НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА

А.М. Молчанов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ И ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Издательство МАИ

А. М. Молчанов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ И ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Москва
Издательство МАИ
2013

ББК 31.31
М75

М75 **Молчанов А.М.** Математическое моделирование задач газодинамики и тепломассообмена. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 208 с.: ил.
ISBN 978-5-4316-0159-0

Основная цель монографии, определившая структуру книги, – предложить читателю некий инструмент, который поможет ему составлять численные алгоритмы решения газодинамических задач, практически освоить методику численного решения сложнейших задач газодинамики и теплообмена и самостоятельно решать широкий круг задач, от создания или выбора математической модели до получения необходимых результатов. Особое внимание уделено вопросам моделирования турбулентности для задач авиационной и ракетно-космической техники.

Для математиков-прикладников, инженеров-вычислителей, специалистов по механике жидкостей, аспирантов и студентов вузов.

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *С.Г. Черкасов*;
д-р техн. наук *Ф.С. Завелевич*

ISBN 978-5-4316-0159-0

© Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2013

ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия повысился интерес к использованию расчетных методов для решения задач динамики жидкости и тепломассообмена. Это обусловлено существенным возрастанием мощности вычислительной техники, что позволяет быстро и эффективно решать сложные системы уравнений, описывающие эти явления.

Стоимость экспериментального исследования сложных систем может на порядки превосходить затраты на расчеты этих систем. Во многих проблемах экспериментальное изучение процесса вообще практически невозможно. Это относится, например, к задачам входа спускаемого аппарата в атмосферы удаленных планет. В этом случае расчетные методы являются единственным инструментом исследования.

Можно сформулировать [1] основные достоинства и недостатки расчетных методов исследования по сравнению с экспериментальными.

Преимущества расчетных методов:

1. Низкая стоимость.

2. Скорость.

3. Полнота информации. С помощью расчетных методов можно найти значения всех имеющихся переменных (таких, как скорость, давление, температура, концентрация, интенсивность турбулентности) во всей области решения. В отличие от эксперимента, для расчета доступна практически вся исследуемая область и отсутствуют возмущения процесса, вносимые датчиками при экспериментальном исследовании.

4. Возможность математического моделирования реальных условий. Численное уравнение можно получить для реальных усло-

вий исследуемого процесса, что далеко не всегда удаётся при экспериментальном исследовании.

Основным недостатком расчетных методов исследования является то, что эффективность расчета зависит от степени обоснованности математической модели, в то время как с помощью экспериментального исследования наблюдается сама действительность.

Математическая модель – это математическое представление реальности. В расчетных методах реальный объект заменяется его математической моделью, которая затем изучается.

При этом естественным образом встает вопрос доказательства достоверности результатов, которые получены в результате расчетов.

Решение любой задачи динамики жидкости и тепломассообмена состоит из следующих компонентов:

1. Построение математической модели и по возможности ее обоснование.

2. Численное решение уравнений, входящих в модель.

3. Анализ полученных результатов и по возможности сопоставление их с результатами экспериментов или других расчетов.

С точки зрения построения математической модели имеет смысл разделить все научные проблемы на две категории: проблемы, для которых математическая модель достаточно обоснована, и проблемы, для которых обоснованные математические модели пока не разработаны. Во втором случае требуется экспериментальное обоснование результатов расчета.

В математическую модель входят сложные дифференциальные уравнения в частных производных, которые, как правило, решаются численными методами. Существует очень большее количество численных методов решения задач динамики жидкости. Мы должны быть уверены, что численная схема соответствует выбранной математической модели. Численная схема должна с достаточной точностью аппроксимировать исходную систему уравнений, и ее решение должно устойчиво сходиться.

Таким образом, для доказательства достоверности необходимо:

1) обосновать используемую математическую модель, а если математическая модель недостаточно обоснована, необходимо четко сформулировать все используемые гипотезы;

2) обосновать выбранную численную схему, доказать устойчивость и аппроксимацию;

3) при анализе полученных результатов, во-первых, всесторонне исследовать сходимость решения, во-вторых, проверить использованные в математической модели гипотезы путем сопоставления с экспериментальными данными и другими расчетами.

Остановимся подробнее на построении математической модели для какой-либо конкретной проблемы динамики жидкости. В качестве примера возьмем задачу расчета течения и теплообмена в камере сгорания жидкостного ракетного двигателя (ЖРД).

Предположим, ваша фирма специализируется на создании новых образцов ракетных двигателей, и вам поручили провести расчет конкретного изделия.

Прежде всего необходимо четко сформулировать поставленную задачу, т.е. определить, что является исходными данными и что требуется получить в результате расчета.

Предположим, заданы геометрия камеры сгорания и сопла, состав продуктов сгорания в камере, температура торможения и полное давление в камере сгорания. Кроме того, задан способ охлаждения стенок камеры и сопла, Например, с внешней стороны протекает охлаждающая жидкость, и при этом заданы условия теплообмена этой жидкости с внешней стороной стенки.

В результате расчета требуется определить параметры потока в выходном сечении сопла (на срезе сопла) и распределение температуры на внутренней стороне стенок камер сгорания и сопла.

Решение поставленной задачи состоит из следующих этапов.

Построение математической модели. В модель включаются следующие элементы:.

1. Основная система уравнений. В данном случае она состоит из уравнений неразрывности, количества движения и энергии для сжимаемой жидкости. Вполне возможно, что для решения поставленной задачи этих уравнений будет недостаточно, и их придется дополнить.

2. Дополнительная система уравнений. Как правило, течение в ЖРД является турбулентным, и необходимо дополнить основную

систему моделью турбулентности. Несмотря на то что турбулентностью занимается множество ученых на протяжении многих десятилетий, можно со всей ответственностью сказать, что универсальной теории турбулентности не существует. Поэтому выбор модели, соответствующей конкретной задаче, требует большого искусства от исследователя.

3. *Физические свойства веществ*, используемых в задаче. В рассматриваемом случае это отнюдь не тривиальная задача, особенно если необходимо учесть переменность состава продуктов сгорания при течении.

4. Граничные условия. Для нашей задачи они следующие:

1) условия на входе в камеру сгорания;

2) условия на стенках камеры и сопла;

3) условия на срезе сопла.

Задание каждого из этих условий представляет непростую задачу и будет подробно изучено в дальнейшем. В данный момент обратим внимание только на парадоксальность третьего условия. С одной стороны, мы не можем не задать условия на выходе. Например, если давление окружающего пространства совпадает с давлением в камере сгорания, то никакого течения вообще не будет. С другой стороны, на срезе сопла скорость потока сверхзвуковая, т.е. параметры на срезе сопла никак не могут влиять на течение вверх по потоку.

Создание численной схемы. Изучению численных методов будет посвящено немало страниц этой книги. Сейчас скажем только, что при использовании численных методов мы заменяем непрерывные функции, входящие в дифференциальные уравнения, дискретными значениями в некоторых узловых точках. Вместо решения сложной системы дифференциальных уравнений мы решаем алгебраические уравнения, которые называются дискретным аналогом исходной системы. Эти уравнения включают неизвестные значения интересующих нас функций (давления, температуры, концентраций и т.д.) в выбранных узловых точках. Совокупность узловых точек называется *расчетной (вычислительной) сеткой.*

Численное моделирование поставленной задачи состоит из следующих этапов:

1. Построение расчетной сетки.

2. Дискретизация исходной системы дифференциальных уравнений на расчетную сетку.

3. Решение системы алгебраических уравнений, входящих в дискретный аналог исходной системы.

4. Анализ полученных результатов.

Трудно сказать заранее, какой из этапов самый сложный, но можно утверждать, что наиболее трудоемким и протяженным по времени является третий этап, так как он связан с созданием программы расчета на каком-либо алгоритмическом языке, отладкой этой программы и доведением ее до работоспособного вида. Любой программист знает, что этот процесс может продолжаться несколько месяцев, а то и несколько лет.

Большую помощь при решении задач динамики жидкости и тепломассообмена оказывают так называемые *универсальные программные системы численного анализа.*

Приведем некоторые из них:

ANSYS Fluid Dynamics http://www.ansys.ru/

FlowVision http://www.flowvision.ru/

Star-Cd http://www.cd-adapco.com

OpenFoam http://www.opencfd.co.uk/openfoam/

14-я версия ANSYS включает удобные системы для решения (решатели) дискретной системы алгебраических уравнений – ANSYS CFX и ANSYS FLUENT. ANSYS ICEM CFD является удобным универсальным средством для построения расчетной сетки. ANSYS Post служит для всестороннего анализа полученных результатов.

Таким образом, продолжительность наиболее трудоёмкого третьего этапа может быть сокращена за счет использования универсальных программных систем. Охватываются ими и все остальные этапы, связанные с численным моделированием.

Не так все просто с математической моделью.

Универсальные программные системы численного анализа предлагают широкий выбор математических моделей. Это удобно, но порождает проблемы.

С одной стороны, не имеющему достаточного опыта теплофизику трудно выбрать модель, адекватную решаемой задаче, из такого широкого набора. В нашем примере расчета ЖРД модели,

предложенные по умолчанию, безусловно не подходят. С другой стороны, несмотря на название, совершенно универсальных моделей не существует. Поэтому весьма вероятно, что ни одна из предложенных математических моделей не подходит для решения нашей задачи.

Вернемся к нашему примеру и попытаемся умозрительно решить его с помощью ANSYS CFX.

Очень маловероятно, что полученный с первой попытки результат удовлетворит нас. Часто численное решение не сходится или даже «разваливается», т.е. происходит потеря устойчивости. А возможно, что решение сошлось и результат получен, но он нефизичен или совершенно не согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

В лучшем случае это происходит из-за того, что плохо построена расчетная сетка. Например, вы не сгустили ее в области сильных градиентов параметров (пограничный слой, скачок уплотнения и т.п.)

В худшем случае проблема заключается в выборе математической модели. Возможен и еще более неприятный случай: используемый в программе численный метод принципиально не подходит для решаемой задачи.

Основный вывод из этих рассуждений состоит в следующем.

Универсальные программные системы являются очень удобным средством решения задач динамики жидкости и тепломассообмена, но лишь для умелого специалиста, который хорошо разбирается в этих задачах, а также в используемых численных методах.

Другими словами, надо хотя бы теоретически уметь решать эти задачи без привлечения универсальных программных систем. Под словом «теоретически» подразумевается, что специалист не обязан сам создавать свою систему решения поставленной проблемы, но должен четко представлять, *как* это сделать.

Приведу пример из другой области, понятный для людей, занимающихся конструированием. В их распоряжении имеются такие мощные программные системы, как AUTOCAD, SolidWorks или CATIA, тем не менее любой из конструкторов должен уметь создать чертежи изделия на бумаге, работая за

кульманом. Иначе не будет никакого толку от дорогостоящих программ.

Целью данной монографии является создание некоего учебного инструмента, который поможет читателю самостоятельно решать широкий круг задач динамики жидкости и тепломассообмена, от создания или выбора математической модели до получения необходимых результатов.

Монография состоит из четырех глав.

Глава 1 позволяет читателю получить некоторые сведения из механики сплошной среды и термодинамики. Представлены основные понятия механики сплошной среды, выводятся основные уравнения движения вязкой жидкости. По мнению автора, эти сведения должны помочь читателю правильно выбрать те математические модели, которые необходимы для решения поставленных задач.

В главе 2 даны сведения из теории разностных схем. Вводятся основные понятия, используемые при численном решении дифференциальных уравнений в частных производных: дискретизация, сходимость, аппроксимация и устойчивость, понятия явных и неявных схем. Рассмотрены методы решения задач с несколькими пространственными переменными.

Глава 3 посвящена численным методам решения уравнений движения вязкой жидкости. Представлены основные требования к численному методу. Описаны основные методы расщепления конвективных потоков. Особое внимание уделено граничным условиям для системы уравнений Навье–Стокса.

Во многих задачах механики жидкости и газа и тепломассообмена важнейшую роль играет турбулентность. Поэтому глава 4 посвящена методам расчета турбулентных течений. Представлены основные понятия турбулентного движения, выведены уравнения для турбулентных характеристик. Многие проблемы авиационной и ракетно-космической техники связаны с высокоскоростными (сверх- и гиперзвуковыми) течениями газа, поэтому существенную часть главы занимают вопросы моделирования турбулентности в таких потоках.

Автор старался, чтобы материал книги по возможности был максимально полным, так, чтобы читателю не нужно было при-

влекать дополнительные источники для решения поставленной задачи.

В монографии очень много формул. В этих формулах используются следующие правила: скалярные величины обозначены светлым курсивом, например T; векторные и тензорные – полужирным курсивом, например $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{T}$. Для матриц также используется полужирный шрифт (курсив или прямой).

Из-за ограниченности объема в монографии не приводятся выводы некоторых полезных формул, а также справочные материалы. Все дополнительные материалы можно найти на сайте кафедры авиационно-космической теплотехники МАИ по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/

Глава 1

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ТЕРМОДИНАМИКИ

1.1. ОСНОВНЫЕ ГИПОТЕЗЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Для начала определимся с терминологией. В названии главы фигурирует слово «жидкость». Давайте договоримся, что этот термин имеет широкое значение. Жидкость может быть несжимаемой (это собственно жидкость), сжимаемой (газ), проводящей и т.д.

Для построения математической модели любой задачи динамики жидкости необходимо получить представление о такой науке, как «Механика сплошной среды». Наиболее полной монографией в этой области является книга Л.И. Седова [2].

Механика сплошной среды – часть механики, посвященная движению газообразных, жидких и твердых деформируемых тел.

Классическая теоретическая механика изучает движение материальной точки, дискретных систем материальных точек и абсолютно твердого тела. Механика сплошной среды изучает движение таких материальных тел, которые заполняют все пространство непрерывно, сплошным образом. Расстояния между точками этих тел во время движения меняются, т.е. тело постоянно деформируется – изменяет форму.

Механика сплошной среды строится на следующих основных гипотезах:

- *гипотеза сплошности;*
- *гипотеза о метрическом евклидовом пространстве;*
- *гипотеза об абсолютности времени.*

Подробная информация об этих гипотезах содержится в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/1_1.pdf

1.2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Итак, под пространством понимается совокупность точек, задаваемых с помощью чисел, которые называются координатами.

Поэтому изучение вопросов, связанных с анализом систем координат, представляет большую важность.

Укажем особые причины.

Чаще всего в учебных пособиях основные уравнения динамики жидкости записываются в индексной форме в декартовой системе координат без разделения на ковариантные и контравариантные индексы. В то же время многие задачи, особенно в авиационной и ракетно-космической технике, удобнее решать в цилиндрической системе координат. Перевод основных уравнений в цилиндрическую систему координат представляет собой нетривиальную задачу.

При построении расчетных сеток производится переход от ортогональной системы координат к криволинейной неортогональной системе, и наоборот.

Движение всегда определяется по отношению к некоторой системе отсчета – системе координат. С помощью системы координат устанавливается соответствие между числами и точками пространства. Для трехмерного пространства точкам ставятся в соответствие три числа $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$, которые называются координатами точки (см. рис. 1.1).

Линии, на которых какие-либо две координаты сохраняют постоянные значения, называются координатными линиями.

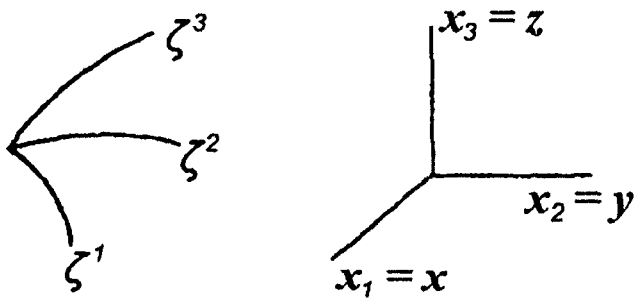

Рис. 1.1. Криволинейная и декартова системы координат

Например, линия, вдоль которой $\zeta^2 = \text{const}$, $\zeta^3 = \text{const}$, определяет координатную линию ζ^1; вдоль этой линии различные точки определяются значениями ζ^1; направление роста координаты ζ^1 определяет направление вдоль этой линии. Через каждую точку пространства можно провести три координатные линии. Касательные к координатным линиям в каждой точке не лежат в одной плоскости и образуют, вообще говоря, неортогональный триэдр.

Условимся обозначать через $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ координаты относительно любой произвольной системы координат (в том числе и декартовой), а через $\{x_1, x_2, x_3\}$ или $\{x, y, z\}$ – координаты относительно ортогональной декартовой системы координат. Иногда для произвольной системы координат удобно использовать обозначения без индексов: $\{\xi, \eta, \zeta\}$.

Координаты каждой точки меняются во времени. Сплошная среда представляет собой непрерывную совокупность точек. По идее, чтобы описать движение среды, нужно задать координаты каждой точки в каждый момент времени. Если координаты точек в некоторый начальный момент времени t_0 обозначить как $\{\zeta_0{}^1, \zeta_0{}^2, \zeta_0{}^3\}$, то координаты точек в любой момент времени t определяются как

$$\zeta^i = \zeta^i\left(\zeta_0{}^1, \zeta_0{}^2, \zeta_0{}^3, t\right), \; i = 1,2,3. \tag{1.1}$$

Координаты $\zeta_0{}^1, \zeta_0{}^2, \zeta_0{}^3$, выделяющие конкретную точку, и время t называются переменными Лагранжа.

Основная задача механики сплошной среды заключается в определении функций (1.1).

1.3. ВЕКТОРЫ БАЗИСА

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки P (рис. 1.2) по отношению к началу координат 0 может быть выражен через координаты как

$$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{i}_1 + x_2\boldsymbol{i}_2 + x_3\boldsymbol{i}_3, \tag{1.2}$$

где $\{\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3\}$ или $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ – единичные векторы по осям координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ соответственно. Альтернативная форма записи имеет вид

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1.3}$$

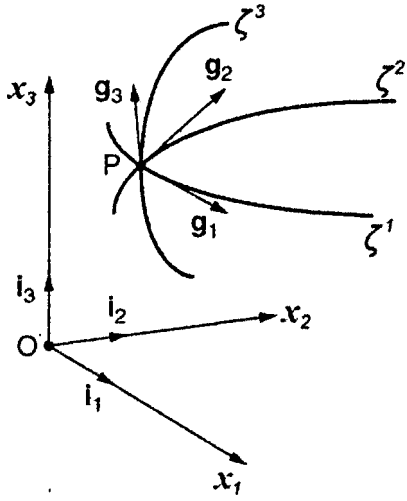

Рис. 1.2. Ковариантные векторы базиса в точке *P*

Делаем допущение, что между координатами в основной декартовой системе координат и координатами в произвольной системе координат существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. существуют дифференцируемые функции

$$x_i = x_i\left(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\right), \quad i = 1,2,3, \quad (1.4)$$

а также дифференцируемые функции, выражающие обратную связь:

$$\zeta^j = \zeta^j\left(x_1, x_2, x_3\right), \quad j = 1,2,3. \quad (1.5)$$

Дифференцируя уравнение (1.2) по ζ^j, получаем систему *ковариантных векторов базиса* в системе координат $\left\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\right\}$:

$$\boldsymbol{g}_j \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial x_1}{\partial \zeta^j}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \zeta^j}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \zeta^j}\boldsymbol{i}_3, \quad j = 1,2,3, \quad (1.6)$$

которые в базовой декартовой системе координат имеют следующие компоненты:

$$\left(\boldsymbol{g}_j\right)_i = \frac{\partial x_i}{\partial \zeta^j}, \quad i = 1,2,3. \quad (1.7)$$

1.4. ВЕКТОР СКОРОСТИ

Бесконечно малое перемещение $d\boldsymbol{r}$ точки P можно разложить по ковариантным векторам базиса $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$, взятым в точке P:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_1 d\zeta^1 + \boldsymbol{g}_2 d\zeta^2 + \boldsymbol{g}_3 d\zeta^3, \quad (1.8)$$

где $d\zeta^1, d\zeta^2, d\zeta^3$ являются компонентами перемещения $d\boldsymbol{r}$.

Данное разложение удобно записать в компактном виде:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_j d\zeta^j, \quad (1.9)$$

где знак суммы опущен. В дальнейшем мы обычно будем опускать знак суммы, подразумевая суммирование всякий раз, когда в выражениях типа (1.9) а другой – внизу.

Поделив (1.9) на элемент времени dt, соответствующий перемещению точки сплошной среды из точки P в точку P', получим по определению *скорость точки* сплошной среды:

$$\boldsymbol{v}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}=\boldsymbol{g}_j\frac{\partial \zeta^j}{\partial t}=\boldsymbol{g}_j v^j, \tag{1.10}$$

откуда

$$v^j=\left(\frac{\partial \zeta^j}{\partial t}\right)_{\zeta_0{}^k}, \tag{1.11}$$

где индексы $\zeta_0{}^k$ внизу указывают на то, что производные берутся при постоянных параметрах $\left\{\zeta_0{}^1,\zeta_0{}^2,\zeta_0{}^3\right\}$, индивидуализирующих точку среды. Величины $\left\{v^1,v^2,v^3\right\}$ называются компонентами вектора скорости $\boldsymbol{v}$ в базисе $\left\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3\right\}$.

Компоненты скорости в базовой декартовой системе координат будем обозначать $\left\{u_1,u_2,u_3\right\}$ или $\left\{u,v,w\right\}$.

1.5. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Пусть имеется два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданные в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=a_1\boldsymbol{i}_1+a_2\boldsymbol{i}_2+a_3\boldsymbol{i}_3,\\ \boldsymbol{b}&=b_1\boldsymbol{i}_1+b_2\boldsymbol{i}_2+b_3\boldsymbol{i}_3.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Скалярное произведение этих векторов является скаляром и определяется по формуле

$$c=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{ab}}\right). \tag{1.13}$$

Векторное произведение этих векторов является вектором $\boldsymbol{c}$ и определяется по формуле

$$c = a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) i_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i_3 = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.14)$$

Справедливы следующие правила: вектор c ортогонален каждому из векторов a и b; вектор c направлен так, что тройка векторов abc является правой.

1.6. ТЕНЗОРНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ И СОГЛАШЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА

Компактный вид записи уравнений (1.9) и (1.10) является примером так называемой *тензорной формы записи* основных уравнений.

В тензорном анализе, при записи выражений из многокомпонентных величин, пронумерованных верхними и нижними индексами (тензоров), для экономии записи бывает удобно использовать правило, называемое *соглашением Эйнштейна*: если одна и та же буква в обозначении индекса встречается и сверху, и снизу, то такой член полагается просуммированным по всем значениям, которые может принимать этот индекс. Например, в выражении

$$a_k = b_i c_k^i \quad (1.15)$$

буква i встречается и сверху, и снизу, поэтому это выражение считается эквивалентным сумме

$$a_k = \sum_{i=1}^{N} b_i c_k^i, \quad (1.16)$$

где N – размерность пространства. Для трёхмерных задач $N = 3$, для четырёхмерных (задачи теории относительности) $N = 4$ и т.д. Для обозначения индексов используют латинские буквы из середины алфавита (i,j,k,l,m,n,p,q,r). Также в качестве индексов могут быть использованы и греческие буквы α, β, γ.

Это правило распространяется не только на алгебраические формулы, но и на дифференциальные выражения. Например, запись $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ подразумевает суммирование $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.

В декартовой системе координат нет разницы между индексами, находящимися внизу и вверху в компонентных выражениях.

Поэтому к декартовым координатам и векторам базиса в декартовой системе координат можно применить соглашение Эйнштейна в следующей форме: если одна и та же буква в обозначении индекса встречается *два раза*, то такой член полагается просуммировать по всем значениям, которые может принимать этот индекс.

1.7. ТОЧКА ЗРЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА ИЗУЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Движение, с точки зрения Эйлера, считается известным, если скорость, давление, температура и другие интересующие величины заданы как функции $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ и t.

Функции $v = v\left(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t\right)$, $p = p\left(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t\right)$, $T = T\left(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t\right)$ и т.д. при фиксированных $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ и переменном t определяют изменения со временем скорости, температуры и т.п. в данной точке пространства для разных приходящих в эту точку частиц.

Таким образом, по Лагранжу, мы интересуемся законами изменения скорости, давления, температуры и других величин для данной индивидуальной точки сплошной среды, а по Эйлеру – скоростью, давлением, температурой и т.д. в данном месте. Согласно Эйлеру, мы выделяем некоторую область пространства и хотим знать все данные о частицах, которые в нее приходят.

1.8. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При изучении движения сплошной среды необходимо вводить в рассмотрение скалярные и векторные величины: температуру T, давление p, плотность ρ, скорость v и др.

Совокупность значений той или иной величины, заданных в каждой точке рассматриваемой области, называется полем этой величины. Если рассматриваемая величина – скаляр, т.е. число, значение которого в данной точке не зависит от выбора системы

координат, то поле называется скалярным. Примеры: температура, давление, плотность и др. Если же рассматриваемая величина – вектор, как, например, скорость, то поле называется векторным.

Если распределение скалярной величины, например температуры T, задано с точки зрения Лагранжа $T\left(\zeta_0{}^1,\zeta_0{}^2,\zeta_0{}^3,t\right)$, то подсчитать изменение температуры T в единицу времени t для индивидуальной частицы сплошной среды $\left(\zeta_0{}^1,\zeta_0{}^2,\zeta_0{}^3\right)$ очень просто. Оно будет равно производной $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta_0{}^j}$.

Если же распределение температуры задано в зависимости от переменных Эйлера $T\left(d\zeta^1,d\zeta^2,d\zeta^3,t\right)$, то надо перейти от переменных Эйлера к переменным Лагранжа

$$T=T\left(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3,t\right)=$$

$$=T\left(\zeta^1\left(\zeta_0{}^1,\zeta_0{}^2,\zeta_0{}^3,t\right),\zeta^2\left(\zeta_0{}^1,\zeta_0{}^2,\zeta_0{}^3,t\right),\zeta^3\left(\zeta_0{}^1,\zeta_0{}^2,\zeta_0{}^3,t\right),t\right) \quad (1.17)$$

и взять производную по времени как производную сложной функции:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta_0{}^j}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta^i}+\frac{\partial T}{\partial \zeta^1}\left(\frac{\partial \zeta^1}{\partial t}\right)_{\zeta_0{}^j}+\frac{\partial T}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \zeta^2}{\partial t}\right)_{\zeta_0{}^j}+\frac{\partial T}{\partial x^3}\left(\frac{\partial \zeta^3}{\partial t}\right)_{\zeta_0{}^j}. \quad (1.18)$$

Учитывая введенные определения компонент вектора скорости (1.11), получаем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta_0{}^j}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta^i}+\frac{\partial T}{\partial \zeta^1}v^1+\frac{\partial T}{\partial \zeta^2}v^2+\frac{\partial T}{\partial \zeta^3}v^3=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta^i}+\frac{\partial T}{\partial \zeta^j}v^j. \quad (1.19)$$

Производная $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta_0{}^j}$ характеризует изменение температуры со временем в данной точке сплошной среды и называется индивидуальной, или субстанциональной, или полной производной температуры T по времени t. Она часто обозначается символом $\frac{dT}{dt}$. Производная $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta^i}$ характеризует изменение температуры T в единицу времени в данной точке пространства $\left(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3\right)$. Она называется

местной или локальной производной и обозначается $\frac{\partial T}{\partial t}$. В общем случае индивидуальная производная $\frac{dT}{dt}$ не равна местной $\frac{\partial T}{\partial t}$, а отличается от нее на величину, зависящую от движения частицы и называемую конвективной производной.

