определение приращений консервативного вектора $\delta\boldsymbol{F}$, которые затем используются в неявной части «сверхзвуковой» методики. Аналогично при переходе от «сверхзвуковой» методики к «дозвуковой» в узлах $k = KD + 1$ и $k = KU - 1$ определяются компоненты неконсервативного вектора по заданным приращениям $\delta\boldsymbol{F}$. При использовании схемы предиктор – корректор, в которой на каждом этапе осуществляется проход только вниз или только вверх по сетке, такой подход очень легко реализуется.

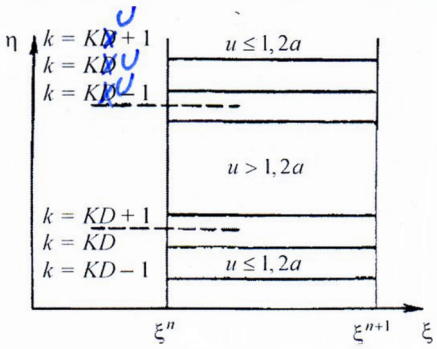

Рис. 1

Важно определить значения давления и продольной производной давления в «дозвуковых» областях струи.

Во внешней части струи полагается:

$$p = p_E; \ \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{29}$$

где p_E – давление во внешнем потоке.

Для области за диском Маха использовалась методика [11].

Представленный численный метод был применен к расчету струйных течений.

В первом тесте были проверены возможности используемого численного метода и проведено его сопоставление с решением полной системы уравнений Навье – Стокса. Для этого проведен расчет струи воздуха со следующими параметрами: $M_a = 4$; $T_a = 2000$ K; $p_a/p_e = 10^5$; $M_e = 12$; $T_e = 288$ K (индекс «a» относится к параметрам на срезе сопла, индекс «e» – к параметрам внешнего потока).

Для данного течения характерно наличие областей с огромными градиентами давления и очень высокие значения числа Маха. При использовании сквозного счета без выделения скачков уплотнения численный расчет этого варианта представляет большую сложность.

На рис. 2 представлено изменение давления и плотности вдоль оси струи. Сравниваются результаты расчета методом характеристик из работы [15] (пунктирная кривая), результаты при решении полной

системы Навье – Стокса (сплошная кривая) и результаты расчета по предложенной методике (штрих-пунктирная кривая).

Все расчеты удовлетворительно согласуются. При этом время счета при использовании параболизованных уравнений примерно на два порядка меньше по сравнению с решением полной системы уравнений Навье – Стокса. Некоторые осцилляции наблюдаются в районе схождения висячего скачка и отраженного скачка. Это объясняет тем, что в данном расчете не выделялась отдельно дозвуковая область за диском Маха. Так как эта область в данном случае очень мала, такое упрощение практически не влияет на результаты расчета.

Во втором тесте также сопоставляются результаты расчета при использовании полной и параболизованной системы уравнений Навье – Стокса.

В качестве тестового варианта использована струя со следующими параметрами. Параметры на срезе: скорость – 2900 м/с; давление – $0{,}75 \cdot 10^5$ Па; температура – 1900 К; угол на выходе – 0,17453 рад; радиус – 1 м. Состав, мольные доли: O_2 – 0,1631E-5; CO – 0,08372; H – 0,2406E-3; O – 0,5037E-6; OH – 0,1521E-3; NO – 0,1058E-4; H_2 – 0,05415; H_2O – 0,4053; CO_2 – 0,1461. Скорость внешнего потока – 845 м/с.

На рис. 3 представлено осевое изменение температуры. Здесь: *1* – расчет с использованием полной системы уравнений Навье – Стокса; *2* – расчет с использованием параболизованной системы уравнений Навье – Стокса.

см. выше: e – заглавная.

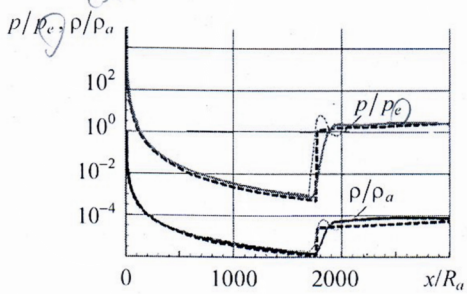

Рис. 2

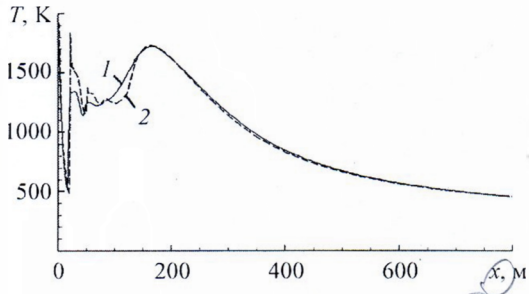

Рис. 3

Результаты расчета по двум методикам очень близки, и снова наблюдается некоторое расхождение за диском Маха. Использовалась кинетика химических реакций догорания, описанная в работе [16].