1.9. КОНТРАВАРИАНТНЫЙ БАЗИС

Имея базис $\{g_1, g_2, g_3\}$, мы можем сформировать в точке P систему контравариантных базисных векторов $\{g^1, g^2, g^3\}$, используя для их определения систему уравнений

$$g^i \cdot g_j = \delta^{i\cdot}_{\cdot j}, \tag{1.20}$$

где точкой обозначено скалярное произведение векторов, $\delta^{i\cdot}_{\cdot j}$ – символ Кронекера, определяемый как

$$\delta^{i\cdot}_{\cdot j} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.21}$$

По правилам скалярного умножения (см. формулу (1.13)):

$$g^i \cdot g_j = \left(g^i\right)_1 \left(g_j\right)_1 + \left(g^i\right)_2 \left(g_j\right)_2 + \left(g^i\right)_3 \left(g_j\right)_3, \tag{1.22}$$

где $\left(g^i\right)_k$ – компоненты вектора g^i в базовой декартовой системе координат.

С учетом того, что по определению

$$\left(g_j\right)_k = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}, \quad k = 1,2,3,$$

получаем:

$$\delta^{i\cdot}_{\cdot j} \equiv g^i \cdot g_j = \left(g^i\right)_1 \frac{\partial x_1}{\partial \zeta^j} + \left(g^i\right)_2 \frac{\partial x_2}{\partial \zeta^j} + \left(g^i\right)_3 \frac{\partial x_3}{\partial \zeta^j}. \tag{1.23}$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\delta^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \zeta^j}. \tag{1.24}$$

Сравнивая выражения (1.23) и (1.24), получаем:

$$\left(\boldsymbol{g}^i\right)_k = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_k}, \quad k = 1,2,3. \tag{1.25}$$

Отсюда мы получаем, что вектор $\boldsymbol{g}^i$ в декартовой системе координат определяется как

$$\boldsymbol{g}^i = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_3, \quad i = 1,2,3. \tag{1.26}$$

Можно показать, что справедливы следующие формулы:

$$\boldsymbol{g}^1 = \frac{\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3}{V}, \quad \boldsymbol{g}^2 = \frac{\boldsymbol{g}_3 \times \boldsymbol{g}_1}{V}, \quad \boldsymbol{g}^3 = \frac{\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2}{V}, \tag{1.27}$$

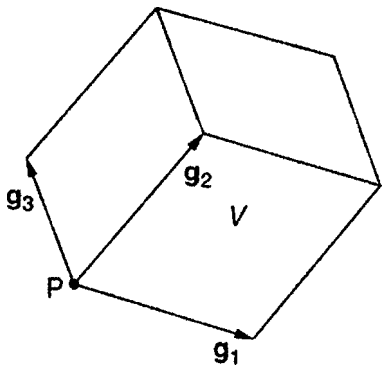

Рис. 1.3. Параллелепипед, построенный на базисных векторах

где $V = \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ (рис. 1.3).

Таким образом, вектор $\boldsymbol{g}^1$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$, которые являются касательными к координатным линиям ζ^2, ζ^3 соответственно. Следовательно, вектор $\boldsymbol{g}^1$ расположен на нормали к поверхности, на которой координата ζ^1 постоянна.

Упражнение. Доказать формулы (1.27).

1.10. ОПЕРАТОР НАБЛА, ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРА, РОТОР ВЕКТОРА

Формулу (1.26) можно записать в форме

$$\boldsymbol{g}^i = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_3}\boldsymbol{i}_3 = \nabla \zeta^i, \tag{1.28}$$

где через ∇ обозначен так называемый векторный дифференциальный *оператор набла* или *оператор Гамильтона*:

$$\nabla = \boldsymbol{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \boldsymbol{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \boldsymbol{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \boldsymbol{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.29}$$

Используя этот оператор, удобно задать в декартовой системе координат следующие важные векторные функции:

– градиент скалярной величины T:

$$\operatorname{grad} T = \nabla T = \boldsymbol{i}_i \frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{1.30}$$

– дивергенция векторной величины $\boldsymbol{v}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{1.31}$$

– и ротор (или вихрь) векторной величины $\boldsymbol{v}$

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \boldsymbol{i}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \boldsymbol{i}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \boldsymbol{i}_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}. \tag{1.32}$$

1.11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В предыдущих разделах были введены в рассмотрение некоторые векторы, например, скорость $\boldsymbol{v}$, перемещение $d\boldsymbol{r}$. Что же такое вектор? Вектор не скаляр, но в то же время, как и скаляр, является инвариантом, т.е. не зависящим от выбора системы координат объектом.

Определяя вектор, часто говорят, что это – три числа, называемые компонентами вектора, преобразующиеся при переходе от одной системы координат к другой определенным образом. Однако это определение недостаточно, так как вектор всегда задается в определенном базисе и, задавая вектор его компонентами, всегда надо указывать базис, в котором они заданы.

Давайте рассмотрим, как же меняются компоненты вектора при переходе от одного базиса к другому.

1.12. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Рассмотрим наряду с системой координат $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ произвольную криволинейную систему координат $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$. Законы движения можно рассматривать как относительно системы $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$, так и относительно $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$. Между этими двумя системами существует соответствие:

$$\zeta^i = \zeta^i\left(\eta^1, \eta^2, \eta^3\right), \quad i = 1,2,3. \tag{1.33}$$

Таким образом, имеется три функции, зависящие от трех аргументов. Для определения дифференциалов этих функций применяются обычные формулы:

$$\begin{aligned} d\zeta^1 &= \frac{\partial \zeta^1}{\partial \eta^1} d\eta^1 + \frac{\partial \zeta^1}{\partial \eta^2} d\eta^2 + \frac{\partial \zeta^1}{\partial \eta^3} d\eta^3; \\ d\zeta^2 &= \frac{\partial \zeta^2}{\partial \eta^1} d\eta^1 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial \eta^2} d\eta^2 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial \eta^3} d\eta^3; \\ d\zeta^3 &= \frac{\partial \zeta^3}{\partial \eta^1} d\eta^1 + \frac{\partial \zeta^3}{\partial \eta^2} d\eta^2 + \frac{\partial \zeta^3}{\partial \eta^3} d\eta^3 \end{aligned} \tag{1.34}$$

или

$$d\zeta^i = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} d\eta^j, \tag{1.35}$$

где по j идет суммирование от 1 до 3, а i пробегает значения 1, 2, 3, что в дальнейшем не будет указываться, но будет подразумеваться.

Напомним, что $\{d\zeta^1, d\zeta^2, d\zeta^3\}$ можно рассматривать как компоненты элементарного перемещения $d\boldsymbol{r}$ в базисе $\{\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$, т.е. справедлива формула разложения:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_j d\zeta^j. \tag{1.36}$$

Этот же вектор $d\boldsymbol{r}$ можно разложить и в новом базисе $\{\boldsymbol{g}'_1, \boldsymbol{g}'_2, \boldsymbol{g}'_3\}$, который соответствует новой системе координат $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$:

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}'_j d\eta^j. \tag{1.37}$$

Формулы (1.34) или (1.35) дают связь приращений координат $d\zeta^i$ и $d\eta^j$ вблизи любой заданной точки. Производные $\frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j}$ образуют матрицу размером (3×3), которую мы обозначим через **A**. Введем обозначения:

$$a^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j}; \tag{1.38}$$

$$\left\| a^{i\cdot}_{\cdot j} \right\| = \mathbf{A}. \tag{1.39}$$

При таком обозначении важно расположение индексов: верхний индекс соответствует номеру строки матрицы, нижний – номеру столбца.

Считаем, что между двумя системами координат существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. определитель матрицы **A** не равен нулю и существует обратная ей матрица **B**, с помощью которых компоненты $d\eta^1, d\eta^2, d\eta^3$ выражаются через компоненты $d\zeta^1, d\zeta^2, d\zeta^3$:

$$d\eta^j = \frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^i} d\zeta^i. \tag{1.40}$$

Соответствующие компоненты матрицы обозначаются как

$$b^{j\cdot}_{\cdot i} = \frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^i}; \tag{1.41}$$

$$\left\| b^{i\cdot}_{\cdot j} \right\| = \mathbf{B}. \tag{1.42}$$

По правилам умножения матриц получаем:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a^{i\cdot}_{\cdot j} b^{j\cdot}_{\cdot k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j}\frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \zeta^k} = \delta^{i\cdot}_{\cdot k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.43}$$

где

$$\delta^{i\cdot}_{\cdot k} = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k \end{cases} \text{ – символы Кронекера.} \tag{1.44}$$

Таким образом, матрицы **A** и **B** действительно взаимно обратные.

Теперь получим формулы, с помощью которых векторы нового базиса $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$ могут быть выражены через векторы базиса $\{g_1, g_2, g_3\}$. Для этого достаточно воспользоваться определением векторов базиса (см. формулу (1.6)), из которого следует:

$$g'_j = \frac{\partial r}{\partial \eta^j} = \frac{\partial r}{\partial \zeta^i}\frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} = g_i \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} = a^{i\cdot}_{\cdot j} g_i. \qquad (1.45)$$

Для новых компонент вектора dr согласно (1.40) имеем:

$$d\eta^j = b^{j\cdot}_{\cdot i} d\zeta^i. \qquad (1.46)$$

Таким образом, переход к новому базису осуществляется с помощью прямой матрицы **A**, а переход к новым компонентам – с помощью обратной матрицы **B**.

Введем определение. Величины, преобразующиеся аналогично векторам базиса g_j (по формуле (1.45)) с помощью прямой матрицы **A**, называются *ковариантными*. Величины, преобразующиеся аналогично компонентам dr (формула (1.46)) с помощью обратной матрицы **B**, называются *контравариантными*. Подчеркнем, что преобразования, образующие ковариантные и контравариантные величины, являются взаимно обратными.

Соответственно, компоненты $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ называются *контравариантными компонентами* вектора dr, а базис $\{g_1, g_2, g_3\}$ называется *ковариантным базисом*.

1.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА

По примеру элементарного перемещения dr, которое имеет в базисе $\{g_1, g_2, g_3\}$ компоненты $d\zeta^1, d\zeta^2, d\zeta^3$, введем объект A, который представляется через базис по формуле, аналогичной (1.36):

$$A = A^i g_i. \qquad (1.47)$$

Его компоненты при преобразовании координат преобразуются как компоненты dr (см. формулу (1.46))

$$A'^j = b^{j\cdot}_{\cdot i} A^i. \qquad (1.48)$$

Такой объект A, инвариантный относительно преобразований координат:

$$A = A^i g_i = A'^j g'_j, \tag{1.49}$$

называется вектором, а компоненты A^j являются контравариантными компонентами этого вектора.

Вектор A может иметь любую геометрическую или физическую природу, но через векторы базиса он всегда определяется разложением (1.49), где числа A_j зависят от системы координат. Векторы базиса $\mathbf{g}_j$ управляют числами A_j и создают новый объект – вектор A.

1.14. ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРА

Возникает вопрос, нельзя ли по аналогии с вектором ввести какие-то более сложные объекты, используя подход, описанный выше. Прежде всего введем понятие диадного произведения двух векторов.

Матричное умножение вектора-столбца справа на вектор-строку даёт их диадное или тензорное произведение:

$$\boldsymbol{ab} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1, b^2, b^3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 & a^1 b^3 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 & a^2 b^3 \\ a^3 b^1 & a^3 b^2 & a^3 b^3 \end{pmatrix}. \tag{1.50}$$

Другое встречающееся в литературе обозначение диадного произведения – $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$.

Диадное произведение линейно по каждому из сомножителей: если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть скаляры, то

$$(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b})(\gamma \boldsymbol{c} + \delta \boldsymbol{e}) = \alpha\gamma \boldsymbol{ac} + \alpha\delta \boldsymbol{ae} + \beta\gamma \boldsymbol{bc} + \beta\delta \boldsymbol{be}. \tag{1.51}$$

Диадное произведение подчиняется свойству дистрибутивности, но не подчиняется свойству коммутативности, т.е. $\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba}$.

По аналогии можно ввести диадные произведения векторов ковариантного базиса $\{g_1, g_2, g_3\}$:

$$g_1 g_1, \quad g_1 g_2, \quad g_1 g_3,$$
$$g_2 g_1, \quad g_2 g_2, \quad g_2 g_3,$$
$$g_3 g_1, \quad g_3 g_2, \quad g_3 g_3.$$

Компоненты диадных произведений $g_i g_j$ в соответствующей им системе координат можно записать в виде матриц, состоящих из одной единицы и остальных нулей. Например, компоненты $g_1 g_2$ образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.52}$$

Диадные произведения векторов базиса $g_i g_j$, так же как и сами векторы базиса g_i, зависят от системы координат. Формулы преобразования величин $g_i g_j$ легко получить, зная формулы преобразования g_i (1.45) и пользуясь свойством линейности диадного произведения. Эти формулы имеют вид

$$g'_m g'_k = a^{i\cdot}_{\cdot m} a^{j\cdot}_{\cdot k} g_i g_j . \tag{1.53}$$

Всевозможные линейные комбинации диадных произведений образуют линейное пространство, его элементы называются *тензорами второго ранга.* Базисом в этом пространстве служат диадные произведения $g_i g_j$.

Если векторы a и b записаны через компоненты по формуле (1.47), то диадное произведение выражается через базис $g_i g_j$:

$$ab = a^i b^j g_i g_j = T^{ij} g_i g_j , \tag{1.54}$$

где T^{ij} можно рассматривать как компоненты некоторого объекта T в базисе $g_i g_j$.

Потребуем, чтобы объект T был инвариантен относительно преобразования системы координат, т.е.

$$T = T^{ij} g_i g_j = T'^{mk} g'_m g'_k . \tag{1.55}$$

Подставляем в эту формулу выражение для нового базиса (1.53):

$$T^{ij} g_i g_j = a^{i\cdot}_{\cdot m} a^{j\cdot}_{\cdot k} T'^{mk} g_i g_j .$$

Домножив это выражение на $b^{q\cdot}_{\cdot j} b^{p\cdot}_{\cdot i}$, с учетом (1.43) получим:

$$T'^{mk} = b^{m\cdot}_{\cdot j} b^{k\cdot}_{\cdot i} T^{ij} . \tag{1.56}$$

Таким образом, для обеспечения инвариантности при замене системы координат компоненты объекта $\boldsymbol{T}$ должны преобразовываться по формуле (1.56).

Инвариантный объект $\boldsymbol{T}=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$ называется *тензором второго ранга* или второй валентности. Рангом или валентностью тензора называется число индексов его компонент. Очевидно, вектор есть тензор первого ранга.

Компоненты тензора T^{ij} преобразуются контравариантным образом и называются *контравариантными компонентами тензора.*

Как и в случае вектора $\boldsymbol{A}$, инвариантность тензора $\boldsymbol{T}$ обеспечивается взаимообратностью преобразований диадных произведений (1.53) и компонент тензора (1.56).

Вообще говоря, $T^{ij}\neq T^{ji}$. Если же

$$T^{ij}=T^{ji}, \tag{1.57}$$

то такой тензор называется симметричным. Тензор, для которого

$$T^{ij}=-T^{ji}, \tag{1.58}$$

называется антисимметричным.

Тензоры одинакового ранга можно складывать и умножать на число. Пользуясь правилами сложения и умножения тензоров на число, любому тензору второго ранга $\boldsymbol{T}=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$ можно поставить в соответствие симметричный тензор

$$T_0=\frac{1}{2}\left(T^{ij}+T^{ji}\right)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j \tag{1.59}$$

и антисимметричный тензор

$$T_1=\frac{1}{2}\left(T^{ij}-T^{ji}\right)\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j. \tag{1.60}$$

1.15. КОНТРАВАРИАНТНЫЙ БАЗИС С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В предыдущих разделах было введено понятие контравариантного базиса, заданного формулами (1.20), (1.26). Это понятие было

введено без объяснения названия. Проверим, выполняется ли правило контравариантности для этого базиса.

Из (1.26) следует, что

$$\boldsymbol{g}^k = \frac{\partial \zeta^k}{\partial x_j}\boldsymbol{i}_j, \quad k = 1,2,3;$$
$$\boldsymbol{g}'^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\boldsymbol{i}_j, \quad i = 1,2,3. \tag{1.61}$$

Из этих формул получаем:

$$\boldsymbol{g}'^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\boldsymbol{i}_j = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^k}\frac{\partial \zeta^k}{\partial x_j}\boldsymbol{i}_j = b^i_{\cdot k}\frac{\partial \zeta^k}{\partial x_j}\boldsymbol{i}_j = b^i_{\cdot k}\boldsymbol{g}^k, \quad i = 1,2,3. \tag{1.62}$$

Отсюда следует, что векторы базиса $\{\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3\}$, преобразующиеся с помощью обратной матрицы **B**, являются *контравариантными.*

1.16. МЕТРИЧЕСКИЙ ТЕНЗОР

В приведенных выше рассуждениях нигде не использовалось понятие длины. Для определения длины вектора достаточно определить скалярные произведения векторов базиса

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j, \quad g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j. \tag{1.63}$$

Нетрудно показать, что матрицы g_{ij} и g^{ij} являются взаимно обратными.

Кроме того, из формулы (1.62) следует, что

$$g'^{km} \equiv \boldsymbol{g}'^k \cdot \boldsymbol{g}'^m = \left(b^k_{\cdot i}\boldsymbol{g}^i\right)\cdot\left(b^m_{\cdot j}\boldsymbol{g}^j\right) = b^k_{\cdot i}b^m_{\cdot j}\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j = b^k_{\cdot i}b^m_{\cdot j}g^{ij}. \tag{1.64}$$

Сравнивая это выражение с формулой (1.56), получаем, что матрица g^{ij} состоит из контравариантных компонент некоторого тензора.

Назовем этот тензор *метрическим тензором* $\boldsymbol{g}$.

Из определений базисных векторов $\boldsymbol{g}_i$ (1.6) и $\boldsymbol{g}^j$ (1.26) следует, что

$$g_{ij} \equiv \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}\frac{\partial x_m}{\partial \zeta^i}\boldsymbol{i}_k \cdot \boldsymbol{i}_m = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}\frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}; \tag{1.65}$$

$$g^{ij} \equiv \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_m}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_k}\boldsymbol{i}_m \cdot \boldsymbol{i}_k = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_m}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_m}. \tag{1.66}$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} g_{ij}\boldsymbol{g}^j &= \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}\frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}\boldsymbol{g}^j = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}\left(\frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_m}\right)\boldsymbol{i}_m = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}\frac{\partial x_k}{\partial x_m}\boldsymbol{i}_m = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}\boldsymbol{i}_k = (\boldsymbol{g}_i)_k\,\boldsymbol{i}_k = \boldsymbol{g}_i. \end{aligned} \tag{1.67}$$

То есть ковариантные векторы базиса выражаются через контравариантные по формуле

$$\boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^j. \tag{1.68}$$

Домножим эту формулу на g^{ki}:

$$g^{ki}\boldsymbol{g}_i = g^{ki}g_{ij}\boldsymbol{g}^j = \delta^k_{\cdot j}\boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}^k. \tag{1.69}$$

Тогда

$$\boldsymbol{g}^k = g^{ki}\boldsymbol{g}_i. \tag{1.70}$$

Формулы (1.68) и (1.70) задают связь между ковариантным и контравариантным базисами.

Если использовать обозначения $\{x, y, z\}$ для координат относительно ортогональной декартовой системы координат, а для координат относительно любой произвольной системы координат – обозначения $\{\xi, \eta, \zeta\}$, то формулы для компонент метрического тензора (1.65) примут вид:

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2; \\ g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2; \\ g_{33} &= x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2; \\ g_{12} &= g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta + z_\xi z_\eta; \\ g_{23} &= g_{32} = x_\eta x_\zeta + y_\eta y_\zeta + z_\eta z_\zeta; \\ g_{31} &= g_{13} = x_\zeta x_\xi + y_\zeta y_\xi + z_\zeta z. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Условимся обозначать через $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ координаты относительно любой произвольной системы координат (в том числе и декартовой), а через $\{x_1, x_2, x_3\}$ или $\{x, y, z\}$ – координаты относительно ортогональной декартовой системы координат. Иногда для произвольной системы координат удобно использовать обозначения без индексов: $\{\xi, \eta, \zeta\}$.

1.17. ДЛИНА ВЕКТОРА

Для определения длины вектора используются компоненты метрического тензора.

Квадрат длины вектора $d\boldsymbol{r}$ по определению будет равен

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = d\zeta^i d\zeta^j \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = d\zeta^i d\zeta^j g_{ij}, \tag{1.72}$$

а квадрат длины любого вектора –

$$|\boldsymbol{A}|^2 = A^i A^j g_{ij}. \tag{1.73}$$

Условие инвариантности длины $d\boldsymbol{r}$ относительно выбора системы координат имеет вид:

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = g'_{km} d\eta^k d\eta^m = g_{ij} d\zeta^i d\zeta^j = g_{ij} a^{i\cdot}_{\cdot m} a^{j\cdot}_{\cdot k} d\eta^k d\eta^m. \tag{1.74}$$

1.18. ПРИМЕРЫ МЕТРИЧЕСКИХ ТЕНЗОРОВ

Рассмотрим конкретные примеры.

В декартовой системе координат матрица тензора $\boldsymbol{g}$ имеет вид:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.75}$$

Квадрат длины вектора $d\boldsymbol{r}$ задается формулой

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \tag{1.76}$$

В цилиндрической системе точка M задается координатами (r, θ, z) (рис. 1.4):

$$\xi = r, \quad \eta = \theta, \quad \zeta = z. \tag{1.77}$$

Преобразование координат от цилиндрических к декартовым осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = \xi\cos\eta; \\ y &= r\sin\theta = \xi\sin\eta; \\ z &= z = \zeta. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Используя формулы (1.71), получаем:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.79}$$

Обратная ей матрица контравариантных компонент тензора g имеет вид:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.80}$$

Аналогично можно получить основные соотношения для сферической системы координат (рис. 1.5), для которой:

$$\begin{aligned} x &= \rho\sin\varphi\cos\theta; \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z &= \rho\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.81}$$

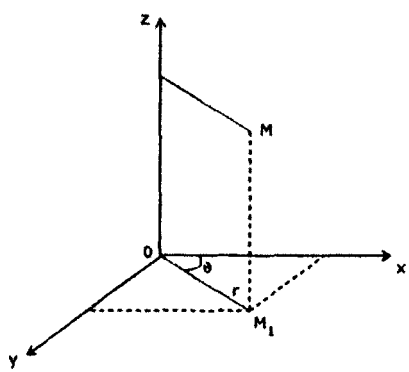

Рис. 1.4. Цилиндрическая система координат

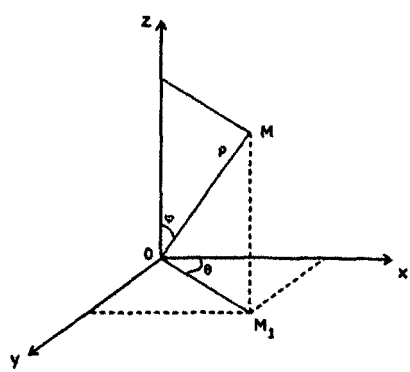

Рис. 1.5. Сферическая система координат

В этом случае

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}, \qquad (1.82)$$

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \end{pmatrix}.$$

1.19. КОВАРИАНТНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРА И ТЕНЗОРА

Используя формулы (1.68) и (1.70), введем ковариантные компоненты вектора и тензора:

$$A = A^i \boldsymbol{g}_i = A^i g_{ij} \boldsymbol{g}^j = A_j \boldsymbol{g}^j, \qquad (1.83)$$

где

$$A_j = A^i g_{ij}. \qquad (1.84)$$

Видно, что у контравариантных компонент A^j вектора $\boldsymbol{A}$, как и у контравариантных векторов базиса $\boldsymbol{g}^j$, индекс опускается с помощью ковариантных компонент тензора g_{ij}.

Следовательно, A_i преобразуются так же, как и $\boldsymbol{g}_j$, т.е. ковариантным образом:

$$A_j' = a^{i\cdot}_{\cdot j} A_i. \qquad (1.85)$$

A_j называются ковариантными компонентами вектора $\boldsymbol{A}$ в контравариантном базисе $\boldsymbol{g}^j$. Следовательно, для каждого вектора $\boldsymbol{A}$ можно ввести компоненты A^j, преобразующиеся с помощью матрицы **B**, называемые контравариантными компонентами, и компоненты A_j, преобразующиеся с помощью матрицы **A**, называемые ковариантными компонентами. В общем случае ковариантные и контравариантные компоненты вектора отличаются друг от друга, $A^j \neq A_j$.

Рассуждения, проведенные для вектора, можно применить к тензорам любого ранга:

$$T = T^{ij} g_i g_j = g_{ik} g_{jm} T^{ij} g^k g^m = T_{km} g^k g^m, \tag{1.86}$$

где

$$T_{km} = g_{ik} g_{jm} T^{ij}. \tag{1.87}$$

Аналогично

$$T = T^{i\cdot}_{\cdot j} g_i g^j. \tag{1.88}$$

Компоненты T_{ij} называются ковариантными, а $T^{i\cdot}_{\cdot j}$ – смешанными (ковариантными по индексу j и контравариантными по индексу i) компонентами тензора T. Формулы преобразования для смешанных компонент осуществляются так, что ковариантное преобразование идет по нижним индексам, а контравариантное – по верхним индексам.

Мы видим, что с помощью тензора g у компонент любого тензора можно опускать и поднимать индексы. Эта операция носит название операции жонглирования индексами. Например,

$$T = T_{ij} g^i g^j = T_{ij} g^{ik} g_k g^j = T^{k\cdot}_{\cdot j} g_k g^j, \tag{1.89}$$

т.е. вместо записи тензора T с помощью ковариантных компонент мы получили его выражение через смешанные компоненты. При этом

$$T^{k\cdot}_{\cdot j} = g^{ik} T_{ij}. \tag{1.90}$$

Ясно, что опускание индексов проводится с помощью g_{ij}, а поднятие – с помощью g^{ik}.

Заметим, что складывать и вычитать можно только компоненты тензоров с одинаковыми строениями индексов. Свойства симметрии и антисимметрии тензоров также определялись нами относительно одинаково расположенных индексов.

1.20. СКАЛЯРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ТЕНЗОРА

Компоненты тензора зависят от выбора системы координат, но можно отыскать такие функции $\Phi\left(T^{i\cdot}_{\cdot j}\right)$ от компонент тензора, кото-

рые будут инвариантными относительно выбора системы координат, т.е.

$$\Phi\left(T_{\cdot j}^{i\cdot}\right)=\Phi\left(T_{\cdot j}^{\prime i\cdot}\right). \tag{1.91}$$

Такие функции компонент тензора называются инвариантами тензора. Они являются числами или функциями точек пространства. Именно такие функции компонент тензоров и векторов должны, наряду с другими инвариантными объектами, входить в математическую запись физических законов, которая должна быть инвариантной относительно способов описания физического явления и, в частности, не должна зависеть от системы координат.

Укажем простые правила образования инвариантов вектора и тензора. Возьмем вектор

$$\boldsymbol{A}=A^j\boldsymbol{g}_j=A_i\boldsymbol{g}^i=A^j g_{ij}\boldsymbol{g}^i$$

и составим скалярное произведение

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^iA^j\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=A^i g_{ij}A^j=A^iA_i. \tag{1.92}$$

Полученное выражение является инвариантом (квадратом длины вектора $\boldsymbol{A}$), так как преобразования разноименных компонент вектора взаимно обратны. У вектора только один независимый инвариант – его длина, все остальные инварианты являются ее функциями.

Теперь возьмем любой тензор второго ранга

$$\boldsymbol{T}=T^{ij}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_j$$

и образуем свертку по обоим индексам с метрическим тензором $T^{ij}g_{ij}$ (сверткой называется операция суммирования по верхнему и нижнему индексам), которая даст число, не зависящее от системы координат, так как преобразования компонент с верхними и нижними индексами взаимно обратны. Можно записать

$$T^{ij}g_{ij}=T_{\cdot i}^{i\cdot}=T_{\cdot 1}^{1\cdot}+T_{\cdot 2}^{2\cdot}+T_{\cdot 3}^{3\cdot}. \tag{1.93}$$

Можно сделать двойную свертку

$$T^{ik}g_{jk}T^{jm}g_{im}=T_{\cdot j}^{i\cdot}T_{\cdot i}^{j\cdot} \tag{1.94}$$

и тройную

$$T^{i\cdot}_{\cdot j}T^{j\cdot}_{\cdot k}T^{k\cdot}_{\cdot i}, \qquad (1.95)$$

которые тоже будут инвариантами. Для тензора второго ранга мы получили три инварианта: линейный, квадратичный и кубичный относительно компонент. Можно показать, что в случае симметричного тензора второго ранга, особенно важного для приложений, все остальные скалярные инварианты будут функциями этих трех.

1.21. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Зададимся вопросом, как определить производные от вектора. Можно ли считать, что для вектора $w = w^k g_k$ соотношение

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} g_k \qquad (1.96)$$

справедливо?

Оказывается, что, вообще говоря, это не так. Дело в том, что обычные производные от компонент вектора не определяют изменения самого вектора, так как при переходе от одной точки к другой изменяются и векторы базиса.

В самом деле, возьмем, например, полярную систему координат на плоскости и рассмотрим поле постоянного как по величине, так и по направлению во всех точках плоскости вектора A. Вектор A при переходе от точки к точке плоскости не меняется, и его производная, очевидно, должна равняться нулю. Координатами ζ^1 и ζ^2 будут радиус r и угол φ. Векторы базиса будут направлены следующим образом: g_1 — по лучам, выходящим из начала координат, а g_2 — по касательным к окружностям $r = \text{const}$. В разных точках плоскости g_1 и g_2 будут направлены по-разному, и проекции постоянного вектора A на направления g_1 и g_2 в разных точках плоскости будут разными (см., например, точки B и C на рис. 1.6),

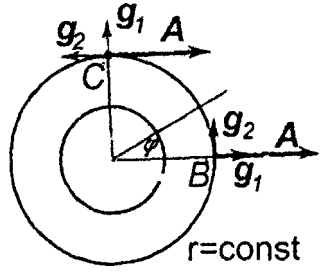

Рис. 1.6. Полярная система координат на плоскости

т.е. производные от компонент постоянного вектора не будут равны нулю. Таким образом, равенство (1.96) не выполняется.

На самом деле это равенство (1.96) выполняется только для декартовой системы координат, так как для нее базисные векторы $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{k}$ не изменяются от точки к точке.

В произвольной криволинейной системе координат $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ векторы базиса $\boldsymbol{g}_k$ переменны, и поэтому

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial \left(w^k \boldsymbol{g}_k \right)}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} \boldsymbol{g}_k + w^k \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \zeta^i}. \qquad (1.97)$$

Производная вектора базиса $\dfrac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \zeta^i}$ представляет собой вектор, характеризующий свойства криволинейной системы координат. Из формулы (1.6) следует:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^k} \right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^i \partial \zeta^k} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \zeta^k}. \qquad (1.98)$$

Этот вектор можно разложить по тому же базису:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \zeta^i} = [ki, j] \boldsymbol{g}^j = \Gamma^j_{ki} \boldsymbol{g}_j. \qquad (1.99)$$

Компоненты разложения $[ki, j]$ и Γ^j_{ki} называются *символами Кристоффеля 1-го и 2-го рода.*

Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} \boldsymbol{g}_k + w^k \Gamma^j_{ki} \boldsymbol{g}_j. \qquad (1.100)$$

Во втором члене этой формулы проводится двойное суммирование по индексам j и k. Меняем их местами и получаем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} \boldsymbol{g}_k + w^j \Gamma^k_{ji} \boldsymbol{g}_k = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} + w^j \Gamma^k_{ji} \right) \boldsymbol{g}_k. \qquad (1.101)$$

Коэффициенты при $\boldsymbol{g}_k$ в этой формуле, зависящие от двух индексов, называются *ковариантными производными контрава-*

риантных компонент вектора $\boldsymbol{w}$ и имеют специальное обозначение:

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} + w^j \Gamma^k_{ji}. \tag{1.102}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \nabla_i w^k \boldsymbol{g}_k. \tag{1.103}$$

1.22. СВОЙСТВА КОВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Можно легко доказать следующие полезные свойства.

1. В декартовой системе координат $\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \zeta^j} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial x_j} = 0$, $\Gamma^k_{ji} = 0$ и ковариантная производная совпадает с обычной:

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial x_i}. \tag{1.104}$$

2. Ковариантные производные образуют компоненты тензора. Инвариантный объект

$$\boldsymbol{T} = \nabla_i w^k \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^i \tag{1.105}$$

является тензором, смешанные компоненты которого являются ковариантными производными.

3. Можно ввести ковариантные производные контравариантных компонент тензора $\boldsymbol{H}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \zeta^i} &= \frac{\partial \left(H^{kj} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j \right)}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j + H^{kj} \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \zeta^i} \boldsymbol{g}_j + H^{kj} \boldsymbol{g}_k \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial \zeta^i} = \\
&= \frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j + H^{kj} \Gamma^m_{ki} \boldsymbol{g}_m \boldsymbol{g}_j + H^{kj} \boldsymbol{g}_k \Gamma^m_{ji} \boldsymbol{g}_m = \\
&= \frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j + H^{mj} \Gamma^k_{mi} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j + H^{km} \Gamma^j_{mi} \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j = \\
&= \left(\frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} + H^{mj} \Gamma^k_{mi} + H^{km} \Gamma^j_{mi} \right) \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}_j.
\end{aligned} \tag{1.106}$$

Величина

$$\nabla_i H^{kj} = \frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} + H^{mj}\Gamma^k_{mi} + H^{km}\Gamma^j_{mi} \qquad (1.107)$$

называется ковариантной производной контравариантных компонент тензора второго ранга $\boldsymbol{H}$.

4. Сумма ковариантных производных определяется формулой

$$\nabla_i\left(u^k + v^k\right) = \nabla_i u^k + \nabla_i v^k. \qquad (1.108)$$

5. Произведение равно

$$\nabla_i\left(u^k v^k\right) = \left(\nabla_i u^k\right)\cdot v^k + u^k \nabla_i v^k. \qquad (1.109)$$

6. Ковариантная производная от ковариантных компонент вектора равна

$$\nabla_i w_k = \frac{\partial w_k}{\partial \zeta^i} - w_j \Gamma^j_{ki}. \qquad (1.110)$$

7. Заметим, что $\nabla_i w_k$ являются ковариантными, а $\nabla_i w^k$ – смешанными компонентами одного и того же тензора

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i}\boldsymbol{g}^i = \nabla_i w_k \boldsymbol{g}^k \boldsymbol{g}^i = \nabla_i w^k \boldsymbol{g}_k \boldsymbol{g}^i. \qquad (1.111)$$

Между этими компонентами тензора существует связь:

$$\nabla_i w^k = g^{kj}\nabla_i w_j. \qquad (1.112)$$

С другой стороны, для компонент вектора справедливо

$$w^k = g^{kj} w_j. \qquad (1.113)$$

Отсюда следует, что

$$\nabla_i\left(g^{kj} w_j\right) = g^{kj}\nabla_i w_j. \qquad (1.114)$$

То есть компоненты метрического тензора g^{ij} и g_{ij}, несмотря на то, что они зависят от $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$, ведут себя по отношению к ковариантному дифференцированию как постоянные величины. Иначе говоря, не меняя результата, их можно вносить и выносить за знак ∇_i, т.е. $\nabla_i g^{jk} = 0$. Аналогично,

$$\nabla_i g_{jk} = 0. \qquad (1.115)$$

1.23. СВОЙСТВА СИМВОЛОВ КРИСТОФФЕЛЯ

1. Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma_{ki}^{j} = \Gamma_{ik}^{j}. \tag{1.116}$$

Это следует непосредственно из формулы (1.98).

2. Домножив скалярно выражения (1.99) на соответствующие базисные векторы, получим следующие формулы:

$$\Gamma_{ki}^{j} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \zeta^i} \cdot \boldsymbol{g}^j, \quad [ki,j] = \frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial \zeta^i} \cdot \boldsymbol{g}_j. \tag{1.117}$$

3. Без доказательства приведем еще одну полезную формулу:

$$\Gamma_{ij}^{i} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial \zeta^j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \zeta^j}, \tag{1.118}$$

где g – определитель матрицы g_{ij}.

Подробное описание других полезных свойств символов Кристоффеля можно посмотреть по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/1_23.pdf

1.24. ДИВЕРГЕНЦИЯ. ГРАДИЕНТ. ТЕНЗОР СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО–ГАУССА

В разделе 1.10 данной главы уже были введены понятия этих векторных функций для декартовой системы координат. Сделаем то же самое в произвольной системе координат.

1. Дивергенция. Введем понятие дивергенции вектора скорости $\boldsymbol{v}$, контравариантные компоненты которого равны v^1, v^2, v^3. По определению, инвариантная величина

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla_i v^i \tag{1.119}$$

называется дивергенцией вектора скорости.

В декартовой системе координат, в которой компоненты скорости равны u, v, w, имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{1.120}$$

В цилиндрической системе координат дивергенция скорости выражается через физические компоненты следующим образом:

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(v^i \sqrt{g}\right)}{\partial \eta^i} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(v^r r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(v^\theta r\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(v^z r\right)}{\partial z}\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(u^r r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(u^\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial\left(u^z r\right)}{\partial z}\right] = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.121)$$

Для сферической системы координат

$$\nabla_i v^i = \frac{\partial u^r}{\partial r} + 2\frac{u^r}{r} + \frac{\cos(\varphi)}{r\sin(\varphi)} u^\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial u^\theta}{\partial \theta}. \quad (1.122)$$

2. Градиент. Из определения ковариантной производной следует, что ковариантные производные от скалярной величины φ совпадают с обычными производными

$$\nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta^i} \quad (1.123)$$

и определяют вектор, который является вектором-градиентом скалярного поля φ. Компоненты $\nabla_i \varphi$ являются ковариантными, т.е. градиент определяется формулой

$$\nabla \varphi = \boldsymbol{g}^i \nabla_i \varphi. \quad (1.124)$$

Для получения контравариантных компонент этого вектора используем жонглирование индексами:

$$\nabla \varphi = \nabla_i \varphi \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{g}^i \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta^i} = g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta^i} \boldsymbol{g}_j = (\nabla \varphi)^j \boldsymbol{g}_j, \quad (1.125)$$

где $(\nabla \varphi)^j = g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta^i}$.

Используя формулу (1.121), определяем *лапласиан (оператор Лапласа)* скалярной функции φ:

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j}\left[(\nabla \varphi)^j \sqrt{g}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \zeta^j}\left[\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta^i}\right]. \quad (1.126)$$

*3. **Тензор скоростей деформаций.*** Симметричный тензор

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) \tag{1.127}$$

называется тензором скоростей деформаций. Если поле скоростей v известно, то компоненты e_{ij} можно вычислить по формуле (1.127).

Тензор скоростей деформаций обладает следующим свойством: для него существуют так называемые главные оси. В этой системе он содержит только диагональные члены. Деформация объёма среды сводится лишь к растяжению вдоль главных осей. Например, объём жидкости, имевший первоначально сферическую форму, с течением времени будет деформироваться в эллипсоид.

*4. **Теорема Гаусса–Остроградского*** и некоторые связанные с ней свойства. Поток векторного поля A через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции этого поля по объёму V, замкнутому под поверхностью:

$$\iint_S A \cdot n ds = \iiint_V div\, A dV. \tag{1.128}$$

Под интегралами в формуле Гаусса–Остроградского как справа, так и слева стоят инвариантные, не зависящие от выбора системы координат величины. Если они известны в декартовой системе координат, то их легко вычислить в любой другой системе координат. А именно, пусть в любой системе $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$

$$A = A^k g_k, \quad n = n_j g^j, \tag{1.129}$$

тогда

$$A \cdot n = A^k n_j g_k \cdot g^j = A^k n_k \tag{1.130}$$

и

$$\operatorname{div} A = \nabla_i A^i. \tag{1.131}$$

Теперь теорему Гаусса–Остроградского можно написать в следующем виде:

$$\iint_S A^k n_k ds = \iiint_V \nabla_i A^i dV, \tag{1.132}$$

который справедлив в произвольной криволинейной системе координат. Заметим, что число измерений пространства при выводе теоремы Гаусса–Остроградского может быть произвольным. В механике и в физике эта теорема часто применяется для двумерных, трехмерных и четырехмерных областей.

Кроме того, так как в декартовой системе координат любые три величины P, Q, R можно трактовать как компоненты вектора, теорему Гаусса–Остроградского можно написать для любых трех непрерывных и дифференцируемых функций P, Q, R от x,y,z, а именно:

$$\iint\limits_S \left[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)+R\cos(n,z)\right]ds = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV. \quad (1.133)$$

5. Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему. Пусть имеется произвольная функция $f(x,y,z,t)$, зависящая от координат точек пространства и от времени t. Рассмотрим интеграл

$$\iiint\limits_V f(x,y,z,t)dV$$

по подвижному объему V. Определим производную по времени от этого интеграла. При этом учитываем тот факт, что от времени t зависит не только подынтегральная функция, но и область интегрирования V.

Можно получить следующую формулу:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_V f(x,y,z,t)dV = \iiint\limits_V \left[\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla_i\left(fv^i\right)\right]dV. \quad (1.134)$$

Подынтегральное выражение можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla_i\left(fv^i\right)=\frac{\partial f}{\partial t}+v^i\nabla_i f+f\nabla_i v^i=\frac{df}{dt}+f\nabla_i v^i, \quad (1.135)$$

где

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+v^i\nabla_i f \quad (1.136)$$

– полная производная величины f в произвольной системе координат.

Отсюда получается еще одна формула для рассматриваемой производной

$$\frac{d}{dt}\iiint_V f(x,y,z,t)dV = \iiint_V \left[\frac{df}{dt} + f\nabla_i v^i\right]dV, \qquad (1.137)$$

где ρ – плотность.

Более подробная информация по данному вопросу содержится на сайте по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/1_24.pdf

1.25. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Одним из основных законов ньютоновской механики является закон сохранения массы m любого индивидуального объема, состоящего из одних и тех же частиц среды. Масса такого объема определяется по формуле

$$m = \iiint_V \rho dV, \qquad (1.138)$$

где ρ – плотность.

Закон сохранения массы для индивидуального объема сплошной среды можно, очевидно, теперь записать в виде

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = 0. \qquad (1.139)$$

Применим формулу (1.134) из предыдущего раздела к (1.139):

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i\left(\rho v^i\right)\right]dV = 0. \qquad (1.140)$$

В силу произвольности выбора объема V из (1.140) следует:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i\left(\rho v^i\right) = 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho v^i\right)}{\partial \eta^i} + \rho v^j \Gamma^i_{ji} = 0.\end{gathered} \qquad (1.141)$$

Это и есть уравнение неразрывности.

1.26. УРАВНЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

В проекции на ковариантный базис уравнение количества движения представляется в виде:

$$\rho\frac{\partial v^k}{\partial t}+\rho v^i\nabla_i v^k=\rho F^k+\nabla_i p^{ki}, \tag{1.142}$$

где p^{ki} – *тензор внутренних напряжений;* F^k – *массовая сила.* Подробный вывод этого уравнения содержится по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/1_26.pdf

Если домножить уравнение неразрывности (1.141) на v^k,

$$v^k\frac{\partial\rho}{\partial t}+v^k\nabla_i\left(\rho v^i\right)=0, \tag{1.143}$$

и сложить его с (1.142), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right)+\nabla_i\left(\rho v^i v^k\right)=\rho F^k+\nabla_i p^{ki} \tag{1.144}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right)+\nabla_i\left(\rho v^i v^k-p^{ki}\right)=\rho F^k. \tag{1.145}$$

Такая форма уравнения количества движения называется консервативной.

Без использования символа ∇ те же операции приводят к виду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\left(\rho v^k\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v^i v^k\right)}{\partial\zeta^i}+\rho v^i v^j\Gamma^k_{ji}+\rho v^j v^k\Gamma^i_{ji}=\\&=\rho F^k+\left(\frac{\partial p^{ki}}{\partial\zeta^i}+p^{ji}\Gamma^k_{ji}+p^{kj}\Gamma^i_{ji}\right).\end{aligned} \tag{1.146}$$

Можно показать, что тензор напряжений симметричен, т.е. $p^{ki}=p^{ik}$. Это обстоятельство дает возможность записать уравнение количества движения в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)+\nabla\cdot(\rho vv-P)=\rho F, \tag{1.147}$$

где P – тензор внутренних напряжения, а $vv=v\otimes v$ – диадное произведение векторов скорости.

1.27. ПОНЯТИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Понятие идеального газа, казалось бы, достаточно тривиально. Однако не все так уж просто. Дело в том, что существует некоторое расхождение в определении этого понятия у различных авторов.

Л.И. Седов в книге «Механика сплошной среды» [2] определяет идеальный газ как «среду, в которой вектор напряжения p_n на любой площадке с нормалью n ортогонален площадке». В результате получаются следующие формулы для ковариантных и контравариантных компонент тензора напряжений:

$$p^{ki} = -pg^{ki}, \quad p_{ki} = -pg_{ki}, \tag{1.148}$$

где p – давление.

Нетрудно видеть, что в этом случае тензор внутренних напряжений не зависит от вязкого трения.

С другой стороны, известно выражение, впервые полученное Максвеллом, по которому *вязкость идеального газа* определяется по формуле

$$\mu = \frac{1}{3}\rho\bar{v}L, \tag{1.149}$$

где ρ – плотность газа; $\bar{v}$ – средняя скорость теплового движения молекул; L – средняя длина свободного пробега молекул.

Из этого выражения видно, что коэффициент вязкости не зависит от давления, так как произведение ρL не зависит от давления.

Определение Седова противоречит и понятиям, введенным в ANSYS CFX, где рабочее тело «AIR as IDEAL GAS» (воздух как идеальный газ) обладает вязкостью.

Поэтому в дальнейшем нам удобнее использовать несколько отличное от данного Л.И. Седовым определение идеального газа.

Идеальный газ – математическая модель газа, в которой предполагается, что потенциальной энергией молекул можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией. Между молекулами не действуют силы притяжения или отталкивания, соударения частиц между собой и со стенками сосуда абсолютно упруги, а время взаимодействия между молекулами пренебрежимо мало по сравнению со средним временем между столкновениями.

В молекулярно-кинетической теории устанавливается следующее соотношение между средней кинетической энергией ε поступательного движения молекул и абсолютной температурой T:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT, \tag{1.150}$$

где k – постоянная Больцмана.

Внутренняя энергия одного моля идеального газа равна произведению ε на число Авогадро N_A:

$$U = \frac{3}{2}kN_AT = \frac{3}{2}R_\mu T, \tag{1.151}$$

где R_μ – универсальная газовая постоянная.

При изменении температуры на ΔT внутренняя энергия изменяется на величину

$$\Delta U = \frac{3}{2}R_\mu \Delta T = C_{V\mu}\Delta T. \tag{1.152}$$

Коэффициент пропорциональности между ΔU и ΔT равен мольной теплоемкости $C_{V\mu} = \frac{3}{2}R_\mu$ при постоянном объеме.

Это соотношение хорошо подтверждается в экспериментах с газами, состоящими из одноатомных молекул (гелий, неон, аргон). Однако для двухатомных (водород, азот) и многоатомных (углекислый газ) газов это соотношение не согласуется с экспериментальными данными. Причина такого расхождения состоит в том, что для двух- и многоатомных молекул средняя кинетическая энергия должна включать энергию не только поступательного, но и вращательного движения молекул.

В общем случае верна формула

$$C_{V\mu} = \frac{i}{2}R_\mu, \tag{1.153}$$

где i – степень свободы молекулы. Одноатомная молекула имеет 3 поступательные степени свободы, «жесткая» двухатомная молекула имеет 5 степеней (3 поступательные и 2 вращательные), а многоатомная молекула – 6 степеней свободы (3 поступательные и 3 вращательные).

Соответственно мольная теплоемкость при постоянном давлении и показатель адиабаты равны

$$C_{P\mu} = C_{V\mu} + R_\mu = \frac{i+2}{2} R_\mu; \tag{1.154}$$

$$\gamma = \frac{C_{P\mu}}{C_{V\mu}} = \frac{i+2}{i}. \tag{1.155}$$

Для идеального газа можно записать уравнение состояния

$$p = \rho RT, \tag{1.156}$$

где $R = \dfrac{R_\mu}{M}$ – газовая постоянная; M – молекулярная масса газа.

1.28. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ НЕВЯЗКОГО ГАЗА

В случае невязкого газа полагается, что ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений выражаются через один параметр – давление p:

$$p^{ki} = -pg^{ki}; \quad p_{ki} = -pg_{ki}. \tag{1.157}$$

В этом случае уравнение количества движения (1.145) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right) + \nabla_i\left(\rho v^i v^k\right) = \rho F^k - g^{ki}\nabla_i(p) \tag{1.158}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right) + \nabla_i\left(\rho v^i v^k + g^{ki} p\right) = \rho F^k. \tag{1.159}$$

1.29. ЛИНЕЙНАЯ ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

Вязкой жидкостью называется среда, в которой компоненты тензора напряжений представляются в виде

$$p^{ki} = -pg^{ki} + \tau^{ki}, \tag{1.160}$$

где $p = p(\rho, T, \ldots)$ – давление, а $\tau^{ki} = \varphi^{ki}\left(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, \ldots\right)$ – тензор вязких напряжений; $e_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора скоростей деформации, заданного формулой (1.127):

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha\right). \tag{1.161}$$

Чаще всего для тензора вязких напряжений используется линейная зависимость от тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\tau^{ki} &= 2\mu g^{k\alpha} g^{i\beta} e_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\mu\, g^{ki}\,\mathrm{div}\, v = \\ &= \mu g^{k\alpha} g^{i\beta}\left(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha\right) - \frac{2}{3}\mu\, g^{ki}\,\mathrm{div}\, v.\end{aligned} \tag{1.162}$$

Второй член в правой части этой формулы добавлен для того, чтобы скалярные инварианты тензоров слева и справа совпадали.

Уравнение количества движения для вязкой линейной жидкости имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right) + \nabla_i\left(\rho v^i v^k + g^{ki} p\right) = \rho F^k + \nabla_i \tau^{ik}. \tag{1.163}$$

В случае идеального газа используется уравнение состояния в форме (1.156).

1.30. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Уни рсальное соотношение, выражающее собой закон сохранения энергии и следующее из первого начала термодинамики, можно представить в виде

$$dE_{кин} + dU = dA + dQ, \tag{1.164}$$

где dU – изменение внутренней энергии рассматриваемого тела; $dE_{кин}$ – изменение его кинетической энергии; dA – элементарная работа внешних макроскопических сил; dQ – элементарный приток тепла к телу извне.

Можно обобщить это уравнение на случай движения конечного объема V сплошной среды, ограниченного поверхностью Σ.

Полная энергия произвольного конечного объема V определяется следующим интегралом:

$$\int_V \rho\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right) dV. \tag{1.165}$$

Обозначим:

$$E=\frac{1}{2}v^2+U=\frac{1}{2}v_k v^k+U. \qquad (1.166)$$

С учетом того, что масса M выбранного объема не меняется, получаем, что изменение полной энергии в единицу времени, т.е. ее производная по времени, равно

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho E dV=\frac{d}{dt}\int_M E dm=\int_M \frac{dE}{dt}dm=\int_V \rho\frac{dE}{dt}dV. \qquad (1.167)$$

Работа сил внутренних напряжений при перемещении границы выбранного объема на элементарное расстояние dr равна $p_n \cdot dr = p_n \cdot v dt$, а в единицу времени — $p_n \cdot v$.

Для этой работы можно получить формулу

$$\begin{aligned} p_n \cdot v &= \left[p^{ki} g_k (g_i \cdot n)\right]\cdot\left(v_j g^j\right)=p^{ki}v_j(g_i\cdot n)g_k\cdot g^j= \\ &= p^{ki}v_j(g_i\cdot n)g^j_k=v_k p^{ki}n_i. \end{aligned} \qquad (1.168)$$

Нас интересует работа по внешней поверхности Σ объема V, т.е.

$$\int_\Sigma p_n \cdot v d\sigma=\int_\Sigma v_k p^{ki} n_i d\sigma=\int_\Sigma A^i n_i d\sigma, \qquad (1.169)$$

где $A^i = v_k p^{ki}$.

По теореме Гаусса—Остроградского:

$$\int_\Sigma A^i n_i d\sigma=\int_V \nabla_i A^i dV=\int_V \nabla_i\left(v_k p^{ki}\right)dV=\int_V \operatorname{div}(v\cdot P)dV. \qquad (1.170)$$

Работа внешних массовых сил при перемещении на элементарное расстояние dr равна $\rho F \cdot dr = \rho F \cdot v dt$, а в единицу времени — $\rho F \cdot v$. Для всего объема V получаем:

$$\int_V \rho F \cdot v dV=\int_V \rho F^k v_k dV. \qquad (1.171)$$

И наконец, приток тепла к объему V извне равен

$$-\int_\Sigma q\cdot n d\sigma=-\int_V \operatorname{div} q dV=-\int_V \nabla_i q^i dV. \qquad (1.172)$$

Знак «минус» обусловлен тем, что вектор нормали направлен от поверхности тела, а нас интересует приток тепла, а не отток.

Таким образом, закон сохранения энергии для конечного объема V сплошной среды имеет вид

$$\int_V \rho \frac{dE}{dt} dV = \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{P}) dV + \int_V \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dV - \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{q} dV. \qquad (1.173)$$

В силу произвольности выбора объема V

$$\rho \frac{dE}{dt} = \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{P}) + \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} - \operatorname{div} \boldsymbol{q}. \qquad (1.174)$$

В индексной записи уравнение сохранения энергии имеет вид

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \nabla_i \left(v^i E \right) = \nabla_i \left(v_k p^{ki} \right) + \rho F^k v_k - \nabla_i q^i. \qquad (1.175)$$

Домножим уравнение неразрывности (1.141) на E:

$$E \frac{\partial \rho}{\partial t} + E \nabla_i \left(\rho v^i \right) = 0, \qquad (1.176)$$

сложим его с (1.175) и получим уравнение энергии в консервативной форме:

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i E \right) = \nabla_i \left(v_k p^{ki} \right) + \rho F^k v_k - \nabla_i q^i. \qquad (1.177)$$

Для вязкой жидкости имеем

$$p^{ki} = -p g^{ki} + \tau^{ki}, \qquad (1.178)$$

откуда

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla_i \left[\rho v^i \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \nabla_i \left(v_k \tau^{ki} \right) + \rho F^k v_k - \nabla_i q^i \qquad (1.179)$$

или

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho v^i \nabla_i E = \nabla_i \left(v_k \tau^{ki} \right) - \nabla_i \left(v^i p \right) + \rho F^k v_k - \nabla_i q^i. \qquad (1.180)$$

Для теплового потока в идеальном газе справедлива формула Фурье:

$$\boldsymbol{q} = -\lambda \cdot \operatorname{grad}(T) \qquad (1.181)$$

или

$$q^i = -\lambda g^{ij} \nabla_j T . \qquad (1.182)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, который, так же как и коэффициент динамической вязкости μ, зависит только от температуры идеального газа.