В следующих тестах проведен расчет затопленных струй. В этом случае достаточно значительные области течения являются дозвуковыми. Во всех расчетах использовался метод, представленный в данной работе.

x – заглавная или строчная (ср. x на рис 3)?

На рис. 4 приведена зависимость длины затопленной струи $\overline{X}_{0,75}$ от числа Маха на срезе сопла, результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными. Здесь: ○ – эксперимент [17]; ▽ – эксперимент [18]; ▼ – эксперимент [19]; *1* – расчет с использованием *k*–ε-модели, включающей поправку на сжимаемость [20]; *2* – расчет с использованием модели турбулентности [9].

x – заглавная или строчная?

В качестве оценки размера струи использовалась безразмерная координата $\overline{X}_{0,75}$, на которой осевая скорость u_c уменьшается до значения $0{,}75u_a$, т.е. составляет 75 % от скорости на оси среза сопла.

Обе модели удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными и друг с другом, а также показывают увеличение длины струи с ростом числа Маха. При использовании стандартной *k*–ε-модели турбулентности рост расчетной длины струи с увеличением числа Маха не наблюдается.

На рис. 5 представлено распределение избыточного безразмерного давления Пито вдоль оси струи, имеющей следующие параметры: $T_0 = 2860\text{K}$; $M_a = 4$; $p_a/p_c = 0{,}65$. Здесь: *1* – эксперимент [21]; *2* – расчет с использованием стандартной *k*–ε-модели турбулентности; *3* – расчет с использованием *k*–ε-модели турбулентности с поправками на сжимаемость [9]; *4* – расчет с использованием *k*–ε-модели турбулентности с поправками на сжимаемость [20].

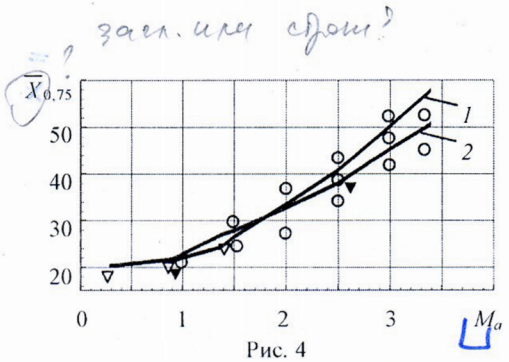

Рис. 4

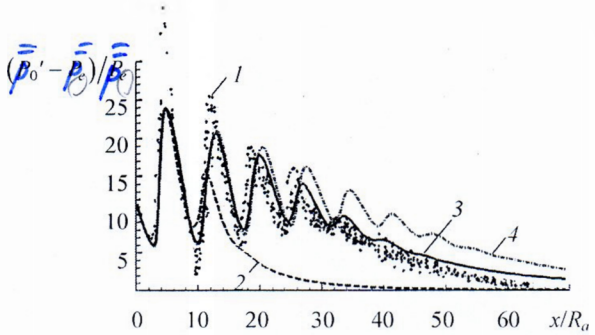

Рис. 5

Результаты расчета по представленной в данной работе модели турбулентности удовлетворительно согласуются с экспериментом, стандартная K–ε-модель турбулентности существенно занижает длину струи; k–ε-модель турбулентности с поправками на сжимаемость [20] несколько завышает расчетную длину струи.