Можно ввести понятия полной энтальпии газа H и удельной энтальпии h:

$$H = E + \frac{p}{\rho}; \qquad (1.183)$$

$$h = U + \frac{p}{\rho} = H - \frac{1}{2} v_k v^k = E - \frac{1}{2} v_k v^k + \frac{p}{\rho}. \qquad (1.184)$$

Нетрудно получить различные формы уравнения энергии, записанные для этих величин:

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} + \rho v^i \nabla_i H = \rho F^k v_k + \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla_i \left(q^i - v_k \tau^{ki} \right); \qquad (1.185)$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v^i \nabla_i h = \frac{dp}{dt} - \nabla_i q^i + \tau^{ki} \nabla_i v_k, \qquad (1.186)$$

где

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v^i \nabla_i p. \qquad (1.187)$$

1.31. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Как уже указывалось, в декартовой системе координат нет различия между ковариантными и контравариантными компонентами вектора и тензора, а метрический тензор записывается в виде единичной матрицы.

В этом случае основные уравнения динамики вязкой жидкости имеют следующий вид.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0. \qquad (1.188)$$

Уравнение количества движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j+\delta_{ij}p-\tau_{ji})=\rho F_j,\quad j=1,2,3. \qquad (1.189)$$

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho u_i\left(E+\frac{p}{\rho}\right)-u_j\tau_{ji}+q_i\right]=\rho F_j u_j. \qquad (1.190)$$

Напомним обозначения в этих уравнениях: ρ – плотность; u_i – компоненты вектора скорости; p – давление; E – полная внутренняя энергия; F – плотность массовой силы.

В случае линейной вязкой жидкости эти уравнения дополняются выражениями для компонент тензора вязких напряжений τ_{ij} и вектора плотности теплового потока q_i:

$$\tau_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m}{\partial x_m}; \qquad (1.191)$$

$$q_i=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}, \qquad (1.192)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости; λ – коэффициент теплопроводности.

Удельная внутренняя энергия e связана с полной E соотношением

$$e=E-\frac{u_i u_i}{2}. \qquad (1.193)$$

Для идеального газа справедливо:

$$p=\rho RT=(\gamma-1)C_V T\rho=(\gamma-1)e\rho. \qquad (1.194)$$

Здесь T – температура; γ – показатель адиабаты; C_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Полная энтальпия H и удельная энтальпия вводятся по формулам:

$$H=E+\frac{p}{\rho};\quad h=H-\frac{u_i^2}{2}. \qquad (1.195)$$

Иногда удобнее использовать уравнение энергии в форме энтальпии. Оно получается из уравнения (1.190) с учетом (1.195), а также уравнения количества движения (1.189):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j h\right)=\frac{dp}{dt}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \qquad (1.196)$$

1.32. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В цилиндрической системе точка M задается координатами (r,θ,z):

$$\zeta^1=r,\quad \zeta^2=\theta,\quad \zeta^3=z. \qquad (1.197)$$

Компоненты метрического тензора равны

$$g_{11}=1, g_{22}=r^2, g_{33}=1,\quad g^{11}=1, g^{22}=\frac{1}{r^2}, g^{33}=1. \qquad (1.198)$$

Ненулевые символы Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^1_{22}=-r. \qquad (1.199)$$

А основные уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z)+\frac{\rho u_r}{r}=0, \qquad (1.200)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_r)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_r+p-\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta u_r-\tau_{r\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_r-\tau_{zr})+$$
$$+\frac{1}{r}(\rho u_r u_r-\rho u_\theta u_\theta-\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta})=\rho F_r; \qquad (1.201)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\theta)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_\theta-\tau_{r\theta})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta u_\theta+p-\tau_{\theta\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_\theta-\tau_{z\theta})+$$
$$+\frac{2}{r}(\rho u_r u_\theta-\tau_{r\theta})=\rho F_\theta; \qquad (1.202)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_z)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_z-\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta u_z-\tau_{\theta z})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_z+p-\tau_{zz})+$$

$$+\frac{1}{r}(\rho u_r u_z-\tau_{rz})=\rho F_z. \qquad (1.203)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial f_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial f_z}{\partial z}+\frac{f_r}{r}=\rho\left(F_r u_r+F_\theta u_\theta+F_z u_z\right). \qquad (1.204)$$

Вывод этих формул, а также выражения для компонент тензоров вязких напряжений и теплового потока можно найти по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/1_32.pdf

Глава 2

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

2.1. ОБОБЩЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Основные уравнения, описывающие динамику вязкой жидкости, подчиняются некоему обобщенному закону сохранения.

Уравнение энергии в декартовой системе координат имеет вид (см. главу 1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j h\right)=\frac{dp}{dt}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{2.1}$$

С учетом представления плотности теплового потока в виде закона Фурье,

$$q_i=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{2.2}$$

используя понятия дивергенции и градиента, а также то, что

$$\operatorname{grad} h=C_p\operatorname{grad} T, \tag{2.3}$$

уравнение энергии можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\operatorname{div}(\rho v h)=\operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{C_P}\operatorname{grad} h\right)+S_h, \tag{2.4}$$

где S_h – член, учитывающий работу сил внутренних напряжений:

$$S_h=\frac{dp}{dt}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{2.5}$$

Аналогично поступаем с уравнением количества движения в проекции, например, на продольную ось $x=x_1$. Проекция скорости на эту ось обозначается как $u=u_1$.

Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{il})+\rho F_l, \qquad (2.6)$$

а компоненты тензора вязких напряжений определяются как

$$\tau_{il}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{il}\mu\,\mathrm{div}\,v=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\delta_{il}\mu\,\mathrm{div}\,v. \qquad (2.7)$$

Подставляя последнее выражение в (2.6), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\mathrm{div}(\rho v u)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\delta_{il}\mu\,\mathrm{div}\,v\right)+ \qquad (2.8)$$
$$+\rho F_l-\frac{\partial p}{\partial x}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\mathrm{div}(\rho v u)=\mathrm{div}(\mu\,\mathrm{grad}\,u)+S_u, \qquad (2.9)$$

где S_u – член, учитывающий градиент давления, объемные силы и дополнительные вязкие силы

$$S_u=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\delta_{il}\mu\mathrm{div}\,v\right)+\rho F_l-\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (2.10)$$

Таким образом, все уравнения динамики вязкой жидкости можно записать в обобщенном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)+\mathrm{div}(\rho v\Phi)=\mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\Phi)+S, \qquad (2.11)$$

где Γ – коэффициент, учитывающий переносные свойства (вязкость, теплопроводность, диффузию); S – источниковый член. Конкретный вид Γ и S зависит от смысла переменной Φ, табл 2.1.

В обобщенное дифференциальное уравнение входят четыре члена: нестационарный, конвективный, диффузионный и источниковый.

Такая форма записи основных уравнений называется консервативной. Если уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho v)=0 \qquad (2.12)$$

домножить на Ф и вычесть результат из уравнения (2.11), то получится обобщенное уравнение в неконсервативной форме

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\rho v\bullet\operatorname{grad}\Phi=\operatorname{div}(\Gamma\operatorname{grad}\Phi)+S. \qquad (2.13)$$

Задача, в которой физические величины зависят только от одной пространственной координаты, называется одномерной. Зависимость от двух пространственных координат приводит к двумерной задаче, а от трех – к трехмерной. Если задача не включает в себя зависимость от времени, она называется стационарной. В противном случае она называется нестационарной.

В двумерном случае уравнение (2.13) имеет вид

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\rho u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+S. \qquad (2.14)$$

Анализируя это уравнение, можно получить несколько предельных случаев.

1. Если конвективные и диффузионные члены равны нулю, получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{S}{\rho}. \qquad (2.15)$$

2. Если конвективные и источниковые члены равны нулю, получается уравнение параболического типа

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right). \qquad (2.16)$$

Таблица 2.1

Уравнение	Ф	Г	S
Уравнение неразрывности	1	0	0
Уравнение количества движения в проекции на ось x	u	μ	Формула (2.10)
Уравнение энергии	h	$\frac{\lambda}{C_P}$	Формула (2.5)

3. Если диффузионные и источниковые члены равны нулю, получается уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u\frac{\partial \Phi}{\partial x}+v\frac{\partial \Phi}{\partial y}=0. \qquad (2.17)$$

4. В стационарном случае, при отсутствии конвективных и источниковых членов, обобщенное уравнение является эллиптическим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)=0. \qquad (2.18)$$

5. В стационарном случае при использовании приближений пограничного слоя уравнение (2.14) принимает вид

$$\rho u\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial \Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right). \qquad (2.19)$$

В такой форме это уравнение также приводится к параболическому типу с точки зрения продольной координаты.

В каждом из этих пяти случаев применяются разные численные методы решения. Отличаются и граничные условия.

В различных областях реальных течений в различные моменты времени определяющую роль могут играть разные члены обобщенного уравнения (2.11). Еще в большей степени это утверждение относится ко всей системе уравнений динамики вязкого газа.

Поэтому выбор метода численной интерпретации лучше использовать не для всего уравнения в целом, а для отдельных его частей.

С этой точки зрения удобно использовать предложенную С. Патанкаром [1] трактовку свойств координат, как пространственных, так и временной.

Двухсторонней координатой называется координата, для которой протекание процессов в рассматриваемой точке зависит от условий как слева, так и справа по координатной линии от этой точки. В противоположном случае координата называется *односторонней.*

Рассмотрим одномерную стационарную теплопроводность в плоской стенке. На температуру в каждой точке стенки могут влиять изменения температуры, как на левой стороне стенки, так и на правой стороне.

Обычно пространственные координаты являются двухсторонними, время – всегда односторонняя координата. В течение нестационарного охлаждения твердого тела на значение температуры в данный момент времени может оказать влияние только то, что происходило перед этим моментом.

Математические термины «параболический» и «эллиптический», используемые для классификации дифференциальных уравнений, соответствуют нашим вычислительным концепциям односторонней и двухсторонней координат. Первый термин означает одностороннее поведение, второй – двухстороннее.

Имело бы больше смысла определять задачи как параболические или эллиптические по данной координате. Таким образом, нестационарная задача теплопроводности, которую обычно называют параболической, на самом деле параболична по времени и эллиптична по пространственным координатам. Стационарная задача теплопроводности эллиптична по всем координатам. Двумерный пограничный слой параболичен по направленной вдоль течения координате и эллиптичен по поперечной координате.

Гиперболические задачи имеют в некотором роде одностороннее поведение, однако не вдоль координатных направлений, а вдоль специальных линий, называемых характеристиками.

2.2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИСХОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Для простоты в этом разделе предположено, что переменная Φ является функцией только одной независимой переменной x. Однако разработанные здесь идеи будут применимы также в случае зависимости более чем от одной независимой переменной.

Пусть у нас есть некоторый отрезок D на оси x, и на этом отрезке поставлена некоторая дифференциальная краевая задача. Это значит, что задано дифференциальное уравнение, которому должно удовлетворять решение Φ на отрезке D и дополнительное условие для Φ на одном или на обоих концах отрезка. Дифференциальную краевую задачу можно записать в виде символического равенства

$$L\phi = f, \tag{2.20}$$

где L – заданный дифференциальный оператор; f – заданная правая часть. Например, для задачи

$$\frac{d\phi}{dx}+\frac{x}{1+\phi^2}=\cos(x),\quad 0\le x\le 1;$$
$$\phi(0)=3 \tag{2.21}$$

достаточно положить:

$$L\phi\equiv\begin{cases}\dfrac{d\phi}{dx}+\dfrac{x}{1+\phi^2}, & 0\le x\le 1;\\ \phi(0);\end{cases}$$
$$f\equiv\begin{cases}\cos(x), & 0\le x\le 1;\\ 3.\end{cases} \tag{2.22}$$

Для вычисления ϕ численным методом надо прежде всего выбрать на отрезке D конечное число точек, совокупность которых называется *сеточными узлами* и обозначается как D_h. Вводится шаг сетки h. Например, если в качестве D используется отрезок $[0,1]$ и число узлов сетки равно N, то можно положить, что шаг равен

$$h=\frac{1}{N-1}. \tag{2.23}$$

Узлы сетки в этом случае – это совокупность точек:

$$x_1=0,\ x_2=h,\ x_3=2h,\ldots\ x_N=(N-1)h=1. \tag{2.24}$$

Таким образом, в качестве основных неизвестных в численном методе рассматриваются значения зависимой переменной в конечном числе точек расчетной области. Метод включает в себя получение системы алгебраических уравнений для этих неизвестных и алгоритм решения этих уравнений. Будем обозначать набор решений этих алгебраических уравнений через $\phi^{(h)}$. Обозначим через ϕ_n решение в точке x_n, т.е.

$$\phi^{(h)}=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\ldots,\phi_N). \tag{2.25}$$

Рассматривая значения в узловых точках, мы заменили непрерывную информацию, содержащуюся в точном решении диф-

ференциального уравнения, дискретными значениями. Таким образом, мы дискретизировали распределение Ф, и этот класс численных методов назовем методами дискретизации. Возможные дискретные аналоги данного дифференциального уравнения являются не единственными, хотя предполагается, что в пределе очень большого числа узловых точек все типы дискретных аналогов дают одно и то же решение.

Дискретный аналог задачи (2.20) можно символически записать в виде

$$L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}. \tag{2.26}$$

Дискретизацию заданного дифференциального уравнения можно осуществить множеством способов. Рассмотрим некоторые из них.

2.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЯДОВ ТЕЙЛОРА

Разложение в ряд Тэйлора около узловой точки n, расположенной посередине между точками $(n-1)$ и $(n+1)$, дает:

$$\begin{aligned}\phi_{n-1} &= \phi_n - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_n h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_n h^2 - \ldots \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_n h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_n h^2 - \ldots\end{aligned} \tag{2.27}$$

Если во втором из этих уравнений отбросить все члены начиная с третьего, то получим

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_n \approx \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{h}. \tag{2.28}$$

Если отбросить все члены рядов (2.27) начиная с четвертого и сложить их, получим

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_n \approx \frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{h^2}. \tag{2.29}$$

Если же в этом случае вычесть первое из уравнений (2.27) из второго, то получится еще одна формула для аппроксимации первой производной

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_n \approx \frac{\phi_{n+1}-\phi_{n-1}}{2h}. \tag{2.30}$$

Таким образом, дискретный аналог задачи (2.22) можно представить в виде

$$L_h\phi^{(h)} \equiv \begin{cases} \dfrac{\phi_{n+1}-\phi_n}{h} + \dfrac{x_n}{1+\phi_n{}^2}, & 1 \le n \le N-1; \\ \phi_1; \end{cases}$$
$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} \cos(x_n), & 1 \le n \le N-1; \\ 3. \end{cases} \tag{2.31}$$

2.4. МЕТОД КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА

Основная идея метода контрольного объема легко понятна и поддается прямой физической интерпретации. Расчетную область разбивают на некоторое число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Дифференциальное уравнение интегрируют по каждому контрольному объему. Для вычисления интегралов используют кусочные профили, которые описывают изменение Ф между узловыми точками. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения Ф в нескольких узловых точках.

Полученный подобным образом дискретный аналог выражает закон сохранения Ф для конечного контрольного объема точно так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объема. Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в предельном случае очень большого их числа. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам.

Рассмотрим стационарную одномерную задачу теплопроводности, описываемую уравнением

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)+S=0, \tag{2.32}$$

где λ – коэффициент теплопроводности; T – температура; S – скорость выделения теплоты в единице объема.

Для получения дискретного аналога будет использовано показанное на рис. 2.1 расположение узловых точек.

Используем при этом обозначения С. Патанкара [1]. В центре нашего внимания оказывается точка P, окруженная точками E и W (E – восточная сторона, т.е. направление вдоль оси x; W – западная сторона, т.е. направление, обратное направлению оси x). Штрихом показаны границы контрольного объема; сейчас нас не интересует их точное расположение. Эти границы обозначены буквами e и w.

Для рассматриваемой одномерной задачи предположим, что размеры контрольного объема в направлениях y и z равны единице. Таким образом, объем показанного контрольного объема равен $h\times1\times1$. Интегрируя (2.32) по контрольному объему, получаем

$$\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)_e-\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)_w+\int_w^e S dx=0. \tag{2.33}$$

Если интерполировать температуру T между узлами линейной функцией, то из (2.33) получим

$$\lambda_e\frac{T_E-T_P}{h}-\lambda_w\frac{T_P-T_W}{h}+\bar{S}h=0. \tag{2.34}$$

Важным вопросом является аппроксимация источника. Часто источниковый член является функцией самой зависимой переменной T, и тогда желательно учесть эту зависимость при построении дискрет-

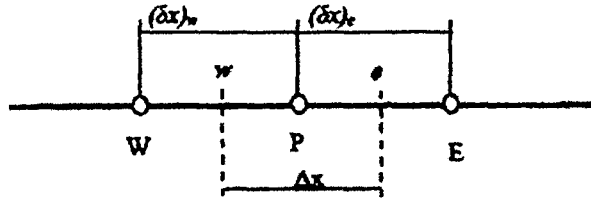

Рис. 2.1. Шаблон узловых точек для одномерной задачи

ного аналога. Однако формально можем учитывать только линейную зависимость, так как решение дискретных уравнений будет осуществляться, как увидим позже, с помощью методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Запишем среднее значение S в виде

$$\bar{S} = S_C + S_P T_P, \tag{2.35}$$

где S_C представляет собой постоянную составляющую S, а S_P – коэффициент (очевидно, что S_P не есть значение S в точке P).

В результате получаем:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b, \tag{2.36}$$

где

$$a_P = \frac{\lambda_e}{h} + \frac{\lambda_w}{h} - S_P h = a_E + a_W - S_P h;\ a_E = \frac{\lambda_e}{h};\ a_W = \frac{\lambda_w}{h};\ b = S_C h. \tag{2.37}$$

2.5. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА, ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ФИЗИЧЕСКОГО СМЫСЛА МЕТОДА КОНТРОЛЬНОГО ОБЪЕМА

Стоит учесть некоторые правила, которые следуют из физического смысла метода контрольного объема [1].

1. Выражение потока через границу, общую для двух прилегающих контрольных объемов, при записи дискретных аналогов уравнения для этих объемов должно быть одним и тем же.

2. В большинстве из интересующих нас задач влияние значения зависимой переменной в точках, соседних с некоторой узловой, на значение в этой узловой точке обусловлено процессами конвекции и диффузии. Следовательно, увеличение значения в одной узловой точке должно, при прочих равных условиях, привести к увеличению (а не уменьшению) значения в соседней узловой точке. Тогда, как видно из уравнения (2.36), из увеличения T_P при увеличении T_E следует, что коэффициенты a_P и a_E должны иметь одинаковый знак. Другими словами, в общем случае, описываемом уравнением (2.36), знаки коэффициентов перед значениями зависимой переменной в соседних точках a_E и a_W и коэффициента перед ее значением в центральной точке a_P должны быть одинаковыми.

3. В формуле (2.35) коэффициент S_P должен быть либо отрицательным, либо равным нулю.

Действительно, если бы S_P был положительным, физический процесс мог бы стать неустойчивым. Положительность S_P свидетельствует о росте источникового члена при увеличении T_P, а это, в свою очередь, может привести, если нет эффективного механизма отвода теплоты, к возрастанию T_P и т.д. С вычислительной точки зрения во избежание неустойчивостей и физически нереальных решений целесообразно сохранять S_P отрицательным.

4. Уравнение (2.36) выведено для одномерного случая. В общем случае удобно представить это уравнение в виде

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b, \tag{2.38}$$

где индекс nb обозначает соседние точки и суммирование производится по всем соседним точкам.

Для случаев, когда дифференциальное уравнение удовлетворяется также при добавлении к зависимой переменной постоянной величины, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$a_P = \sum a_{nb}. \tag{2.39}$$

2.6. СХОДИМОСТЬ, ПОРЯДОК ТОЧНОСТИ

Понятия сходимости, аппроксимации и устойчивости являются важнейшими в теории разностных схем. Подробное описание этих понятий со всеми необходимыми математическими доказательствами содержится, например, в книге С.К. Годунова, В.С. Рябенького [3].

Будем говорить, что решение дискретной $\phi^{(h)}$ задачи (2.26) *сходится* к решению дифференциальной задачи (2.20), если

$$\left\| \phi_h - \phi^{[h]} \right\| \to 0 \text{ при } h \to 0, \tag{2.40}$$

где ϕ_h – множество значений искомой функции в сеточных узлах, т.е.

$$\phi_h = \left(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3), ..., \phi(x_N)\right). \tag{2.41}$$

Напомним, что через $\phi^{(h)}$ обозначается набор решений алгебраических уравнений, полученных в результате дискретизации – формула (2.25).

Норма $\| \ \|$ на сеточных узлах может быть задана разными способами, например, как максимальное значение модуля:

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| = \max_n \left|\phi(x_n) - \phi_n\right| \tag{2.42}$$

или как

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| = \left(\frac{1}{N}\left|\phi(x_n) - \phi_n\right|^2\right)^{1/2}. \tag{2.43}$$

Кроме определения (2.40) можно ввести еще и *порядок точности*: если выполнено неравенство

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| < ch^k, \tag{2.44}$$

где $c > 0$, $k > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что дискретная схема имеет k-й порядок точности.

2.7. НЕВЯЗКА, АППРОКСИМАЦИЯ

Подставим ϕ_h, т.е. множество значений искомой функции в сеточных узлах, в уравнение (2.26), которое является дискретным аналогом исходного дифференциального уравнения. При этом возникнет так называемая *невязка*, определяемая как

$$L_h\phi_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}. \tag{2.45}$$

В качестве примера определим невязку для уравнения

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + a(x)\frac{d\phi}{dx} = 0. \tag{2.46}$$

Используем формулы (2.29) и (2.30) для дискретизации этого дифференциального уравнения, т.е.

$$L_h\phi^{(h)} = \frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{h^2} + a(x_n)\frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2h} = 0;$$

$$f^{(h)} = 0. \tag{2.47}$$

Используем для точных решений искомой функции формулу Тейлора:

$$\phi(x_{n-1})=\phi(x_n)-\phi'(x_n)h+\frac{1}{2}\phi''(x_n)h^2-\frac{1}{6}\phi'''(x_n)h^3+\frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_1)h^4;$$

$$\phi(x_{n+1})=\phi(x_n)+\phi'(x_n)h+\frac{1}{2}\phi''(x_n)h^2+\frac{1}{6}\phi'''(x_n)h^3+\frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_2)h^4, \quad (2.48)$$

где ξ_1 и ξ_2 – некоторые промежуточные точки отрезка $[x_{n-1},x_{n+1}]$.

Определяем $L_h\phi_h$, т.е. подставляем в (2.47) вместо ϕ_n искомую функцию $\phi(x_n)$, вместо ϕ_{n-1} – $\phi(x_{n-1})$, вместо ϕ_{n+1} – $\phi(x_{n+1})$:

$$L_h\phi_h=\phi''(x_n)+a(x_n)\phi'(x_n)+\frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_2)h^2+a(x_n)\frac{1}{12}\phi'''(\xi)h^2=$$

$$=f^{(h)}+\frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_2)h^2+a(x_n)\frac{1}{12}\phi'''(\xi)h^2. \quad (2.49)$$

Отсюда невязка равна:

$$\delta f^{(h)}=\frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_2)h^2+a(x_n)\frac{1}{12}\phi'''(\xi)h^2. \quad (2.50)$$

Если искомая функция имеет ограниченные производные, то можно записать

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|\le Ch^2, \quad (2.51)$$

где C – некоторая постоянная, зависящая от ϕ, но не зависящая от h.

Определение. Будем говорить, что дискретная схема $L_h\phi^{(h)}=f^{(h)}$ *аппроксимирует* задачу $L\phi=f$ на решение ϕ, если для невязки справедливо:

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|\to 0 \text{ при } h\to 0. \quad (2.52)$$

Если, сверх того, имеет место неравенство

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\|\le Ch^k, \quad (2.53)$$

где $C>0$, $k>0$ – некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место *аппроксимация порядка* h^k или порядка k относительно величины h.

2.8. УСТОЙЧИВОСТЬ

Достаточно ли аппроксимации для сходимости?

Можно показать [3], что одной аппроксимации недостаточно для того, чтобы решение дискретной задачи сходилось к решению дифференциальной задачи. Для сходимости необходимо еще и условие устойчивости.

Определение. Будем называть дискретную схему $L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$ *устойчивой*, если существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$, такие, что при любом $h < h_0$ и любом $\varepsilon^{(h)}$, таком, что

$$\left\|\varepsilon^{(h)}\right\| < \delta,$$

дискретная задача

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)},$$

полученная из исходной дискретной схемы добавлением к правой части возмущения $\varepsilon^{(h)}$, имеет одно и только одно решение $z^{(h)}$, причем это решение отклоняется от решения $\phi^{(h)}$ невозмущенной задачи на сеточную функцию $z^{(h)} - \phi^{(h)}$, удовлетворяющую условию

$$\left\|z^{(h)} - \phi^{(h)}\right\| \le C_1 \left\|\varepsilon^{(h)}\right\|, \qquad (2.54)$$

где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от h.

Равенство (2.54) означает, что малое возмущение $\varepsilon^{(h)}$ правой части вызывает малое возмущение решения $\left(z^{(h)} - \phi^{(h)}\right)$.

В случае линейного оператора L_h сформулированное определение равносильно следующему.

Дискретная задача $L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$ *устойчива*, если существует $h_0 > 0$, такое, что при любом $f^{(h)}$ она однозначно разрешима, причем

$$\left\|\phi^{(h)}\right\| \le C_1 \left\|f^{(h)}\right\|, \qquad (2.55)$$

где C_1 – некоторая постоянная, не зависящая от h и $f^{(h)}$.

Сформулируем без доказательства важную теорему, характеризующую зависимость между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью.

Теорема. Пусть дискретная схема $L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$ аппроксимирует задачу $L\phi = f$ на решении с порядком точности h^k и устойчива. Тогда решение $\phi^{(h)}$ задачи $L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$ сходится к ϕ_h, причем имеет место оценка

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| < CC_1h^k, \tag{2.56}$$

где C, C_1 – числа, входящие в оценки (2.53) и (2.55).

2.9. АППРОКСИМАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Определения сходимости, аппроксимации и устойчивости и теорема о связи между этими понятиями носят общий характер. Они одинаково имеют смысл для любых функциональных уравнений. Эти понятия, проиллюстрированные в предыдущих параграфах примерами для обыкновенных дифференциальных уравнений, легко распространяются на дискретизацию дифференциальных уравнений в частных производных.

2.10. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим следующую задачу.

В некоторой области $D = \{t \geq 0, \ -\infty < x < \infty\}$ необходимо найти функцию $\phi(t,x)$, удовлетворяющую уравнению и начальным условиям

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - u\frac{\partial\phi}{\partial x} = f(t,x), \quad \phi(0,x) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.57}$$

В качестве сетки D_h используем точки пересечения линий (рис. 2.2)

$$\begin{aligned} t^n &= n\Delta t, \quad n = 0,1,2,... \\ x_m &= m\Delta x, \quad m = 0,\pm1,\pm2,... \end{aligned} \tag{2.58}$$

В качестве дискретного аналога этой задачи

$$L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$$

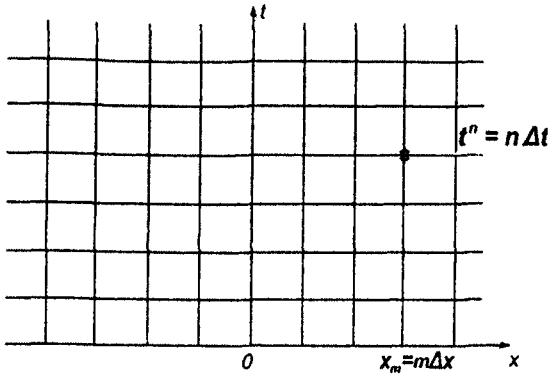

Рис. 2.2. Сетка для задачи Коши

используем следующую разностную схему:

$$L_h\phi^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^n}{\Delta t} - u\dfrac{\phi_{m+1}^n - \phi_m^n}{\Delta x}, \\ \phi_m^0, \\ \\ n = 0,1,2,\ldots \quad m = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots \end{cases} \tag{2.59}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} f\left(t^n, x_m\right), \\ g\left(x_m\right), \\ n = 0,1,2,\ldots \quad m = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots \end{cases}$$

Можно показать, что рассматриваемая схема дискретизации имеет первый порядок аппроксимации как относительно шага по времени Δt, так и относительно Δx. Доказательство этого содержится в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/2_10.pdf

2.11. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК НЕЙМАНА. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Проанализируем на устойчивость разностную схему (2.59) для задачи Коши, рассмотренной в предыдущем параграфе:

$$L_h\phi^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{\phi_m^{n+1}-\phi_m^n}{\Delta t} - u\dfrac{\phi_{m+1}^n-\phi_m^n}{\Delta x} = f\left(t^n, x_m\right), \\ \phi_m^0 = g\left(x_m\right), \\ \\ n = 0,1,2,\ldots \quad m = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \end{cases} \tag{2.60}$$

Определим нормы $\left\|\phi^{(h)}\right\|$ и $\left\|f^{(h)}\right\|$ равенствами

$$\left\|\phi_i^n\right\| = \max_n\left[\max_m\left|\phi_m^n\right|\right];$$

$$\left\|f^{(h)}\right\| = \max_m\left|g\left(x_m\right)\right| + \max_{m,n}\left|f\left(t^n, x_m\right)\right| = \max_m\left|g_m\right| + \max_{m,n}\left|f_m^n\right|. \tag{2.61}$$

Условие устойчивости (2.55) рассматривае $\left\|\phi^{(h)}\right\| \le C_1\left\|f^{(h)}\right\|$ примет вид

$$\max_m\left|\phi_m^n\right| \le C_1\left(\max_m\left|g_m\right| + \max_{m,n}\left|f_m^n\right|\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.62}$$

где C_1 не зависит от $\Delta t, \Delta x$. Условие (2.62) должно выполняться при любых ограниченных функциях $\{g_m\}$ и $\left\{f_m^n\right\}$. В частности, для устойчивости необходимо, чтобы оно выполнялось при произвольных $\{g_m\}$ и $f_m^n = 0$, т.е. чтобы решение задачи

$$\frac{\phi_m^{n+1}-\phi_m^n}{\Delta t} - u\frac{\phi_{m+1}^n-\phi_m^n}{\Delta x} = 0, \quad \phi_m^0 = g\left(x_m\right), \quad n = 0,1,2,\ldots \quad m = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \tag{2.63}$$

удовлетворяло условию

$$\max_m\left|\phi_m^n\right| \le C_1 \max_m\left|\phi_m^0\right|, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{2.64}$$

при произвольной ограниченной функции $g^i = g\left(x_i\right)$.

Свойство (2.64), необходимое для устойчивости (2.62) задачи (2.60), называют устойчивостью задачи (2.60) относительно *возмущения начальных данных*. Оно означает, что возмущение $\left\{\phi_m^0\right\}$, внесенное в начальные данные задачи (2.60), вызовет возмущение $\left\{\phi_m^n\right\}$ решения задачи (2.60), которое в силу (2.64) не более чем в C_1 раз

превосходит возмущение начальных данных, причем C_1 не зависит от $\Delta t, \Delta x$.

Условие устойчивости (2.64) должно выполняться для любых ограниченных функций $\left\{\phi_m^0\right\}$, в частности, для гармоники $\phi_m^0 = e^{i\alpha m}$, где i – мнимая единица, α – вещественный параметр.

Решение задачи (2.63) при таких начальных условиях имеет вид:

$$\phi_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}, \tag{2.65}$$

где

$$\lambda = \lambda(\alpha) = 1 + \frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(e^{i\alpha} - 1\right) = 1 - r + re^{i\alpha}, \quad r = \frac{u\Delta t}{\Delta x} = \text{const}. \tag{2.66}$$

Для решения (2.65) справедливо

$$\max_m \left|\phi_m^n\right| \le \left|\lambda(\alpha)\right|^n \max_m \left|\phi_m^0\right|. \tag{2.67}$$

Сравнивая это выражение с условием (2.64), получаем, что для устойчивости решения задачи (2.63) необходимо выполнение неравенства

$$\left|\lambda(\alpha)\right|^n \le C_1. \tag{2.68}$$

Так как это условие должно выполняться для любого значения n, то оно эквивалентно условию

$$\left|\lambda(\alpha)\right| \le 1. \tag{2.69}$$

Это и есть *необходимое спектральное условие устойчивости Неймана* применительно к рассматриваемому примеру.

Комплексная функция (2.66) называется *спектром* и при $r > 0$ представляет собой окружность радиуса r с центром в точке $(1 - r)$.

В случае $r < 1$ эта окружность лежит внутри единичного круга (касаясь его в точке $\lambda = 1$), при $r = 1$ совпадает с единичной окружностью, а при $r > 1$ лежит вне единичного круга (рис. 2.3). Соответственно, необходимое условие устойчивости (2.69) выполнено при $r \le 1$ и не выполнено при $r > 1$.

При $r < 0$ необходимое условие устойчивости не выполняется.

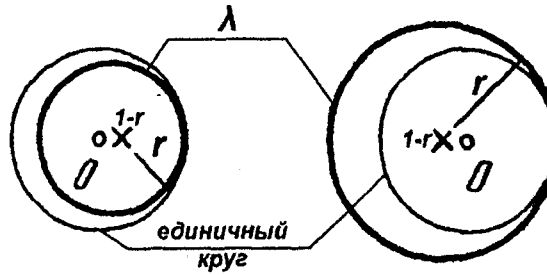

Рис. 2.3. Исследование устойчивости

Резюмируя все вышесказанное, можно сказать: *если необходимое условие Неймана (2.69) не выполнено, то ни при каких условиях нельзя ожидать устойчивости, а в случае его выполнения можно надеяться, что устойчивость имеет место.*

Спектр $\lambda(\alpha)$ является собственным числом оператора перехода от значений сеточной функции на n-м слое по времени к значениям сеточной функции на $(n+1)$-м слое:

$$\phi_m^{n+1} = (1-r)\phi_m^n + r\phi_{m+1}^n. \qquad (2.70)$$

Изложенный принцип исследования устойчивости был использован для задачи Коши с постоянными коэффициентами. Однако он легко расширяется на задачи с непостоянными коэффициентами, а также на задачи в ограниченных областях, когда граничные условия задаются не только при $t=0$, но и на боковых границах. Этим приемом можно пользоваться и для исследования нелинейных задач.

Пример использования такого приема содержится в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/2_11.pdf

2.12. ЯВНАЯ, КРАНКА–НИКОЛСОНА И ПОЛНОСТЬЮ НЕЯВНАЯ СХЕМЫ

Ограничения на шаг по времени, связанные с устойчивостью, могут создавать существенные неудобства и приводить к большим затратам времени на численное решение задач.

Введем понятие *числа Куранта* (иногда используется название *число Куранта–Фридрихса–Леви*):

$$CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x}. \tag{2.71}$$

Для рассмотренных разностных схем для обеспечения устойчивости необходимо:

$$CFL \le 1. \tag{2.72}$$

Эти ограничения можно снять (частично или полностью), если перейти от *явных* разностных схем, которые рассматривались ранее, к *неявным* схемам.

Неявные схемы используют уравнения, которые выражают данные на $(n+1)$-м шаге по времени на несколько соседних точек сетки. Для нахождения результата решается система линейных уравнений.

Для решения задачи теплопроводности

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) \tag{2.73}$$

используем следующую разностную схему:

$$\frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta t} - \nu\frac{\Phi_{m+1}^{n+1} - 2\Phi_m^{n+1} + \Phi_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0, \tag{2.74}$$

где коэффициент

$$\nu = \Gamma / \rho \tag{2.75}$$

для простоты полагается постоянным (на анализ устойчивости, исходя из принципа «замороженных» коэффициентов, это не влияет).

Подставим решение в форме (2.65), $\Phi_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$, в задачу (2.74) и найдем спектр $\lambda(\alpha)$:

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\left(e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{4\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.76}$$

Очевидно, что $|\lambda(\alpha)| \le 1$ при любом положительном значении ν, т.е. необходимое условие устойчивости выполняется при любом шаге по времени.

Можно сформулировать следующее правило: неявные схемы чаще бывают устойчивыми по сравнению с явными. Но при этом усложняется процесс решения системы линейных алгебраических

уравнений, которые получаются после дискретизации исходных уравнений.

Кроме чисто явных и чисто неявных схем, бывают смешанные схемы. Например, для уравнения теплопроводности это

$$\frac{\Phi_m^{n+1}-\Phi_m^n}{\Delta t}-$$

$$-\frac{\nu}{\Delta x^2}\left[f\left(\Phi_{m+1}^{n+1}-2\Phi_m^{n+1}+\Phi_{m-1}^{n+1}\right)+(1-f)\left(\Phi_{m+1}^{n}-2\Phi_m^{n}+\Phi_{m-1}^{n}\right)\right]=0, \quad (2.77)$$

где параметр f принимает значения от 0 до 1. При $f=0$ получается чисто явная схема, при $f=1$ – полностью неявная, при $f=0.5$ получается так называемая *схема Кранка–Николсона.*

Легко показать, что при $f \geq 0.5$ схема удовлетворяет необходимому условию устойчивости при любых соотношениях шагов по времени и по пространственной координате.

Такие схемы называются *безусловно устойчивыми.*

Различные значения f можно интерпретировать как характеристику изменения Φ_m при переходе во времени от момента t^n к t^{n+1}, показанном на рис. 2.4. Явная схема по существу предполагает, что старое значение Φ_m^n существует в пределах всего временного шага, за исключением точки $t^{n+1}=t^n+\Delta t$. Неявная схема предполагает, что в момент t^n Φ_m резко уменьшается от Φ_m^n до Φ_m^{n+1}, а затем остается равной Φ_m^{n+1} на всем временном шаге, и функция в пределах временного шага характеризуется новым значением Φ_m^{n+1}. Схема Кранка–Николсона предполагает линейное изменение Φ_m. На первый взгляд, линейное изменение должно быть более разумным, чем две другие альтернативы.

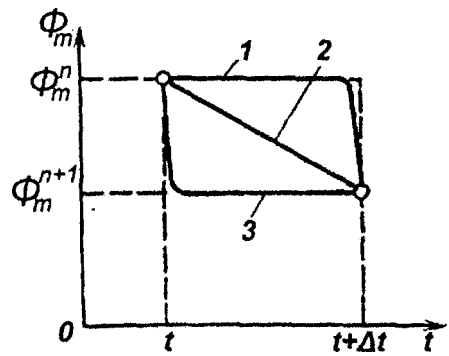

Рис. 2.4. Изменение искомой функции Φ_m температуры во времени для явной схемы (*1*), схемы Кранка–Николсона (*2*) и полностью неявной схемы (*3*)

Тем не менее, чисто неявная схема является предпочтительной. Причины две.

1. В случае схемы Кранка–Николсона могут иметь место колеблющиеся решения. Устойчивость в математическом смысле просто гарантирует, что эти колебания будут, в конечном счете, затухать, но это не обеспечивает физически правдоподобного решения. Несколько примеров подобных решений, полученных с помощью схемы Кранка–Николсона, можно найти в [1].

2. Точные решения рассматриваемой задачи имеют экспоненциальный характер, поэтому линейная интерполяция хуже отражает истинный характер изменения функции.

2.13. МЕТОД ПРОГОНКИ

Как уже говорилось, в случае использовании неявной схемы получается система уравнений относительно неизвестных на $(n+1)$-м шаге по времени значений функции Φ. Например, уравнение (2.74) преобразуется к виду

$$\left(1+2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right)\Phi_m^{n+1}=\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\Phi_{m+1}^{n+1}+\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\Phi_{m-1}^{n+1}+\Phi_m^n, \qquad (2.78)$$

$$m=1,2,...,N.$$

Для решения этой системы используется так называемый *метод прогонки.*

Метод прогонки используется для решения системы линейных алгебраических уравнений, в которой каждая m-я строка представлена в виде

$$a_m\Phi_m=b_m\Phi_{m+1}+c_m\Phi_{m-1}+d_m, \qquad (2.79)$$

где $m=1,2,...,N-1,N$.

Для случая (2.78) коэффициенты равны

$$a_m=\left(1+2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right),$$

$$b_m=\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2},\quad c_m=\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2},\quad d_m=\Phi_m^n. \qquad (2.80)$$

Для $m=1$, $m=N$ коэффициенты

$$c_1=0,\quad b_N=0. \qquad (2.81)$$

Матрица такой системы называется трехдиагональной. В английской литературе метод называется алгоритмом Томаса или TDMA (Tri-diagonal-Matrix Algorithm – алгоритм трехдиагональной матрицы).

Если на границах области заданы значения искомой функции, то

$$a_1 = 1, \quad b_1 = c_1 = 0, \quad d_1 = \Phi_1, \tag{2.82}$$

$$a_N = 1, \quad b_N = c_N = 0, \quad d_N = \Phi_N. \tag{2.83}$$

Записанные условия (2.79), (2.81) означают, что Φ_1 известна в зависимости от Φ_2. Уравнение для $m = 2$ представляет собой соотношение между Φ_1, Φ_2, Φ_3. Но, поскольку Φ_1 может быть выражена через Φ_2, это соотношение приводится к соотношению между Φ_2 и Φ_3. Другими словами, Φ_2 можно выразить через Φ_3. Процесс подстановки можно продолжать до тех пор, пока значение Φ_N не будет выражено через Φ_{N+1}. Но, поскольку Φ_{N+1} не существует, мы в действительности на данном этапе получим численное значение Φ_N. Это позволит нам начать процесс обратной подстановки, в котором Φ_{N-1} получится из Φ_N, Φ_{N-2} – из Φ_{N-1}, ..., Φ_2 – из Φ_3 и Φ_1 – из Φ_2. Это и составляет существо алгоритма трехдиагональной матрицы.

Предположим, что при прямой подстановке имеем зависимость

$$\Phi_m = P_m \Phi_{m+1} + Q_m \tag{2.84}$$

после того, как получено

$$\Phi_{m-1} = P_{m-1} \Phi_m + Q_{m-1}. \tag{2.85}$$

Подставляя (2.85) в (2.79), получаем следующее соотношение:

$$\Phi_m = \frac{b_m}{(a_m - c_m P_{m-1})} \Phi_{m+1} + \frac{c_m Q_{m-1} + d_m}{(a_m - c_m P_{m-1})}. \tag{2.86}$$

Сравниваем это выражение с (2.84) и получаем формулы для прогоночных коэффициентов P_m, Q_m:

$$P_m = \frac{b_m}{(a_m - c_m P_{m-1})}, \quad Q_m = \frac{c_m Q_{m-1} + d_m}{(a_m - c_m P_{m-1})}. \tag{2.87}$$

Эти рекуррентные соотношения определяют P_m, Q_m через P_{m-1}, Q_{m-1}. Заметим, что в начале рекуррентного процесса уравнение (2.79) для $m=1$ по форме почти совпадает с (2.84). Таким образом, P_1, Q_1 определяются в следующем виде:

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1}. \tag{2.88}$$

На другом конце последовательности P_m, Q_m имеем $b_N = 0$. Это дает $P_N = 0$, и из (2.84) получаем

$$Q_N = \Phi_N. \tag{2.89}$$

С этого момента осуществляется обратная подстановка с помощью уравнения (2.84).

Краткое описание алгоритма:

1. Рассчитываем P_1, Q_1 из уравнения (2.88).
2. Используя рекуррентные соотношения (2.87), получаем P_m, Q_m для $m = 2,3,...,N$.
3. Полагаем $Q_N = \Phi_N$.
4. Используя уравнение (2.84) для $m = N-1, N-2,...,3,2,1$, получаем $\Phi_{N-1}, \Phi_{N-2},...,\Phi_3, \Phi_2, \Phi_1$.

Алгоритм, использующий свойство трехдиагональности матрицы, является мощным и удобным методом решения алгебраических уравнений, которые можно представить в виде (2.79). В отличие от общих матричных методов метод прогонки требует машинной памяти и машинного времени, пропорциональных N, а не N^2 или N^3.

2.14. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ. ОСОБЕННОСТИ ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ

В задачах с несколькими пространственными переменными после дискретизации получается гораздо более сложная система алгебраических уравнений, чем для задачи с одной пространственной переменной.

Рассмотрим, например, частный случай обобщенного уравнения (2.16), когда задача является двумерной, а конвекцией и источниковым членом можно пренебречь. Полагаем для простоты, что

$\Gamma = \text{const}$, $\rho = \text{const}$. В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \quad (2.90)$$

Это уравнение можно интерпретировать и как дифференциальное уравнение теплопроводности. В этом случае под Φ подразумевается температура T, а под ν – коэффициент температуропроводности.

Пусть задано начальное распределение Φ и граничные условия первого рода:

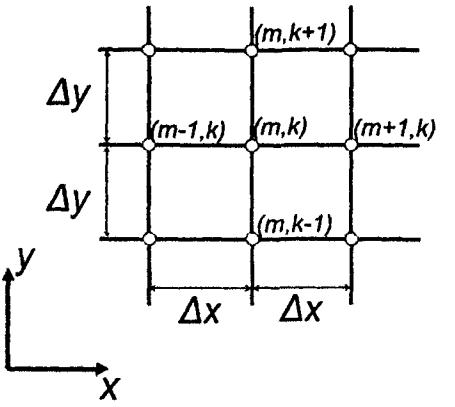

Рис. 2.5. Сетка для двумерной задачи

$$\Phi(0,x,y) = \phi_0(x,y),\ \Phi_w = \psi(t,x,y). \quad (2.91)$$

Построение разностных схем для многомерных задач аналогично этому процессу для одномерной задачи. Получение многомерных дискретных аналогов проводится с помощью прямого распространения результатов, полученных при рассмотрении одномерной задачи.

Используем метод, основанный на разложении в ряд Тейлора. Неявный разностный аналог задачи (2.90) на сетке, изображенной на рис. 2.5, имеет вид:

$$\frac{\Phi_{m,k}^{n+1} - \Phi_{m,k}^{n}}{\Delta t} - \nu \frac{\Phi_{m+1,k}^{n+1} - 2\Phi_{m,k}^{n+1} + \Phi_{m-1,k}^{n+1}}{\Delta x^2} -$$

$$-\nu \frac{\Phi_{m,k+1}^{n+1} - 2\Phi_{m,k}^{n+1} + \Phi_{m,k-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = 0;$$

$$n = 0,1,2,3,\ldots,N_\tau;\quad N_\tau \Delta t = t_{\max};$$

$$m = 1,2,3,\ldots,N_X;\quad (N_X - 1)\Delta x = L_X;$$

$$k = 1,2,3,\ldots,N_Y;\quad (N_Y - 1)\Delta y = L_Y, \quad (2.92)$$

где L_X, L_Y – размеры расчетной области по осям x, y; $\Phi_{m,j}^{n}$ – решение разностной задачи в момент времени $t^n = n\Delta t$ в точке (m,k), которая находится на пересечении линий $x_m = (m-1)\Delta x$ и $y_k = (k-1)\Delta y$ (см. рис. 2.5).

Уравнение (2.92) приводится к виду

$$b\Phi_{m,k+1}^{n+1} + a\Phi_{m,k}^{n+1} + c\Phi_{m,k-1}^{n+1} + d\Phi_{m+1,k}^{n+1} + e\Phi_{m-1,k}^{n+1} = f, \qquad (2.93)$$

где

$$a = 1 + 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} + 2\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}, \; b = c = -\frac{\nu\Delta t}{\Delta y^2}, \; d = e = -\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}, \; f = \Phi_{m,j}^{n}. \qquad (2.94)$$

Уравнение (2.93) содержит пять неизвестных. Вся система линейных алгебраических уравнений описывается так называемой *пятидиагональной матрицей* коэффициентов.

Аналогично для трехмерной задачи получается *семидиагональная матрица.*

В отличие от одномерной задачи, которая описывается трехдиагональной матрицей коэффициентов и которая эффективно решается методом прогонки, для задач с несколькими пространственными переменными таких эффективных методов нет.

Прямые методы решения алгебраических уравнений, применяемые к двух- или трехмерным задачам, становятся более сложными и требуют существенно большей машинной памяти и затрат вычислительного времени.

Альтернативой являются итерационные методы для решения алгебраических уравнений, а также подход построения разностных схем, основанный на методах расщепления.

Упражнение. Определить порядок аппроксимации разностной схемы (2.92).

Упражнение. Доказать, что для разностной схемы (2.92) спектральный признак Неймана выполняется при любых значениях шагов по времени и по пространству.

Указание. Для решения этой задачи необходимо доказать ограниченности решений вида $\Phi_{m,k}^{n} = \lambda^n e^{i(\alpha m + \beta k)}$ при любых значениях шагов.

2.15. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ГАУССА–ЗЕЙДЕЛЯ С ПЕРЕМЕНОЙ НАПРАВЛЕНИЙ

Простейшим из всех итерационных методов является метод Гаусса–Зейделя, в котором значения переменной рассчитываются пу-

тем обращения в определенном порядке к каждой узловой точке. В памяти вычислительной машины держится только один массив значений $\Phi_{m,k}$. По мере обращения к очередной узловой точке соответствующее значение $\Phi_{m,k}$ в памяти вычислительной машины (начальное приближение или значение $\Phi_{m,k}$ с предыдущей итерации) заменяется на новое.

Для решения системы (2.93) на каждом шаге по времени используются два прохода в направлении основного движения потока (в данном случае по x).

Для $j=1,3,...$ (j – номер итерации):

1. Проход в обратном направлении ($m=N_X-1, N_X-2,...,3,2$)

$$b\Phi^{(j)}_{m,k+1}+a\Phi^{(j)}_{m,k}+c\Phi^{(j)}_{m,k-1}+d\Phi^{(j)}_{m+1,k}+e\Phi^{(j-1)}_{m-1,k}=f. \qquad (2.95)$$

Для $m=N_X-1$ значение $\Phi^{(j)}_{m+1,k}=\Phi^{(j)}_{Nx,k}$ определяется граничными условиями на правой границе и, таким образом, является известной величиной. В результате при $m=N_X-1$ получается система, которая в каждой строке содержит только три неизвестные величины: $\Phi^{(j)}_{m,k-1}, \Phi^{(j)}_{m,k}, \Phi^{(j)}_{m,k+1}$. Таким образом, система описывается трехдиагональной матрицей коэффициентов и эффективно решается методом прогонки.

Далее, при $m=N_X-2$ используется уже найденное значение $\Phi^{(j)}_{m+1,k}=\Phi^{(j)}_{Nx-1,k}$, и мы снова получаем трехдиагональную матрицу.

Этот процесс продолжается до слоя $m=2$, а далее начинается проход в другом направлении.

2. Проход в прямом направлении $m=2,3,...,N_{X-2},N_{X-1}$

$$b\Phi^{(j+1)}_{m,k+1}+a\Phi^{(j+1)}_{m,k}+c\Phi^{(j+1)}_{m,k-1}+d\Phi^{(j)}_{m+1,k}+e\Phi^{(j+1)}_{m-1,k}=f. \qquad (2.96)$$

Для $m=2$ значение $\Phi^{(j+1)}_{m-1,k}=\Phi^{(j+1)}_{1,k}$ определяется граничными условиями на левой границе и является известной величиной. Решение полученной системы, а также систем для всех последующих значений m полностью аналогично предыдущему пункту.

Отметим, что для простоты записи в формулах (2.95) и (2.96) при обозначении Φ не указывается номер шага по времени – везде используется $(n+1)$-й номер.

Для начальной итерации используется значение с предыдущего шага по времени:

$$\Phi_{m,k}^{(0)} = \Phi_{m,k}^{n}. \tag{2.97}$$

Для повышения эффективности метода можно чередовать направление проходов, а также использовать проходы не только в продольном направлении, но в поперечном.

Главным недостатком метода Гаусса–Зейделя является медленная сходимость, особенно когда используется большое число узловых точек.

2.16. МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ

Методы факторизации состоят в том, что вместо решения одной системы линейных алгебраических уравнений решаются несколько систем, каждая из которых позволяет использовать более простые методы решения.

Систему (2.93) можно записать в обычном векторном виде

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2.98}$$

где

$$A = \begin{pmatrix}
a & c & . & . & e & . & . & . & . & . & . \\
b & a & c & . & . & e & . & . & . & . & . \\
. & b & a & c & . & . & e & . & . & . & . \\
. & . & b & a & c & . & . & e & . & . & . \\
d & . & . & b & a & c & . & . & e & . & . \\
. & d & . & . & b & a & c & . & . & e & . \\
. & . & d & . & . & b & a & c & . & . & e \\
. & . & . & d & . & . & b & a & c & . & . \\
. & . & . & . & d & . & . & b & a & c & . \\
. & . & . & . & . & d & . & . & b & a & c \\
. & . & . & . & . & . & d & . & . & b & a
\end{pmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix}
. \\ \Phi_{m+1,k}^{n+1} \\ . \\ . \\ \Phi_{m,k+1}^{n+1} \\ \Phi_{m,k}^{n+1} \\ \Phi_{m,k-1}^{n+1} \\ . \\ . \\ \Phi_{m-1,k}^{n+1} \\ .
\end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix}
. \\ \Phi_{m+1,k}^{n} \\ . \\ . \\ \Phi_{m,k+1}^{n} \\ \Phi_{m,k}^{n} \\ \Phi_{m,k-1}^{n} \\ . \\ . \\ \Phi_{m-1,k}^{n} \\ .
\end{bmatrix}. \tag{2.99}$$

Матрица A имеет N строк и N столбцов, где $N = N_X \times N_Y$. Соответственно, размерность векторов x и b также равна N.