Разработана модификация неявного метода Мак-Кормака для расчета сверхзвуковых струй на основе параболизированных уравнений Навье – Стокса. Результаты, полученные по этому методу, достаточно хорошо согласуются с результатами расчетов на основе других методов и экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fu Debin, Yu Yong, Niu Qinglin.* Simulation of Underexpanded Supersonic Jet Flows with Chemical Reactions // Chinese Journal of Aeronautics. 2014. Vol. 27. № 3. P. 505–513.
2. *Гараев К.Г.* Вывод уравнений оптимально управляемого пограничного слоя Прандля – Сиразетдинова на основе уравнений Навье – Стокса // Изв. вузов. Авиационная техника. 2007. № 2. С. 12–14.
3. *Rodriguez D. et al.* Parabolized Stability Equation Models in Turbulent Supersonic Jets // Proc. of the 18th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, June 4–6, 2012, Colorado Springs, USA. AIAA Paper 2012-2117. 19 p.
4. *Paredes P., Theofilis V.* Accurate Parabolic Navier – Stokes Solutions of the Supersonic Flow around an Elliptic Cone // Proc. of the AIAA Aerospace Science Meeting, Jan. 7–10, 2013, Grapewine, USA. AIAA Paper 2013-0670. 11 p.
5. *Williams M., Edwards J., Prince S.* Application of a Parabolized Navier – Stokes Solver to Some Problems in Hypersonic Propulsion Aerodynamics // Proc. of the AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit, Aug. 6–9, 2001, Montreal, Canada. AIAA Paper 2001-4066. 15 p.
6. *Lawrence S.L., Tannehill J.C., and Chaussee D.S.* Upwind Algorithm for the Parabolized Navier – Stokes Equations// AIAA Journal. 1989. Vol. 27. Iss. 9. P. 1175–1183.
7. *MacCormack R.W.* A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow // AIAA Journal. 1982. Vol. 20. Iss. 9. P. 1275–1281.
8. *Глебов Г.А., Молчанов А.М.* Модель турбулентности для расчета высокоскоростных реагирующих струй // Исследование теплообмена в летательных аппаратах: Сб. ст. М.: МАИ, 1982. С. 6–11.
9. *Молчанов А.М.* Расчет сверхзвуковых неизобарических струй с поправками на сжимаемость в модели турбулентности // Вестник МАИ. 2009. № 1. С. 38–48.
10. *Молчанов А.М.* Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассообмена. М.: МАИ, 2013. 206 с.
11. *Молчанов А.М.* Расчет турбулентных сверхзвуковых струй реального газа, истекающих в затопленное пространство // Вестник МАИ. 1997. № 1. С. 58–64.
12. *Молчанов А.М.* Численный метод расчета сверхзвуковых неизобарических струй // Изв. вузов. Авиационная техника. 1989. № 3. С. 42–45.
13. *Lawrence S.L., Tannehill J.C., Chaussee D.S.* Application of the Implicit MacCormack Scheme to the Parabolized Navier-Stokes Equations // AIAA Journal. 1984. Vol. 22. Iss. 12. P. 1755–1763.
14. *Vigneron Y.C., Rakich J.V., Tannehill J.C.* Calculation of Supersonic Viscous Flow over Delta Wings with Sharp Subsonic Leading Edges // Proc. of the 11th Fluid and PlasmaDynamics Conference, July 10–12, 1978. Seattle, USA. AIAA Paper 78-1137. 19 p.
15. *Аверенкова Г.И. и др.* Сверхзвуковые струи идеального газа. М.: МГУ, 1970. Ч. 1. 279 с.
16. *Быков Л.В., Молчанов А.М., Янышев Д.С.* Численный метод расчета сверхзвуковых турбулентных течений с химическими реакциями // Вестник МАИ. 2010. № 3. С. 108–119.

17. *Красоткин В.С. и др.* Исследования сверхзвуковых изобарических турбулентных струй // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 4. С. 56–62.
18. *Lau J.C., Morris P.J., Fisher M.J.* Measurements in Subsonic and Supersonic Free Jets Using a Laser Velocimeter // Journal of Fluid Mechanics. 1979. Vol. 93. Iss. 1. P. 1–27.
19. *Glassman I., John E.A.J.* An Unusual Aerodynamic Stagnation-Temperature Effect // Journal Aerospace Science. 1959. Vol. 26. P. 387–388.
20. *Sarkar S. et al.* The Analysis and Modeling of Dilatational Terms in Compressible Turbulence: Final Report № ICASE-89-79, NAS 1.26:181959, NASA-CR-181959 / NASA. Washington, 1989. 34 p.
21. *Сафронов А.В.* Метод расчета струй продуктов сгорания при старте // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. 2006. Т. 4. С. 350–368.

Поступила в редакцию 18.02.19
После доработки 3.10.19
Принята к публикации 3.10.19