Метод приближенной факторизации состоит в том, что матрица представляется в виде

$$A \cong A_X \cdot A_Y, \tag{2.100}$$

где

$$A_X = \begin{pmatrix} a_x & . & e & . & . & . & . \\ . & a_x & . & e & . & . & . \\ d & . & a_x & . & e & . & . \\ . & d. & . & a_x & . & e & . \\ . & . & d & . & a_x & . & e \\ . & . & . & d & . & a_x & . \\ . & . & . & . & d & . & a_x \end{pmatrix},$$

$$A_Y = \begin{pmatrix} a_y & c & . & . & . & . & . \\ b & a_y & c & . & . & . & . \\ . & b & a_y & c & . & . & . \\ . & . & b & a_y & c & . & . \\ . & . & . & b & a_y & c & . \\ . & . & . & . & b & a_y & c \\ . & . & . & . & . & b & a_y \end{pmatrix}. \tag{2.101}$$

Здесь коэффициенты b,c,d,e совпадают с соответствующими коэффициентами матрицы A, а коэффициенты a_x и a_y зависят только от шагов Δx и Δy соответственно:

$$a_x = 1 + 2\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2},\ a_y = 1 + 2\frac{\nu \Delta t}{\Delta y^2}. \tag{2.102}$$

Вводим обозначение

$$\tilde{x} = A_Y x\,. \tag{2.103}$$

и решаем систему

$$A_X \tilde{x} = b\,. \tag{2.104}$$

Если подробно расписать это выражение, то получим систему в виде

$$a_x \widetilde{\Phi}_{m,k} + d\widetilde{\Phi}_{m+1,k} + e\widetilde{\Phi}_{m-1,k} = f. \qquad (2.105)$$

Эта система имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов и эффективно решается методом прогонки.

Затем решается система (2.103)

$$b\Phi^{n+1}_{m,k+1} + a_y \Phi^{n+1}_{m,k} + c\Phi^{n+1}_{m,k-1} = \widetilde{\Phi}_{m,k}, \qquad (2.106)$$

которая тоже имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов.

Основным недостатком метода приближенной факторизации является то, что ни один из ненулевых элементов матрицы A не совпадает с соответствующими элементами матрицы $A_X \cdot A_Y$, а некоторые нулевые даже становятся ненулевыми. Это может приводить к большой погрешности метода и медленной сходимости.

Для трехмерных задач метод приближенной факторизации сходится крайне медленно, и его не рекомендуется использовать.

2.17. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МАККОРМАКА

Метод приближенной факторизации может быть улучшен, с тем чтобы уменьшить ошибку разложения матриц. Рассмотренный далее метод [5] позволяет получить точное совпадение ненулевых элементов факторизованной и исходной матриц. Правда, некоторые нулевые элементы исходной матрицы становятся ненулевыми при факторизации, но возникающая ошибка может быть ликвидирована с помощью итераций.

Матрица A, входящая в систему (2.98), представляется в виде

$$A \cong A_X D^{-1} A_Y, \qquad (2.107)$$

где

$$A_X = \begin{pmatrix} a & . & e & . & . & . & . \\ . & a & . & e & . & . & . \\ d & . & a & . & e & . & . \\ . & d. & . & a & . & e & . \\ . & . & d & . & a & . & e \\ . & . & . & d & . & a & . \\ . & . & . & . & d & . & a \end{pmatrix}, \quad A_Y = \begin{pmatrix} a & c & . & . & . & . & . \\ b & a & c & . & . & . & . \\ . & b & a & c & . & . & . \\ . & . & b & a & c & . & . \\ . & . & . & b & a & c & . \\ . & . & . & . & b & a & c \\ . & . & . & . & . & b & a \end{pmatrix}. \qquad (2.108)$$

Здесь коэффициенты все a,b,c,d,e совпадают с соответствующими коэффициентами матрицы A.

Диагональная матрица D состоит только из элементов a:

$$D=\begin{pmatrix} a & . & . & . & . & . & . \\ . & a & . & . & . & . & . \\ . & . & a & . & . & . & . \\ . & . & . & a & . & . & . \\ . & . & . & . & a & . & . \\ . & . & . & . & . & a & . \\ . & . & . & . & . & . & a \end{pmatrix}. \qquad (2.109)$$

Таким образом, вместо системы (2.98) решается система

$$A_X D^{-1} A_Y x = b. \qquad (2.110)$$

Решение этой системы не представляет большой сложности: оно состоит из обращений двух трехдиагональных матриц и одного умножения на диагональную матрицу.

Для уменьшения погрешности этого алгоритма можно добавить следующий итеративный процесс.

Систему (2.110) можно представить в виде:

$$A_X D^{-1} A_Y x = Ax + Px \equiv b + Px, \qquad (2.111)$$

где Px – невязка – отклонение приближенного решения от точного, которое находится из решения системы

$$Ax = b. \qquad (2.112)$$

Можно ввести итеративный процесс решения основной системы, основываясь на уравнении (2.111):

$$A_X D^{-1} A_Y x^{(j)} = b + Px^{(j-1)}, \quad j = 1,2,... \qquad (2.113)$$

где j – номер итерации.

Для нулевой итерации:

$$x^{(0)} = [0]. \qquad (2.114)$$

После первой итерации, которая фактически описана выше (формула (2.110)), необходимо найти невязку. Из формулы (2.111) следует:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{A}_X \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{A}_Y \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)}. \qquad (2.115)$$

Затем решаем систему (2.113) для второй итерации, $j = 2$, и т.д. Для последующих итераций имеем:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(j)} = \boldsymbol{A}_X \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{A}_Y \boldsymbol{x}^{(j)} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(j)} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(j-1)} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(j)}. \qquad (2.116)$$

Если ввести обозначение для правой части (2.113)

$$\boldsymbol{r}^{(j-1)} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(j-1)}, \qquad (2.117)$$

то невязка после j-го шага определяется по формуле:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^{(j)} = \boldsymbol{r}^{(j-1)} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(j)}. \qquad (2.118)$$

Для хорошей сходимости достаточно двух итераций.

В работе [4] показано, что метод модифицированной факторизации намного эффективнее метода приближенной факторизации как для решения двумерных задач, так и для трехмерных.

2.18. МЕТОДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ

Методы, описанные в предыдущих разделах, основаны на итерационном решении системы (2.93), которая была получена при использовании разностной схемы (2.92) для задачи (2.90).

Разностные схемы расщепления основаны на ином подходе – в них сами разностные схемы строятся так, что их решение не представляет большой сложности.

Основную идею схем расщепления можно изложить так. Рассмотрим дифференциальную задачу вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{A}\Phi, \\ \Phi\big|_{t=0} = \phi_0, \end{cases} \qquad (2.119)$$

где $\mathbf{A}$ – некоторый дифференциальный оператор по пространственным переменным.

Например, для задачи (2.90) это

$$\mathbf{A}\Phi = \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}. \qquad (2.120)$$

Допустим, что правая часть уравнения (2.119) имеет вид

$$A\Phi = A_1\Phi + A_2\Phi. \tag{2.121}$$

На каждом шаге по времени при переходе от момента времени $t = t^n$ к $t = t^{n+1} = t^n + \Delta t$ заменим решение задачи (2.119) на решение двух задач:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = A_1 v, \quad t^n \le t \le t^{n+1}, \\ v\left(t^n, x, y\right) = \Phi\left(t^n, x, y\right) \end{cases} \tag{2.122}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = A_2 w, \quad t^n \le t \le t^{n+1}, \\ w\left(t^n, x, y\right) = v\left(t^{n+1}, x, y\right). \end{cases} \tag{2.123}$$

Можно показать [3], что

$$w\left(t^{n+1}, x, y\right) = \Phi\left(t^{n+1}, x, y\right) + 0\left(\Delta t^2\right), \tag{2.124}$$

т.е. порядок аппроксимации разностной схемы по шагу Δt не меняется.

Существуют и другие схемы расщепления. Примеры этих схем, а также «метод переменных направлений», содержатся в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/2_11.pdf

2.19. МЕТОД УСТАНОВЛЕНИЯ

Для решения многих стационарных задач математической физики, описывающих равновесные состояния, имеет смысл рассматривать последние как результат установления развивающегося во времени процесса, расчет которого часто оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния.

Мы проиллюстрируем применение метода установления примером алгоритма для вычисления решения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + S = 0, \tag{2.125}$$

которое получается из обобщенного уравнения (2.14) в случае стационарного течения и пренебрежения конвекцией.

Это уравнение также можно интерпретировать как дифференциальное уравнение теплопроводности в стационарном случае. В этом случае под Φ подразумевается температура, Γ – связан с коэффициентом теплопроводности, S – источник тепла.

Пусть заданы граничные условия первого рода, т.е. температура на границе рассматриваемой области $\Phi_w = \psi(x,y)$.

Рассмотрим вспомогательную нестационарную задачу о распространении тепла

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S,$$
$$\Phi(0,x,y) = \phi_0(x,y),\ \Phi_w = \psi(x,y), \qquad (2.126)$$

где начальные условия $\phi_0(x,y)$ заданы произвольно. Таким образом, имеется нестационарная задача со стационарными граничными условиями $\Phi_w = \psi(x,y)$.

Поскольку источники тепла S и температура на границе Φ_w не зависят от времени, то естественно ожидать, что и решение $\Phi(t,x,y)$ с течением времени будет меняться все медленнее, распределение температур $\Phi(t,x,y)$ в пределе при $t \to \infty$ превращается в равновесное распределение температур $\Phi(x,y)$, описываемое задачей (2.125).

Поэтому вместо стационарной задачи (2.125) можно решать нестационарную задачу (2.126) до того момента времени t, пока ее решение перестанет меняться в пределах интересующей нас точности. В этом и состоит идея решения стационарных задач *методом установления.*

Математически метод установления можно обосновать следующим образом.

Как уже указывалось, после дискретизации уравнения в частных производных получается система линейных алгебраических уравнений.

Применим для решения этой системы какой-либо итерационный метод (например, метод простой итерации), который можно расписать так.

Исходная система имеет вид

$$Ax = b. \tag{2.127}$$

Переносим все в левую часть и умножаем на некую знакопостоянную функцию τ:

$$\tau(Ax - b) = 0. \tag{2.128}$$

Прибавим и отнимем от левой части неизвестную величину x:

$$x - x + \tau(Ax - b) = 0 \tag{2.129}$$

и построим на основе этого выражения итеративный процесс:

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} + \tau\left(Ax^{(n)} - b\right) = 0, \tag{2.130}$$

где (n) – номер итерации.

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$\frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{\tau} = -\left(Ax^{(n)} - b\right). \tag{2.131}$$

Если считать, что $x^{(n)}$ – значение решения на текущем слое по времени, а $x^{(n+1)}$ – значение решения на следующем шаге, то левую часть уравнения (2.131) можно рассматривать как разностную аппроксимацию частной производной по времени $\frac{\partial x}{\partial t}$, а функцию τ – как шаг по времени Δt.

Отсюда следует, что между итерационным процессом и эволюционными решениями (развивающимися во времени) есть глубокая аналогия. Переход от одной итерации к другой вплоть до момента, когда итерации сойдутся, можно рассматривать как движение по временным слоям вплоть до затухания колебаний решения.

При этом нам неважно, каким путем мы пришли к конечному результату, который и является решением исходного стационарного уравнения.

Глава 3

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение вязкой ньютоновской жидкости, называется уравнениями Навье–Стокса.

Существует большое количество численных методов решения уравнений Навье–Стокса. Автор не ставил задачей дать обзор и сравнительное описание этих методов.

В этой главе представлены:

– некоторые особенности, присущие уравнениям Навье–Стокса с точки зрения их численного решения;

– основные требования к численному решению уравнений Навье–Стокса.

Построен численный метод, который был практически реализован в виде программ на языках FORTRAN-90 и C++ (программа UNIVERSE-CFD).

3.1. ОБЩИЙ ВИД СИСТЕМЫ. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

В главе 1 была представлена система основных дифференциальных уравнений динамики вязкой жидкости в различных системах координат. Она включает уравнение неразрывности, уравнения количества движения, уравнение энергии.

По своей форме уравнения количества движения и уравнение энергии очень похожи на дифференциальное уравнение теплопроводности с источником тепла.

Это сходство наводит на мысль, что для решения этих уравнений можно использовать такой же метод, как для решения дифференциального уравнения теплопроводности. Причем каждое из

этих уравнений можно решать отдельно, последовательно друг за другом.

Действительно, если задано поле давления, такой подход дает хорошие результаты. В этом случае член, содержащий градиент давления, рассматривается как заданный источник.

А что же делать, если поле давления не задано и его требуется определить на основе решения системы уравнений?

Первое, что приходит в голову, это использование итеративного процесса. Например:

1) задать в первом приближении поле давления;

2) решить уравнения количества движения и энергии, используя это поле давления как заданный источник, и получить распределение скорости;

3) определить поле плотности, решая уравнение неразрывности;

4) по уравнению состояния определить поле давления и вернуться ко 2-му пункту данного алгоритма.

К сожалению, этот алгоритм редко сходится. Приходится прибегать к различным ухищрениям, например, к использованию шахматной сетки, дополнительных уравнений для поправок скоростей и давления и т.д. Подробно эти подходы разобраны в книге Патанкара [1].

Практика последних лет показывает, что наиболее эффективным является подход, основанный не на последовательном решении каждого уравнения, входящего в систему уравнений Навье–Стокса, а на решении *одного* уравнения с *одной неизвестной* величиной. Только эта неизвестная величина является не скалярной функцией, а векторной. Соответственно, коэффициенты, входящие в полученное уравнение, тоже не скаляры, а матрицы.

В этом случае отпадает необходимость сначала находить одну неизвестную величину (например скорость), потом другую (например давление), а потом искать способы их как-то связать.

Все неизвестные рассматриваются как единое целое и определяются в результате решения уравнения *одновременно.*

Такой подход имеет глубокий физический смысл: в реальном газовом потоке все газодинамические и термодинамические параметры тесно связаны между собой; любое изменение одного параметра вызывает неизбежное изменение других. Таким образом, эти параметры является *единым целым* и расщепление при численном

решении на отдельные части противоречит физическому смыслу процесса.

Этот метод требует существенного усложнения математического аппарата, но достигаемая эффективность с лихвой оправдывает это усложнение.

3.2. ВЕКТОРНАЯ ФОРМА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Для декартовой системы координат (x,y,z) все уравнения, входящие в систему уравнений Навье-Стокса, можно записать в следующей общей форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=0. \tag{3.1}$$

1. В уравнении неразрывности через U,F,G,H обозначены

$$U_1=\rho,\quad F_1=\rho u,\quad G_1=\rho v,\quad H_1=\rho w. \tag{3.2}$$

2. В проекциях уравнения количества движения на оси x,y,z через U,F,G,H обозначены соответственно:

$$\begin{aligned}
&U_2=\rho u,\quad F_2=\rho u^2+p-\tau_{xx},\quad G_2=\rho uv-\tau_{xy},\quad H_2=\rho uw-\tau_{xz};\\
&U_3=\rho v,\quad F_3=\rho vu-\tau_{yx},\quad G_3=\rho v^2+p-\tau_{yy},\quad H_3=\rho vw-\tau_{yz};\\
&U_4=\rho w,\quad F_4=\rho wu-\tau_{zx},\quad G_4=\rho wv-\tau_{zy},\quad H_4=\rho w^2+p-\tau_{zz}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

3. В уравнении энергии через U,F,G,H обозначены

$$\begin{aligned}
U_5&=\rho E,\ F_5=\rho u\left(E+p/\rho\right)-u\tau_{xx}-v\tau_{yx}-w\tau_{zx}+q_x;\\
G_5&=\rho v\left(E+p/\rho\right)-u\tau_{xy}-v\tau_{yy}-w\tau_{zy}+q_y;\\
H_5&=\rho w\left(E+p/\rho\right)-u\tau_{xz}-v\tau_{yz}-w\tau_{zz}+q_z.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Компоненты тензора вязких напряжений и вектора плотности теплового потока выражаются по формулам:

$$\tau_{xx}=\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right)=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

$$\tau_{yy}=\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right)=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

$$\tau_{zz}=\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right)=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right);$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right); \tag{3.5}$$

$$q_x=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x},\quad q_y=-\lambda\frac{\partial T}{\partial y},\quad q_z=-\lambda\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{3.6}$$

Здесь использованы следующие обозначения: ρ – плотность; u,v,w – компоненты вектора скорости в проекциях на оси x,y,z соответственно; p – давление; E – полная внутренняя энергия; $\frac{\partial u_m}{\partial x_m}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ – дивергенция скорости; μ – коэффициент динамической вязкости; λ – коэффициент теплопроводности.

Удельная внутренняя энергия e связана с полной внутренней энергией E соотношением

$$e=E-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right). \tag{3.7}$$

Выражения U_1,U_2,U_3,U_4,U_5 можно рассматривать как компоненты некоторого 5-мерного вектора $\boldsymbol{U}$ (представленного в транспонированном виде)

$$\boldsymbol{U}=\left[\rho,\rho u,\rho v,\rho w,\rho E\right]^T. \tag{3.8}$$

Аналогично с использованием формул (3.2)–(3.4) строятся векторы $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p-\tau_{xx}\\ \rho vu-\tau_{yx}\\ \rho wu-\tau_{zx}\\ \begin{pmatrix}\rho uH-u\tau_{xx}-v\tau_{yx}\\ -w\tau_{zx}+q\end{pmatrix}_x\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv-\tau_{xy}\\ \rho v^2+p-\tau_{yy}\\ \rho wv-\tau_{zy}\\ \begin{pmatrix}\rho vH-u\tau_{xy}-v\tau_{yy}\\ -w\tau_{zy}+q_y\end{pmatrix}\end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ \begin{pmatrix} \rho wH - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} \\ -w\tau_{zz} + q_z \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \qquad (3.9)$$

Использование этих векторов позволяет рассматривать уравнение (3.1) Для идеального газа:

$$e = C_V T, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}, \quad R = C_P - C_V = (\gamma - 1)C_V,$$

$$p = \rho RT = (\gamma - 1)C_V T\rho = (\gamma - 1)e\rho, \quad H = E + \frac{p}{\rho}, \qquad (3.10)$$

где C_P, C_V – удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно; γ – показатель адиабаты; R – газовая постоянная.

3.3. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ЧИСЛЕННОМУ МЕТОДУ

При построении численного метода решения основной системы уравнений Навье–Стокса желательно выполнение следующих требований.

1. Порядок аппроксимации по пространственным координатам должен быть не ниже второго.

Схемы первого порядка очень диссипативны, при их использовании происходит «размывание» газодинамических параметров. Тем не менее, при расчете течений с разрывами, например со скачками уплотнения, в районах скачков аппроксимация первого порядка дает более физичные результаты, чем аппроксимации высоких порядков.

2. Отсутствие ограничений на величину шага по времени.

Явные разностные схемы имеют жесткие ограничения на шаг по времени из-за требования устойчивости.

При решении стационарных задач методом установления это приводит к необходимости огромного количества итераций и больших затрат компьютерных ресурсов. Для сложных задач аэродинамики и термогазодинамики это совершенно недопустимо. Необходимо использовать неявные схемы. Хотя с математической точки зрения они намного сложнее явных, зато при их использовании нет ограничений на шаг по времени, и число итераций сокращается на порядки.

Для нестационарных задач неявные методы также гораздо более эффективны, чем явные.

3. Численная вязкость должна отсутствовать или быть минимальной.

Вопросу численной вязкости будет посвящен следующий параграф.

4. При расчете стационарных задач методом установления полученное решение не должно зависеть от шага по времени Δt.

С этой точки зрения могут возникнуть проблемы при использовании схем расщепления, метода переменных направлений, схем типа предиктор-корректор. Дело в том, что во всех этих схемах фактически присутствует чередование разных методов решения. При приближении к равновесию один из этих методов уже может отвечать критерию сходимости, а другой – нет. В ряде случаев вообще не удается достичь необходимого критерия сходимости по всех этим методам.

5. Разностная схема должна быть полностью консервативной, что гарантирует отсутствие потерь массы, энергии и количества движения.

Таким образом, в основе построения разностной схемы предпочтительнее метод контрольных объемов, чем метод конечных разностей.

3.4. ИСКУССТВЕННАЯ ВЯЗКОСТЬ

Суть явления искусственной или схемной вязкости хорошо излагается в книге Патанкара [1] и состоит в том, что при численной аппроксимации основных уравнений появляются дополнительные члены, оказывающие диссипативное воздействие на численное решение.

Можно сделать следующие замечания по поводу искусственной вязкости.

1. Искусственная вязкость имеет место, когда поток наклонен по отношению к линиям сетки и существует ненулевой градиент зависимой переменной в направлении по нормали к потоку.

2. Приближенное выражение для коэффициента искусственной вязкости в двумерном случае дано в [1]:

$$\Gamma_a = \frac{\rho U \Delta x \Delta y \sin(2\theta)}{4\left(\Delta y \sin^3\theta + \Delta x \cos^3\theta\right)}, \qquad (3.11)$$

где U – модуль вектора скорости; θ – угол наклона (от 0 до 90°) вектора скорости к направлению оси x. Из этого уравнения видно, что искусственная вязкость не появляется, если результирующий поток направлен вдоль одной из сеточных линий; кроме того, искусственная вязкость является максимальной, когда направление потока составляет угол 45° с линиями сетки.

3. Вклад искусственной вязкости можно уменьшить, используя меньшие шаги Δx и Δy и располагая сетку (если это возможно) так, чтобы сеточные линии более или менее совпадали с направлением потока.

4. Поскольку реальная вязкость имеет место во многих задачах, то достаточно сделать искусственную вязкость малой по сравнению с реальной.

5. Основной причиной возникновения искусственной вязкости является практика обращения с потоком через каждую грань контрольного объема как с локально-одномерным. Схемы, которые обеспечили бы меньший вклад искусственной вязкости, должны учитывать многомерную природу потока. Для этого также необходимо включать большее число соседних точек в дискретный аналог.

В заключение отметим, что искусственная вязкость носит не только негативный характер. Как будет показано далее, ее добавление в численную схему позволяет улучшить сходимость решения и погасить нежелательные нефизичные осцилляции решения в районах скачков уплотнения. Однако это добавление должно быть контролируемо и носить узколокальный характер.

Более подробную информацию по поводу искусственной вязкости можно найти в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/3_4.pdf

3.5. КОНЕЧНО-ОБЪЕМНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Если представить, что параметры F,G,H, входящие в основное уравнение (3.1), являются компонентами некоторого вектора $\vec{F}$ в системе координат (x,y,z), то это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{F} = 0. \tag{3.12}$$

Проинтегрируем это выражение по некоторому неподвижному объему V:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V U dV + \iiint_V \operatorname{div}\vec{F} dV = 0. \tag{3.13}$$

Здесь учитывается, что, так как объем неподвижен, то

$$\iiint_V \frac{\partial U}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V U dV. \tag{3.14}$$

Используя теорему Гаусса–Остроградского, получаем, что для любого контрольного объема V с поверхностью S

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V U dV + \oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n} dS = 0, \tag{3.15}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный наружу по нормали к поверхности рассматриваемого объема; $\vec{n}dS$ – векторный элемент поверхности с нормалью $\vec{n}$; $\vec{F}$ – вектор вязких и невязких потоков консервативной величины U, проходящих через поверхность объема.

Рассмотрим в качестве объема V контрольный объем, имеющий форму параллелепипеда со сторонами, параллельными осям x,y,z соответственно $(V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z)$. Двумерный вариант этого контрольного объема на плоскости $0xy$ показан на рис. 3.1 (заштрихованный участок).

Интегрирование (3.15) по такому объему с учетом того, что $\vec{F} = (F, G, H)$, дает следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V U dV + \iint\limits_{\Delta y \Delta z} \left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right) dydz + \iint\limits_{\Delta x \Delta z} \left(G_{j+1/2} - G_{j-1/2}\right) dxdz + \\ + \iint\limits_{\Delta x \Delta y} \left(H_{k+1/2} - H_{k-1/2}\right) dxdy = 0. \qquad (3.16)$$

Индексы i,j,k нумеруют ячейки контрольных объемов по осям x,y,z соответственно. Индекс $i+1/2$ в функции $F_{i+1/2}$ означает, что эта функция берется на грани, разделяющей ячейки (i,j,k) и $(i+1,j,k)$. Аналогично, индекс $i-1/2$ относится к грани, разделяющей ячейки $(i-1,j,k)$ и (i,j,k), индекс $j-1/2$ относится к грани, разделяющей ячейки $(i,j-1,k)$ и (i,j,k), и т.д.

Основное допущение состоит в том, что каждый поток постоянен по всей грани, т.е., например, для потока вдоль оси x справедливо:

$$\iint\limits_{\Delta y \Delta z} \left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right) dydz = \left(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right) \Delta y \Delta z. \qquad (3.17)$$

Кроме того, полагаем, что

$$\iiint\limits_V U dV \cong U_{i,j,k} V = U_{i,j,k} \Delta x \Delta y \Delta z, \qquad (3.18)$$

где $U_{i,j,k}$ – значение U в центре ячейки (i,j,k).

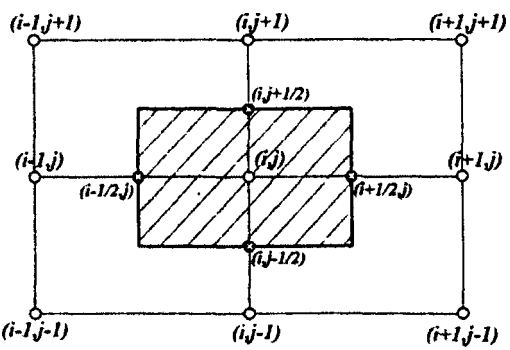

Рис. 3.1. Контрольный объем (заштрихованная область) для двумерной задачи

Тогда уравнение (3.16) принимает вид

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j,k} + \frac{F_{i+1/2,j,k} - F_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2,k} - G_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} + \frac{H_{i,j,k+1/2} - H_{i,j,k-1/2}}{\Delta z} = 0. \tag{3.19}$$

Это уравнение является основой для методов численного решения уравнений Навье–Стокса.

Обозначим через δU^{n+1} приращения вектора U при переходе от n-го шага по времени к $(n+1)$-му шагу

$$\delta U^{n+1} = U^{n+1} - U^n. \tag{3.20}$$

На каждом шаге по времени стоит задача определения U^{n+1} по известным значениям U^n.

Потоки F,G,H являются функциями U:

$$F = F(U), \quad G = G(U), \quad H = H(U). \tag{3.21}$$

Нетрудно показать, что для этих векторных функций справедливы те же формулы дифференциального исчисления, что и для обычных функций. В частности, можно выразить потоки на $(n+1)$-м шаге через потоки на n-м шаге с помощью разложения в ряд Тейлора относительно приращения δU^{n+1}:

$$F^{n+1} = F^n + \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)^n \delta U^{n+1}, \quad G^{n+1} = G^n + \left(\frac{\partial G}{\partial U}\right)^n \delta U^{n+1}, \quad H^{n+1} = H^n + \left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)^n \delta U^{n+1}. \tag{3.22}$$

Здесь $\frac{\partial F}{\partial U}, \frac{\partial G}{\partial U}, \frac{\partial H}{\partial U}$ – матрицы Якоби функций, входящих в векторы F,G,H, в пространстве функций, входящих в U. Например,

$$\frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial U_5} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial U_5} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_5}{\partial U_1} & \frac{\partial F_5}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_5}{\partial U_5} \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Члены, содержащие производные выше первой, в формулах (3.22) отброшены.

Выразим потоки, входящие в уравнение (3.19), как линейную комбинацию значений на n-м и $(n+1)$-м шагах по времени:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= (1-\alpha)\boldsymbol{F}^n + \alpha\boldsymbol{F}^{n+1} = \boldsymbol{F}^n + \alpha\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n \delta\boldsymbol{U}^{n+1},\\
\boldsymbol{G} &= (1-\alpha)\boldsymbol{G}^n + \alpha\boldsymbol{G}^{n+1} = \boldsymbol{G}^n + \alpha\left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n \delta\boldsymbol{U}^{n+1},\\
\boldsymbol{H} &= (1-\alpha)\boldsymbol{H}^n + \alpha\boldsymbol{H}^{n+1} = \boldsymbol{H}^n + \alpha\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n \delta\boldsymbol{U}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Здесь α – параметр, характеризующий порядок точности представления производной по времени. Если $\alpha = 0.5$, порядок равен 2, и схема подобна схеме Кранка–Николсона; при $\alpha = 1$ получается чисто неявная схема; значение $\alpha > 1$ дает завышенную релаксацию, но это может улучшать сходимость метода.

Подстановка формул (3.20), (3.24) в уравнение (3.19) позволяет получить конечно-объемную аппроксимацию основного уравнения (3.1):

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta U^{n+1}_{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n_{i+1/2,j,k} \delta U^{n+1}_{i+1/2,j,k} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n_{i-1/2,j,k} \delta U^{n+1}_{i-1/2,j,k}\right] +\\
&+\frac{\alpha}{\Delta y}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n_{i,j+1/2,k} \delta U^{n+1}_{i,j+1/2,k} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n_{i,j-1/2,k} \delta U^{n+1}_{i,j-1/2,k}\right] +\\
&+\frac{\alpha}{\Delta z}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n_{i,j,k+1/2} \delta U^{n+1}_{i,j,k+1/2} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n_{i,j,k-1/2} \delta U^{n+1}_{i,j,k-1/2}\right] =\\
&= -\left(\frac{\boldsymbol{F}^n_{i+1/2,j,k} - \boldsymbol{F}^n_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} + \frac{\boldsymbol{G}^n_{i,j+1/2,k} - \boldsymbol{G}^n_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} + \frac{\boldsymbol{H}^n_{i,j,k+1/2} - \boldsymbol{H}^n_{i,j,k-1/2}}{\Delta z}\right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Для того чтобы получить из (3.25) замкнутую систему линейных алгебраических уравнений, необходимо выразить неизвестную функцию $\boldsymbol{U}$ на гранях контрольного объема через значения $\boldsymbol{U}$ в узловых точках.

К сожалению, эта операция является отнюдь не тривиальной и требует существенных усложнений и без того громоздкого разностного уравнения (3.25).

3.6. РАСЩЕПЛЕНИЕ ПОТОКОВ

Для того чтобы лучше понять разностное представление членов, учитывающих конвективный перенос, рассмотрим упрощенную задачу:

1) вязкие члены не учитываются;
2) течение является одномерным по пространственной координате.

В этом случае основное уравнение (3.1) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_C}{\partial x}=0. \tag{3.26}$$

Напомним, что под U, F здесь подразумеваются векторные величины, заданные формулами (3.8) и (3.9). При этом в F_C входят только конвективные члены, а члены, содержащие вязкие напряжения и тепловой поток, не учитываются.

3.7. МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим скалярный аналог уравнения (3.26)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0, \tag{3.27}$$

где u, f – обычные функции, причем $f=f(u)$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad c=\frac{\partial f}{\partial u}. \tag{3.28}$$

В главе 2 было показано, что для такого типа уравнений устойчивыми могут быть только следующие разностные схемы:

$$\begin{aligned} &\frac{\delta u_i}{\Delta t}+c\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}=0, \quad c>0; \\ &\frac{\delta u_i}{\Delta t}+c\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}=0, \quad c<0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

(Более строго будет сказать, что при значениях $c>0$ использование «разности вперед» для аппроксимации производной по x при-

водит к заведомо неустойчивой разностной схеме, и, наоборот, при $c<0$ неустойчивой будет схема с использованием «разности назад».)

Эти условия имеют глубокий физический смысл. Дело в том, что параметр c, входящий в уравнение(3.28), имеет смысл скорости. Если $c>0$, то скорость потока направлена слева направо, т.е. точка $(i+1)$ находится ниже по потоку, чем точка (i). Исходя из этого, можно предположить, что параметры в точке $(i+1)$ вряд ли влияют на изменения параметров в точке (i). Использование второй формулы из (3.29) (разность вперед), таким образом, в этом случае противоречит физическому смыслу задачи.

Аналогичные рассуждения показывают, что при $c<0$ (поток движется справа налево) первая формула из (3.29) противоречит физическому смыслу.

Разностные аппроксимации пространственных производных, в которые входят только параметры узлов, находящихся выше по потоку, или параметры самой рассматриваемой точки, называются *разностями против потока*, а схемы, их использующие, называются *схемами с разностями против потока (течения)*.

В книге [1] представлена наглядная физическая иллюстрация схемы против потока. Схема основывается на модели бак-труба. Как показано на рис. 3.2, контрольные объемы можно представить как серию отдельных баков с перемешивающейся в них жидкостью, которые соединяются с помощью коротеньких трубок. Течение через трубки представляет собой конвекцию. Так как жидкость в баках перемешивается, то каждый бак имеет однородное температурное поле. Предположим, что жидкость, текущая в каждой соединительной трубке, имеет температуру, равную температуре в баке со стороны против потока. Обычно жидкость в трубке ничего не должна «знать» о баке, по направлению к которому она течет, но должна нести полную информацию о баке, из которого она поступает. Это является сутью схемы против потока (см. рис. 3.2).

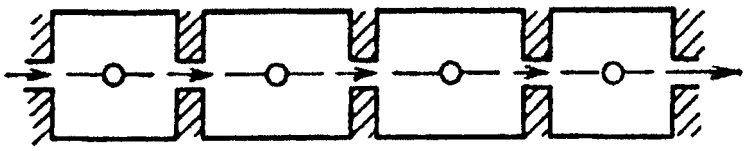

Рис. 3.2. Модель бак-труба

Исходя из изложенных соображений, разностный аналог уравнения (3.27) должен иметь следующий вид:

$$\frac{\delta u_i}{\Delta t}+\frac{cu_{i+1/2}-cu_{i-1/2}}{\Delta x}=0, \tag{3.30}$$

где

$$cu_{i+1/2}=c_+u_i+c_-u_{i+1},\quad cu_{i-1/2}=c_+u_{i-1}+c_-u_i,\quad c_+=\max(c,0),$$
$$c_-=\min(c,0). \tag{3.31}$$

В этом случае при любом знаке c получается схема с разностями против потока. Действительно, подставив (3.31) в (3.30), получим

$$\frac{\delta u_i}{\Delta t}+\frac{c_+(u_i-u_{i-1})}{\Delta x}+\frac{c_-(u_{i+1}-u_i)}{\Delta x}=0. \tag{3.32}$$

3.8. ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

Попробуем распространить полученный результат на векторное уравнение (3.26).

Матрица Якоби $A=\dfrac{\partial F_C}{\partial U}$ может быть диагонализирована с помощью преобразований подобия:

$$A=(S_A)^{-1}\Lambda_A S_A, \tag{3.33}$$

где S_A – матрица перехода, $(S_A)^{-1}$ – обратная ей матрица; Λ_A – диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы A. Конкретный вид всех этих матриц, а также необходимые сведения из линейной алгебры будут приведены в следующем параграфе.

Из (3.26) получаем с учетом (3.33)

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F_C}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial t}+(S_A)^{-1}\Lambda_A S_A\frac{\partial U}{\partial x}=0. \tag{3.34}$$

При переходе от n-го к $(n+1)$-му шагу по времени матрицы S_A и $(S_A)^{-1}$ выражаются через значения параметров на n-м шаге в рассматриваемом узле и могут считаться постоянными на этом перехо-

де в этом узле. Поэтому, домножая последнее уравнение (3.34) на S_A, получаем

$$\frac{\partial(S_A U)}{\partial t}+\Lambda_A\frac{\partial(S_A U)}{\partial x}=0 \tag{3.35}$$

или

$$\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial t}+\Lambda_A\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial x}=0,\quad \widetilde{U}=S_A U. \tag{3.36}$$

Поскольку Λ_A является диагональной матрицей с элементами $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)$, то векторное дифференциальное уравнение можно разбить на 5 отдельных независимых обычных уравнений:

$$\frac{\partial u_l}{\partial t}+\lambda_l\frac{\partial u_l}{\partial x}=0,\quad l=1,2,3,4,5. \tag{3.37}$$

Каждое из этих уравнений по форме и по сути совпадает с модельным уравнением (3.28), и поэтому для его решения используется такое же разностное уравнение, как и (3.32):

$$\frac{\delta u_i}{\Delta t}+\frac{\lambda_+(u_i-u_{i-1})}{\Delta x}+\frac{\lambda_-(u_{i+1}-u_i)}{\Delta x}=0, \tag{3.38}$$

где

$$\lambda_+=\max(\lambda,0),\quad \lambda_-=\min(\lambda,0). \tag{3.39}$$

Здесь индекс l, нумерующий уравнения, для простоты записи опущен.

Составим диагональные матрицы

$$\Lambda_{A+}=\begin{pmatrix}\lambda_{1+}&0&0&0&0\\0&\lambda_{2+}&0&0&0\\0&0&\lambda_{3+}&0&0\\0&0&0&\lambda_{4+}&0\\0&0&0&0&\lambda_{5+}\end{pmatrix},\quad \Lambda_{A-}=\begin{pmatrix}\lambda_{1-}&0&0&0&0\\0&\lambda_{2-}&0&0&0\\0&0&\lambda_{3-}&0&0\\0&0&0&\lambda_{4-}&0\\0&0&0&0&\lambda_{5-}\end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

которые содержат только положительные и отрицательные элементы матрицы Λ_A соответственно.

Используя это обозначение, все пять разностных уравнений (3.38) можно свести к единой векторной форме

$$\frac{\delta\widetilde{U}_i}{\Delta t}+\Lambda_{A+}\frac{\left(\widetilde{U}_i-\widetilde{U}_{i-1}\right)}{\Delta x}+\Lambda_{A-}\frac{\left(\widetilde{U}_{i+1}-\widetilde{U}_i\right)}{\Delta x}=0. \qquad (3.41)$$

Подставляем в это выражение $\widetilde{U}=S_A U$ и домножаем его на $(S_A)^{-1}$:

$$\frac{\delta U_i}{\Delta t}+(S_A)^{-1}\Lambda_{A+}S_A\frac{(U_i-U_{i-1})}{\Delta x}+(S_A)^{-1}\Lambda_{A-}S_A\frac{(U_{i+1}-U_i)}{\Delta x}=0. \qquad (3.42)$$

Вводим обозначения

$$A_+=(S_A)^{-1}\Lambda_{A+}S_A;\quad A_-=(S_A)^{-1}\Lambda_{A-}S_A \qquad (3.43)$$

и получаем следующую разносную аппроксимацию уравнения (3.26):

$$\frac{\delta U_i}{\Delta t}+\frac{\left(A_+U_i+A_-U_{i+1}\right)-\left(A_+U_{i-1}+A_-U_i\right)}{\Delta x}=0. \qquad (3.44)$$

В предыдущем параграфе была выведена формула для аппроксимации основной системы уравнений в контрольном объеме (3.19). Для рассматриваемого случае эта формула имеет вид

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{i,j,k}+\frac{(F_C)_{i+1/2,j,k}-(F_C)_{i-1/2,j,k}}{\Delta x}=0. \qquad (3.45)$$

Сравнивая это выражение с (3.44), получаем, что для обеспечения необходимого условия устойчивости конвективные потоки на гранях контрольного объема следует аппроксимировать формулами

$$\begin{aligned}(F_C)_{i+1/2,j,k}&=A_+U_{i,j,k}+A_-U_{i+1,j,k},\\(F_C)_{i-1/2,j,k}&=A_+U_{i-1,j,k}+A_-U_{i,j,k}.\end{aligned} \qquad (3.46)$$

Полученный результат можно интерпретировать схемой, изображенной на рис. 3.3. На грань $(i+1/2,j,k)$ в момент времени $t=t^n$ приходит слева из точки (i,j,k) часть конвективного потока,

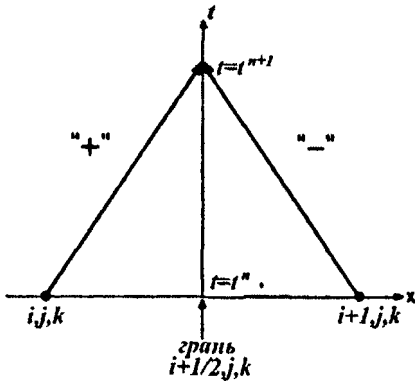

Рис. 3.3. Направления распространения влияния параметров течения на грань $(i+1/2,j,k)$

определяемая формулой $A_+U_{i,j,k}$, а справа из точки $(i+1,j,k)$ приходит часть потока, определяемая формулой $A_-U_{i+1,j,k}$.

Если, например, все собственные значения матрицы A – $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)$ являются положительными, то матрица Λ_{A-} и, соответственно, матрица A_- состоят только из нулевых элементов. В этом случае влияние на параметры грани $(i+1/2,j,k)$ оказывают только узлы, находящиеся левее этой грани.

Полученную важную формулу (3.46) можно записать в более общем виде. Для грани $(i+1/2,j,k)$ это

$$(F_C)_{i+1/2,j,k} = A_+U_L + A_-U_R, \tag{3.47}$$

где U_L – некоторое значение вектора U левее этой грани, а U_R – значение вектора U правее этой грани.

Существует несколько способов определения параметров, входящих в формулу (3.47).

Для правых U_R и левых U_L используются следующие аппроксимации.

1. Формула (3.46) имеет первый порядок аппроксимации. В этом случае

$$U_L = U_i, \quad U_R = U_{i+1}. \tag{3.48}$$

2. Аппроксимация второго порядка против потока

$$U_L = \frac{1}{2}(3U_i - U_{i-1}), \quad U_R = \frac{1}{2}(3U_{i+1} - U_{i+2}). \tag{3.49}$$

3. Аппроксимация третьего порядка против потока

$$U_L = \frac{1}{8}(3U_{i+1} + 6U_i - U_{i-1}), \quad U_R = \frac{1}{8}(3U_i + 6U_{i+1} - U_{i+2}). \tag{3.50}$$

(Индексы j,k в этих формулах для простоты записи опущены, но подразумеваются.)

Матрицы A_+, A_- тоже можно рассчитывать по-разному.

1. Расщепление Стеджера–Уорминга [6]:

$$A_+ = A_+(U_L), \quad A_- = A_-(U_R). \tag{3.51}$$

Считается, что такое представление обладает повышенной схемной вязкостью и плохо описывает течение в пограничном слое.

Поэтому чаще используется другое представление.

2. Модифицированное расщепление Стеджера–Уорминга [5]:

$$A_+ = A_+(U_{LR}), \quad A_- = A_-(U_{LR}), \tag{3.52}$$

где $U_{LR} = \dfrac{U_L + U_R}{2}$.

Считается, что такое расщепление потока менее диссипативно, но в районах сильных скачков уплотнения может стать непригодным.

3. Расщепление Ройе [5]:

$$(F_C)_{i+1/2} = \frac{(F_C)_L + (F_C)_R}{2} - \frac{1}{2}\hat{A}_{i+1/2}(U_R - U_L), \tag{3.53}$$

где $\hat{A}_{i+1/2} = A(U_{LR}), \quad U_{LR} = \dfrac{U_L + U_R}{2}$.

В заключение этого раздела отметим, что в конечно-объемном уравнении (3.19) конвективные потоки G и H на гранях контрольного объема моделируются абсолютно так же, как поток F. Только используются в этом случае матрицы Якоби $B = \dfrac{\partial G_C}{\partial U}$ и $C = \dfrac{\partial H_C}{\partial U}$ соответственно.

3.9. МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА, СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Напомним некоторые определения из линейной алгебры, которые имеют отношение к рассматриваемой проблеме.

Пусть L – линейное пространство над полем K, $A: L \to L$ – линейное преобразование.

Собственным вектором линейного преобразования A называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого $\lambda \in K$

$$Ax = \lambda x. \tag{3.54}$$

Собственным значением линейного преобразования A называется такое число $\lambda \in K$, для которого существует собственный вектор, т.е. уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение $x \in L$.

Упрощённо говоря, собственный вектор – это любой ненулевой вектор x, который отображается оператором в коллинеарный λx, а соответствующий скаляр λ называется собственным значением оператора.

Для определения собственных чисел достаточно решить относительно λ уравнение

$$\det(A - \lambda I) = 0, \tag{3.55}$$

где $\det(A - \lambda I)$ – определитель матрицы $(A - \lambda I)$; A – матрица линейного преобразования; I – единичная матрица.

Для получения представления (3.33) $A = (S_A)^{-1} \Lambda_A S_A$ необходимо провести следующие операции:

1) определение матрицы $A = \dfrac{\partial F_C}{\partial U}$;

2) определение ее собственных значений;

3) определение соответствующих собственных векторов;

4) построение матрицы $(S_A)^{-1}$, каждый столбец которой состоит из компонент собственных векторов;

5) получение матрицы S_A обращением матрицы $(S_A)^{-1}$.

Все эти операции подробно описаны в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/3_9.pdf

Здесь приводятся только окончательные формулы.

$$A = \frac{\partial F_C}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta - u^2 & u(2-\gamma) & -\beta v & -\beta w & \beta \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ u(\alpha\beta - H) & H - \beta u^2 & -\beta uv & -\beta uw & \gamma u \end{pmatrix}; \tag{3.56}$$

$$\Lambda_A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (u+a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (u-a) \end{pmatrix}; \tag{3.57}$$

$$S_A = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\alpha\beta}{a^2} & \dfrac{\beta u}{a^2} & \dfrac{\beta v}{a^2} & \dfrac{\beta w}{a^2} & -\dfrac{\beta}{a^2} \\ \alpha\beta - ua & a-\beta u & -\beta v & -\beta w & \beta \\ -\dfrac{v}{\rho} & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\dfrac{w}{\rho} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ \alpha\beta + ua & -a-\beta u & -\beta v & -\beta w & \beta \end{pmatrix};$$

$$(S_A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2a^2} & 0 & 0 & \dfrac{1}{2a^2} \\ u & \dfrac{u+c}{2a^2} & 0 & 0 & \dfrac{u-c}{2a^2} \\ v & \dfrac{v}{2a^2} & \rho & 0 & \dfrac{v}{2a^2} \\ w & \dfrac{w}{2a^2} & 0 & \rho & \dfrac{w}{2a^2} \\ \alpha & \dfrac{\alpha+uc}{2a^2}+\dfrac{1}{2\beta} & \rho v & \rho w & \dfrac{\alpha-ua}{2a^2}+\dfrac{1}{2\beta} \end{pmatrix}. \qquad (3.58)$$

Здесь используются следующие обозначения: $\alpha = \frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)$; $\beta = \gamma - 1$; $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ – скорость звука.

Полученные собственные значения матрицы A имеют глубокий физический смысл. Фактически они характеризуют *распространение воздействия* в потоке сжимаемой жидкости в направлении оси x. Любая точка потока может распространять свое воздействие на окружающее пространство следующим образом:

- со скоростью u за счет перемещения самого потока – вниз по потоку;
- со скоростью $u+a$ за счет перемещения самого потока и распространения звуковых колебаний – вниз по потоку;
- со скоростью $u-a$ за счет распространения звуковых колебаний; если скорость u превышает скорость звука a, это воздействие сносится вниз и воздействие вверх по потоку отсутствует.

3.10. РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

С учетом всех полученных результатов запишем конечно-объемное представление задачи, предложенной в разделе 3.5.

Напомним, что мы рассматривали задачу одномерного течения невязкого газа, описываемую уравнением (3.26):

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_C}{\partial x}=0.$$

Разностное представление этого уравнение в контрольном объеме описывается формулой (3.45):

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)_{i,j,k}+\frac{(\boldsymbol{F}_C)_{i+1/2,j,k}-(\boldsymbol{F}_C)_{i-1/2,j,k}}{\Delta x}=0.$$

И, наконец, конвективные потоки $\boldsymbol{F}_C$ на гранях контрольного объема задаются формулами (3.47):

$$(\boldsymbol{F}_C)_{i+1/2,j,k}=\boldsymbol{A}_+\boldsymbol{U}_L+\boldsymbol{A}_-\boldsymbol{U}_R. \tag{3.59}$$

Используем введенное ранее обозначение приращения вектора $\boldsymbol{U}$ при переходе от n-го шага по времени к $(n+1)$-му шагу через $\delta\boldsymbol{U}^{n+1}$ и неявное представление потоков в виде формулы (3.24):

$$\boldsymbol{F}_C=\boldsymbol{F}_C{}^n+\alpha\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_C}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^n\delta\boldsymbol{U}^{n+1}=\boldsymbol{F}_C{}^n+\alpha\boldsymbol{A}^n\delta\boldsymbol{U}^{n+1}. \tag{3.60}$$

Для грани $(i+1/2,j,k)$ это представление с учетом расщепления потока по формуле (3.59) имеет вид

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{F}_C)_{i+1/2,j,k}&=(\boldsymbol{A}_+\boldsymbol{U}_L)^n_{i+1/2,j,k}+(\boldsymbol{A}_-\boldsymbol{U}_R)^n_{i+1/2,j,k}+\\&+\alpha\left[(\boldsymbol{A}_+)^n_{i+1/2,j,k}(\delta\boldsymbol{U}_L)^{n+1}_{i+1/2,j,k}+(\boldsymbol{A}_-)^n_{i+1/2,j,k}(\delta\boldsymbol{U}_R)^{n+1}_{i+1/2,j,k}\right].\end{aligned} \tag{3.61}$$

Для конвективных потоков слева $\boldsymbol{U}_L$ и справа $\boldsymbol{U}_R$ используются формулы (3.48)–(3.50).

В работе [5] показано, что можно использовать для $\boldsymbol{U}_L$ и $\boldsymbol{U}_R$ в явной части представления (3.61) аппроксимации 2-го или 3-го порядка (формулы (3.49) или (3.50)), а для неявной части – аппроксимацию 1-го порядка, как более простую. При решении задач методом установления такой подход гарантирует аппроксимацию 2-го

или 3-го порядка соответственно по пространственной координате. В этом случае получаем:

$$(F_C)_{i+1/2,j,k} = (F_C)^n_{i+1/2,j,k} + \alpha\left[(A_+)^n_{i+1/2,j,k}\,\delta U^{n+1}_{i,j,k} + (A_-)^n_{i+1/2,j,k}\,\delta U^{n+1}_{i+1,j,k}\right];$$
$$(F_C)_{i-1/2,j,k} = (F_C)^n_{i-1/2,j,k} + \alpha\left[(A_+)^n_{i-1/2,j,k}\,\delta U^{n+1}_{i-1,j,k} + (A_-)^n_{i-1/2,j,k}\,\delta U^{n+1}_{i,j,k}\right], \tag{3.62}$$

где для явных представлений $(F_C)^n_{i+1/2,j,k}, (F_C)^n_{i-1/2,j,k}$ используются формулы (3.49) или (3.50).

Подставляем (3.62) в исходную формулу (3.45) и получаем систему алгебраических уравнений для определения приращения $\delta U^{n+1}_{i,j,k}$:

$$A_{i,j}\delta U^{n+1}_{i,j,k} + D_{i,j}\delta U^{n+1}_{i+1,j,k} + E_{i,j}\delta U^{n+1}_{i-1,j,k} = \Delta U^{n+1}_{i,j,k}, \tag{3.63}$$

где

$$\Delta U^{n+1}_{i,j,k} = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(F_C)^n_{i+1/2,j,k} - (F_C)^n_{i-1/2,j,k}\right] \tag{3.64}$$

– приращение вектора U при переходе от n-го шага по времени к $(n+1)$-му шагу, представленное в явной форме,

$$A_{i,j} = I + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}(A_+)^n_{i+1/2,j,k} - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}(A_-)^n_{i-1/2,j,k};$$
$$D_{i,j} = +\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}(A_-)^n_{i+1/2,j,k}; \quad E_{i,j} = -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}(A_+)^n_{i-1/2,j,k}. \tag{3.65}$$

Уравнение, вернее, система (3.63) по форме совпадает с системой (5.8) из главы 2, и для ее решения можно использовать эффективный метод прогонки. Единственное, но существенное отличие состоит в том, что в данном случае рассматриваются не скалярные неизвестные величины, как в главе 2, а векторные, и коэффициенты $A_{i,j}, D_{i,j}, E_{i,j}$ являются не числами, а матрицами.

Поэтому для решения системы (3.63) используется не скалярная, а *векторная прогонка*. Она будет описана в одном из следующих разделов.

3.11. ДВУМЕРНЫЕ И ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Все, что говорилось здесь о расщеплении конвективного потока F_C, легко распространяется на конвективные потоки G_C и H_C, направ-

ленные по осям y,z соответственно. Объясняется это тем, что основное уравнение (3.1) абсолютно симметрично относительно координат (x,y,z).

Например, конвективный поток через верхнюю грань контрольного объема представляется формулой, аналогичной (3.47):

$$(G_C)_{i,j+1/2,k} = B_+ U_L + B_- U_R. \tag{3.66}$$

В этой формуле U_L – некоторое значение вектора U ниже рассматриваемой грани, а U_R – значение вектора U выше этой грани. Матрицы B_+, B_- определяются соотношениями

$$B_+ = (S_B)^{-1} \Lambda_{B+} S_B; \quad B_- = (S_B)^{-1} \Lambda_{B-} S_B. \tag{3.67}$$

Матрицы $(S_B)^{-1}, S_B$ определяются преобразованием подобия

$$B \equiv \frac{\partial G_C}{\partial U} = (S_B)^{-1} \Lambda_B S_B. \tag{3.68}$$

Диагональная матрица Λ_B состоит из собственных значений матрицы Якоби $\frac{\partial G_C}{\partial U}$:

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (v+a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v-a) \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

Диагональные матрицы $\Lambda_{B+}, \Lambda_{B-}$ содержат только положительные и отрицательные элементы матрицы Λ_B соответственно.

В результате получаются представления потоков G_C на гранях, подобные (3.62). Так же поступаем с конвективными потоками H_C на передней и задней гранях контрольного объема (см. рис. 3.1).

Полученные выражения подставляются в основное разностное уравнение (3.19), и в результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин – значений вектора U во всех узлах сетки.

Упражнение. Определить матрицы $(S_B)^{-1}, S_B$, входящие в представление (3.68).

Упражнение. Определить матрицы $(S_C)^{-1}, S_C$, входящие в представление матрицы Якоби

$$C \equiv \frac{\partial H_C}{\partial U} = (S_C)^{-1} \Lambda_C S_C,$$

а также диагональную матрицу собственных значений Λ_C.

3.12. ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЯЗКИХ ПОТОКОВ

Векторы вязких потоков F_V, G_V, H_V с учетом формулы (3.9) имеют вид:

$$F_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xx} \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{zx} \\ \\ \begin{pmatrix} q_x - u\tau_{xx} \\ -v\tau_{yx} - w\tau_{zx} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad G_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xy} \\ -\tau_{yy} \\ -\tau_{zy} \\ \\ \begin{pmatrix} q_y - u\tau_{xy} \\ -v\tau_{yy} - w\tau_{zy} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad H_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xz} \\ -\tau_{yz} \\ -\tau_{zz} \\ \\ \begin{pmatrix} q_z - u\tau_{xz} \\ -v\tau_{yz} - w\tau_{zz} \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Для компонент тензора вязких напряжений и вектора плотности теплового потока используются формулы (3.5), (3.6).

Тогда вектор F_V, например, имеет вид

$$F_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial w}{\partial z} \\ -\mu\frac{\partial v}{\partial x} - \mu\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\mu\frac{\partial w}{\partial x} - \mu\frac{\partial u}{\delta z} \\ \\ \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{4}{3}u\mu\frac{\partial u}{\partial x} - v\mu\frac{\partial v}{\partial x} - w\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{2}{3}u\mu\frac{\partial v}{\partial y} - v\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \\ + \left(\frac{2}{3}u\mu\frac{\partial w}{\partial z} - w\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.71}$$

Внутренняя энергия идеального газа является функцией только температуры и связана с ней соотношением $C_V = \dfrac{de}{dT}$.

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{de}\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{C_V}\frac{\partial e}{\partial x}. \tag{3.72}$$

Если использовать число Прандтля $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu C_P}{\lambda} = \dfrac{\mu\gamma C_V}{\lambda}$, то

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\mu\gamma}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial e}{\partial x}. \tag{3.73}$$

Введем вектор V (представлен в транспонированной форме):

$$V = [\rho, u, v, w, e]^T.$$

Используя этот вектор, можно записать вектор вязкого потока F_V в компактной векторно-матричной форме:

$$F_V = M_{FX}\frac{\partial V}{\partial x} + M_{FY}\frac{\partial V}{\partial y} + M_{FZ}\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{3.74}$$

где матрицы M_{FX}, M_{FY}, M_{FZ} определяются соотношениями

$$M_{FX} = -\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}u & v & w & \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}} \end{pmatrix}, \quad M_{FY} = -\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & -\frac{2}{3}u & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{FZ} = -\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & -\frac{2}{3}u & \end{pmatrix}. \tag{3.75}$$

Для вязких потоков в направлениях y и z несложно получить формулы, аналогичные (3.74):

$$G_V = M_{GX}\frac{\partial V}{\partial x} + M_{GY}\frac{\partial V}{\partial y} + M_{GZ}\frac{\partial V}{\partial z},$$
$$H_V = M_{HX}\frac{\partial V}{\partial x} + M_{HY}\frac{\partial V}{\partial y} + M_{HZ}\frac{\partial V}{\partial z}. \qquad (3.76)$$

Упражнение. Определить матрицы M_{GX}, M_{GY}, M_{GZ} и M_{HX}, M_{HY}, M_{HZ}, входящие в формулу (3.76).

3.13. АППРОКСИМАЦИЯ ВЯЗКИХ ПОТОКОВ В ЯВНОЙ ФОРМЕ

Производные вектора V, входящие в вязкие потоки, легко представляются в разностной форме через значения в соседних по отношению к граням узлах сетки. Только это представление будет различным для каждого из потоков.

Например, на грани $(i+1/2, j, k)$ рассматриваемого контрольного объема эта аппроксимация имеет вид

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{i+1/2,j,k} = \frac{V_{i+1,j,k} - V_{i,j,k}}{\Delta x};$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{i+1,j,k}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j+1,k} - V_{i,j-1,k}}{2\Delta y} + \frac{V_{i+1,j+1,k} - V_{i+1,j-1,k}}{2\Delta y}\right]; \qquad (3.77)$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2}\left[\frac{V_{i,j,k+1} - V_{i,j,k-1}}{2\Delta z} + \frac{V_{i+1,j,k+1} - V_{i+1,j,k-1}}{2\Delta z}\right].$$

Параметры газа, входящие в матрицы M, заданные формулами (3.74)–(3.76), определяются как средние между значениями в соседних узлах. Например,

$$(M_{GX})_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2}\left[(M_{GX})_{i,j,k} + (M_{GX})_{i+1,j,k}\right]. \qquad (3.78)$$

Аналогично этим примерам строятся производные вектора V и соответствующие матрицы на других гранях контрольного объема.

Упражнение. Получить формулы для аппроксимации производных вектора V на гранях $(i, j+1/2, k)$, $(i, j, k-1/2)$.

3.14. НЕЯВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЯЗКИХ ПОТОКОВ. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О «ТОНКОМ СЛОЕ»

Вектор V является взаимно-однозначной функцией вектора U. Следовательно, формулы (3.74), (3.76) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_V &= M_{FX}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} + M_{FY}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y} + M_{FZ}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial z}; \\ G_V &= M_{GX}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} + M_{GY}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y} + M_{GZ}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial z}; \\ H_V &= M_{HX}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x} + M_{HY}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y} + M_{HZ}\frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Вязкие потоки, таким образом, зависят в основном не от самого вектора U, а от его пространственных производных $U_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $U_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $U_z = \frac{\partial U}{\partial z}$.

Поэтому при выражении вязких потоков на $(n+1)$-м шаге по времени через потоки на n-м шаге с помощью разложения в ряд Тейлора (по формуле (3.22)) следует использовать не приращение относительно δU^{n+1}, а приращения относительно $\delta(U_x)^{n+1}, \delta(U_y)^{n+1}, \delta(U_z)^{n+1}$. Например,

$$F_V{}^{n+1} = F_V{}^n + \left(\frac{\partial F}{\partial U_x}\right)^n \delta(U)_x{}^{n+1} + \left(\frac{\partial F}{\partial U_y}\right)^n \delta(U)_y{}^{n+1} + \left(\frac{\partial F}{\partial U_z}\right)^n \delta(U)_z{}^{n+1}. \tag{3.80}$$

Такое представление не очень удобно для численного решения системы алгебраических уравнений. Дело в том, что появление смешанных производных в неявной аппроксимации основного уравнения приведет к тому, что ленточная матрица этой системы будет иметь значительно бóльшую ширину ленты, чем было бы без учета смешанных производных. В частности, для двумерных задач ширина лента становится равной 9 вместо 5. Это существенно усложнит решение системы.

Поэтому используется так называемое *предположение о «тонком слое»*, введенное Tysinger, T., Caughey, D. [7]. Оно состоит в том, что смешанными производными в неявном представлении вязких потоков можно пренебречь.

Исходя из этого предположения, в формуле (3.80) можно пренебречь членами, содержащими $\delta(U)_y^{n+1}, \delta(U)_z^{n+1}$. Действительно, поток F_V входит в производную по координате x, следовательно, именно $\delta(U)_y^{n+1}, \delta(U)_z^{n+1}$ приводят к появлению смешанных производных в неявном представлении вязких потоков.

Введем обозначения:

$$L = \frac{\partial F_V}{\partial U_x} \equiv M_{FX} \frac{\partial V}{\partial U}; \quad N = \frac{\partial G_V}{\partial U_y} \equiv M_{GY} \frac{\partial V}{\partial U}; \quad K = \frac{\partial H_V}{\partial U_z} \equiv M_{HZ} \frac{\partial V}{\partial U}. \quad (3.81)$$

Тогда формулы для неявного представления вязких потоков представляются в виде:

$$\begin{aligned} F_V{}^{n+1} &= F_V{}^n + L^n \delta(U)_x^{n+1} = F_V{}^n + L^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta U^{n+1}\right); \\ G_V{}^{n+1} &= G_V{}^n + N^n \delta(U)_y^{n+1} = G_V{}^n + N^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta U^{n+1}\right); \\ H_V{}^{n+1} &= H_V{}^n + K^n \delta(U)_x^{n+1} = H_V{}^n + K^n \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta U^{n+1}\right). \end{aligned} \quad (3.82)$$

При этом вязкие потоки на n-м шаге рассчитываются по полным формулам (3.74), (3.76), в которых учитываю смешанные производные. Так как эти потоки представлены в явной форме, никаких проблем со смешанными производными не возникает.

Матрица $\frac{\partial V}{\partial U}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial V}{\partial U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ \left(-E+u^2+v^2+w^2\right)/\rho & -u/\rho & -v/\rho & -w/\rho & 1/\rho \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Конкретные значения потоков на гранях контрольного объема определяются, исходя из формул (3.82). Например, на грани $(i+1/2, j, k)$:

$$(F_V)_{i+1/2,j,k} = (F_V)^n_{i+1/2,j,k} + \alpha L^n_{i+1/2,j,k} \frac{1}{\Delta x}\left(\delta U^n_{i+1,j,k} - \delta U^n_{i,j,k}\right), \quad (3.84)$$

на грани $(i, j-1/2, k)$:

$$(G_V)_{i,j-1/2,k} = (G_V)^n_{i,j-1/2,k} + \alpha N^n_{i,j-1/2,k} \frac{1}{\Delta y}\left(\delta U^n_{i,j,k} - \delta U^n_{i,j-1,k}\right), \quad (3.85)$$

и т.д.

3.15. НЕЯВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЯЗКИХ ПОТОКОВ. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О «МАЛОСТИ ДИВЕРГЕНЦИИ СКОРОСТИ»

Предположение о «тонком слое» позволяет получить достаточно быстро сходящий процесс итераций при численном решении основной системы уравнений. Однако входящие в него гипотезы никак не обоснованы с физической точки зрения.

Рассмотрим, например, течение в пограничном слое или в слое смешения, когда основной поток движется по направлению оси x, а ось y направлена перпендикулярно этому движению. В этом случае:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.86)$$

Тем не менее, при использовании предположения о «тонком слое» во второй компоненте вектора F

$$\tau_{xx} = \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

отбрасывается член $\frac{\partial v}{\partial y}$, который имеет такой же порядок, как и $\frac{\partial u}{\partial x}$.

В третьей компоненте вектора $F - \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ — отбрасывается член $\frac{\partial u}{\partial y}$, который на самом деле значительно больше, чем $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Примеры можно продолжить.

Такие нестыковки могут приводить к замедлению процесса сходимости итерационного процесса, и даже к потере устойчивости.

Вероятно, более правильно было бы при упрощении вязких потоков в неявном представлении использовать реалистичные физические предпосылки.

Предлагаемое здесь допущение основано на том, что даже в сжимаемых течениях дивергенция скорости невелика. Во всяком

случае, величина дивергенции существенно меньше отдельных членов, входящих в ее выражение.

В этом случае выражение для сил вязкости в уравнении количества движения можно упростить:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right] \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right], \qquad (3.87)$$

так как предполагается, что дивергенция скорости $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ мала.

Таким образом,

$$j=1:\ \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right];$$

$$j=2:\ \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right];$$

$$j=3:\ \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right].$$

Аналогичным образом можно приблизительно оценить вязкие члены в уравнении энергии:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u_j\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]=$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu u_j\right)+u_j\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]=$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu u_j\right)+u_j\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u_j\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[u\mu\frac{\partial u}{\partial x}+v\mu\frac{\partial v}{\partial x}+w\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[u\mu\frac{\partial u}{\partial y}+v\mu\frac{\partial v}{\partial y}+w\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[u\mu\frac{\partial u}{\partial z}+v\mu\frac{\partial v}{\partial z}+w\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right]. \qquad (3.88)$$

То есть для приблизительной оценки вязких потоков можно использовать формулы:

$$F_V \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \left(-u\mu\frac{\partial u}{\partial x} - v\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(-w\mu\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\mu\gamma}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial e}{\partial x}\right) \end{bmatrix}, G_V \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(-u\mu\frac{\partial u}{\partial y} - v\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \left(-w\mu\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\mu\gamma}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial e}{\partial y}\right) \end{bmatrix}, H_V \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \left(-u\mu\frac{\partial u}{\partial z} - v\mu\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(-w\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu\gamma}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial e}{\partial z}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.89}$$

Таким образом, на базе физически обоснованных допущений получены вязкие потоки, в которых отсутствуют смешанные производные.

- Векторно-матричная форма потоков имеет вид:

$$F_V \approx M_V \frac{\partial V}{\partial x} = M_V \frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad G_V \approx M_V \frac{\partial V}{\partial y} = M_V \frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y},$$
$$H_V \approx M_V \frac{\partial V}{\partial y} = M_V \frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{3.90}$$

где

$$M_V = -\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & v & w & \frac{\gamma}{\mathrm{Pr}} \end{pmatrix}. \tag{3.91}$$

Матрица M_V отличается от матриц M_{FX}, M_{HY}, M_{HZ}, входящих в формулы (3.74), (3.76), в основном одним числовым коэффициентом (1 вместо 4/3). Для неявного представления вязких потоков

используются точно такие же формулы, как в случае предположения о «тонком слое» – формулы (3.82):

$$F_V^{n+1} = F_V^n + L^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta U^{n+1}\right), \quad G_V^{n+1} = G_V^n + N^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta U^{n+1}\right),$$

$$H_V^{n+1} = H_V^n + K^n \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta U^{n+1}\right).$$

Только матрицы определяются как

$$L = N = K = M_V \frac{\partial V}{\partial U}. \tag{3.92}$$

Важно еще раз напомнить, что упрощенная матрица M_V используется только для неявного представления потоков, а для явного представления используются точные формулы. Так как в результате итераций $\delta U^{n+1} \to 0$, то полученное решение разностной системы соответствует именно точным формулам для вязких потоков.

3.16. РАЗНОСТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ

Разностная форма системы уравнений Навье–Стокса получается из основного уравнения (3.19):

$$\frac{\delta U_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{F_{i+1/2,j,k} - F_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j+1/2,k} - G_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} + \frac{H_{i,j,k+1/2} - H_{i,j,k-1/2}}{\Delta z} = 0 \tag{3.93}$$

путем подстановки полученных в предыдущих параграфах представлений потоков на гранях контрольного объема.

Конвективные потоки (формулы(3.62) и аналогичные ей формулы):

$$\begin{aligned}
&\left(F_C\right)_{i+1/2,j,k} = \left(F_C\right)_{i+1/2,j,k}^n + \\
&+\alpha\left[\left(A_+\right)_{i+1/2,j,k}^n \delta U_{i,j,k}^{n+1} + \left(A_-\right)_{i+1/2,j,k}^n \delta U_{i+1,j,k}^{n+1}\right]; \\
&\left(F_C\right)_{i-1/2,j,k} = \left(F_C\right)_{i-1/2,j,k}^n + \\
&+\alpha\left[\left(A_+\right)_{i-1/2,j,k}^n \delta U_{i-1,j,k}^{n+1} + \left(A_-\right)_{i-1/2,j,k}^n \delta U_{i,j,k}^{n+1}\right];
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$(G_C)_{i,j+1/2,k} = (G_C)^n_{i,j+1/2,k} +$$
$$+\alpha\left[(B_+)^n_{i,j+1/2,k}\,\delta U^{n+1}_{i,j,k} + (B_-)^n_{i,j+1/2,k}\,\delta U^{n+1}_{i,j+1,k}\right];$$
$$(G_C)_{i,j-1/2,k} = (G_C)^n_{i,j-1/2,k} +$$
$$+\alpha\left[(B_+)^n_{i,j-1/2,k}\,\delta U^{n+1}_{i,j-1,k} + (B_-)^n_{i,j-1/2,k}\,\delta U^{n+1}_{i,j,k}\right]; \qquad (3.95)$$

$$(H_C)_{i,j,k+1/2} = (H_C)^n_{i,j,k+1/2} +$$
$$+\alpha\left[(C_+)^n_{i,j,k+1/2}\,\delta U^{n+1}_{i,j,k} + (C_-)^n_{i,j,k+1/2}\,\delta U^{n+1}_{i,j,k+1}\right];$$
$$(H_C)_{i,j,k-1/2} = (H_C)^n_{i,j,k-1/2} +$$
$$+\alpha\left[(C_+)^n_{i,j,k-1/2}\,\delta U^{n+1}_{i,j,k-1} + (C_-)^n_{i,j,k-1/2}\,\delta U^{n+1}_{i,j,k}\right]. \qquad (3.96)$$

Вязкие потоки (формулы (3.84), (3.85) и т.п.):

$$(F_V)_{i+1/2,j,k} = (F_V)^n_{i+1/2,j,k} + \alpha L^n_{i+1/2,j,k}\frac{1}{\Delta x}\left(\delta U^{n+1}_{i+1,j,k} - \delta U^{n+1}_{i,j,k}\right);$$
$$(F_V)_{i-1/2,j,k} = (F_V)^n_{i-1/2,j,k} + \alpha L^n_{i-1/2,j,k}\frac{1}{\Delta x}\left(\delta U^{n+1}_{i,j,k} - \delta U^{n+1}_{i-1,j,k}\right); \qquad (3.97)$$

$$(G_V)_{i,j+1/2,k} = (G_V)^n_{i,j+1/2,k} + \alpha N^n_{i,j+1/2,k}\frac{1}{\Delta y}\left(\delta U^{n+1}_{i,j+1,k} - \delta U^{n+1}_{i,j,k}\right);$$
$$(G_V)_{i,j-1/2,k} = (G_V)^n_{i,j-1/2,k} + \alpha N^n_{i,j-1/2,k}\frac{1}{\Delta y}\left(\delta U^{n+1}_{i,j,k} - \delta U^{n+1}_{i,j-1,k}\right); \qquad (3.98)$$

$$(H_V)_{i,j,k+1/2} = (H_V)^n_{i,j,k+1/2} + \alpha K^n_{i,j,k+1/2}\frac{1}{\Delta z}\left(\delta U^{n+1}_{i,j,k+1} - \delta U^{n+1}_{i,j,k}\right);$$
$$(H_V)_{i,j,k-1/2} = (H_V)^n_{i,j,k-1/2} + \alpha K^n_{i,j,k-1/2}\frac{1}{\Delta z}\left(\delta U^{n+1}_{i,j,k} - \delta U^{n+1}_{i,j,k-1}\right). \qquad (3.99)$$

В результате подстановки получаем основное разностное уравнение:

$$A_{i,j,k}\delta U^{n+1}_{i,j,k} + D_{i,j,k}\delta U^{n+1}_{i+1,j,k} + E_{i,j,k}\delta U^{n+1}_{i-1,j,k} + B_{i,j,k}\delta U^{n+1}_{i,j+1,k} +$$
$$+C_{i,j,k}\delta U^{n+1}_{i,j-1,k} + F_{i,j,k}\delta U^{n+1}_{i,j,k+1} + G_{i,j,k}\delta U^{n+1}_{i,j,k-1} = \Delta U^n_{i,j,k}, \qquad (3.100)$$

где

$$\Delta U^n_{i,j,k} = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(F_C)^n_{i+1/2,j,k} - (F_C)^n_{i-1/2,j,k}\right] - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left[(G_C)^n_{i,j+1/2,k} - (G_C)^n_{i,j-1/2,k}\right] -$$
$$- \frac{\Delta t}{\Delta z}\left[(H_C)^n_{i,j,k+1/2} - (H_C)^n_{i,j,k-1/2}\right] - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(F_V)^n_{i+1/2,j,k} - (F_V)^n_{i-1/2,j,k}\right] -$$
$$- \frac{\Delta t}{\Delta y}\left[(G_V)^n_{i,j+1/2,k} - (G_V)^n_{i,j-1/2,k}\right] - \frac{\Delta t}{\Delta z}\left[(H_V)^n_{i,j,k+1/2} - (H_V)^n_{i,j,k-1/2}\right]; \tag{3.101}$$

$$A_{i,j,k} = I + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\left[(A_+)^n_{i+1/2,j,k} - (A_-)^n_{i-1/2,j,k}\right] - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(L^n_{i+1/2,j,k} + L^n_{i-1/2,j,k}\right) +$$
$$+ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y}\left[(B_+)^n_{i,j+1/2,k} - (B_-)^n_{i,j-1/2,k}\right] - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}\left(N^n_{i,j+1/2,k} + N^n_{i,j-1/2,k}\right) +$$
$$+ \frac{\alpha\Delta t}{\Delta z}\left[(C_+)^n_{i,j,k+1/2} - (C_-)^n_{i,j,k-1/2}\right] - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta z^2}\left(K^n_{i,j,k+1/2} + K^n_{i,j,k-1/2}\right); \tag{3.102}$$

$$D_{i,j,k} = +\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}(A_-)^n_{i+1/2,j,k} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}L^n_{i+1/2,j,k};$$
$$E_{i,j,k} = -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}(A_+)^n_{i-1/2,j,k} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}L^n_{i-1/2,j,k}; \tag{3.103}$$

$$B_{i,j,k} = +\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y}(B_-)^n_{i,j+1/2,k} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}N^n_{i,j+1/2,k};$$
$$C_{i,j,k} = -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y}(B_+)^n_{i,j-1/2,k} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}N^n_{i,j-1/2,k}; \tag{3.104}$$

$$F_{i,j,k} = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta z}(C_-)^n_{i,j,k+1/2} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta z^2}K^n_{i,j,k+1/2};$$
$$G_{i,j,k} = -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta z}(C_+)^n_{i,j,k-1/2} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta z^2}K^n_{i,j,k-1/2}. \tag{3.105}$$

Здесь $\Delta U^n_{i,j,k}$ – приращения вектора U при переходе от n-го шага по времени к $(n+1)$-му шагу, вычисленное явным методом; $A_{i,j,k}, D_{i,j,k}, E_{i,j,k}, B_{i,j,k}, C_{i,j,k}, F_{i,j,k} G_{i,j,k}$ – блочные матрицы коэффициентов, каждый из которых является матрицей размера (5×5).

Матрицы $A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-$ вычисляются по формулам (3.43), (3.67) и им подобным.

Матрицы L, N, K вычисляются по формулам (3.81) при использовании предположения о «тонком слое», либо по формуле (3.92) при использовании предположения о «малости дивергенции скорости».

Разностное уравнение (3.100) имеет точно такую же форму, как рассмотренные в главе 2 уравнения. Оно содержит 7 неизвестных векторов δU. Вся система линейных алгебраических уравнений описывается *семидиагональной матрицей блочных* коэффициентов.

Для решения (3.100) можно использовать методы, описанные в главе 2: итерационный метод Гаусса–Зейделя с переменой направлений, метод приближенной факторизации, модифицированный метод приближенной факторизации Маккормака и т.п. Только надо иметь в виду, что коэффициенты в системе линейных уравнений теперь являются не числами, а матрицами размера (5×5). Поэтому при решении системы уравнений с трехдиагональной матрицей следует использовать не скалярную, а *векторную прогонку.*

3.17. ВЕКТОРНАЯ ПРОГОНКА

Метод векторной прогонки аналогичен методу скалярной прогонки. Единственное существенное отличие состоит в том, что вместо деления на число используется умножение на обращенную матрицу.

Пусть в результате факторизации уравнения (3.100) возникла необходимость решения системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей

$$a_m\Phi_m = b_m\Phi_{m+1} + c_m\Phi_{m-1} + d_m, \quad m = 1,2,...,N-1,N. \qquad (3.106)$$

Здесь неизвестная величина Φ и коэффициент d являются векторами, размер которых равен 5. Коэффициенты a_m, b_m, c_m являются матрицами (5×5).

Для $m=1$, $m=N$ коэффициенты

$$c_1 = 0, \quad b_N = 0, \qquad (3.107)$$

где 0 — матрица, состоящая из нулевых элементов.

Остальные коэффициенты в этих точках определяются из граничных условий.

Записанные условия (3.106), (3.107) означают, что Φ_1 известна в зависимости от Φ_2. С этого, как и в скалярной прогонке, начинается прямая подстановка.

Предположим, что при прямой подстановке имеем зависимость

$$\Phi_m = P_m \Phi_{m+1} + Q_m \tag{3.108}$$

после того, как получено

$$\Phi_{m-1} = P_{m-1} \Phi_m + Q_{m-1}. \tag{3.109}$$

Подставляя (3.109) в (3.106), получаем следующее соотношение:

$$\Phi_m = \left(a_m - c_m P_{m-1}\right)^{-1} b_m \Phi_{m+1} + \left(a_m - c_m P_{m-1}\right)\left(c_m Q_{m-1} + d_m\right). \tag{3.110}$$

Сравниваем это выражение с (3.108) и получаем формулы для прогоночных коэффициентов P_m, Q_m:

$$P_m = \left(a_m - c_m P_{m-1}\right)^{-1} b_m, \quad Q_m = \left(a_m - c_m P_{m-1}\right)^{-1} \left(c_m Q_{m-1} + d_m\right). \tag{3.111}$$

Эти рекуррентные соотношения определяют P_m, Q_m через P_{m-1}, Q_{m-1}. Заметим, что в начале рекуррентного процесса уравнение (3.106) для $m = 1$ по форме почти совпадает с (3.108). Таким образом, P_1, Q_1 определяются в следующем виде:

$$P_1 = a_1^{-1} b_1, \quad Q_1 = a_1^{-1} d_1. \tag{3.112}$$

На другом конце последовательности P_m, Q_m имеем $b_N = 0$. Это дает $P_N = 0$, и из (3.108) получаем

$$Q_N = \Phi_N. \tag{3.113}$$

С этого момента осуществляется обратная подстановка с помощью уравнения (3.108).

3.18. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Задание граничных условий для уравнений Навье–Стокса представляет собой отнюдь не тривиальную задачу. Даже более того. С теоретической точки зрения это наиболее сложная часть рассматриваемой в данной главе проблемы.

На первый взгляд кажется, что с точки зрения пространственных переменных мы имеем дело с типичной краевой задачей, и для ее решения необходимо задавать *все* газодинамические параметры на *всей границе* расчетной области.

На самом деле, это не так.

Рассмотрим в качестве примера движение потока сжимаемой жидкости вдоль оси x слева направо со скоростью u.

Ранее было показано, что любая точка потока может распространять свое воздействие на окружающее пространство следующим образом:

- со скоростью u за счет перемещения самого потока – вниз по потоку;
- со скоростью $u+a$ за счет перемещения самого потока и распространения звуковых колебаний – вниз по потоку;
- со скоростью $u-a$ за счет распространения звуковых колебаний; если скорость u превышает скорость звука a, это воздействие сносится вниз, и воздействие вверх по потоку отсутствует

Таким образом, в случае сверхзвукового течения правая граница расчетной области никак не может влиять вверх по потоку, и задание на ней граничных условий противоречит физическому смыслу.

Если же скорость на выходе из расчетной области дозвуковая, то распространение воздействия вверх по потоку возможно вследствие распространения звуковых колебаний, и на этой границе требуется задавать какие-то граничные условия.

Какие же граничные условия необходимо задать на различных типах границ расчетной области?

Ответ на этот вопрос связан с так называемыми *характеристиками.*

3.19. ХАРАКТЕРИСТИКИ. ИНВАРИАНТЫ РИМАНА

Предполагается, что на границах расчетной области можно пренебречь влиянием вязкости. (Это предположение справедливо для многих типов границ, за исключением случаев, когда границей является стенка и т.п.)

Уравнения динамики невязкой жидкости или уравнения Эйлера относятся к уравнениям гиперболического типа.

В общем случае уравнения гиперболического типа описывают процессы, в которых происходит распространение информации с конечной скоростью.

Простейшим гиперболическим уравнением является уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad u(0,x)=\phi(x),\quad -\infty<x<\infty. \tag{3.114}$$

Характеристиками называется кривые в пространстве x–t, определяемые уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt}=a\big(u(t,x(t))\big). \tag{3.115}$$

Если решение $u(t,x)$ дифференцируемо, то оно постоянно вдоль характеристики. Действительно,

$$\frac{du(t,x(t))}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+a(u)\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{3.116}$$

Рассмотрим теперь одномерную нестационарную задачу течения сжимаемой невязкой жидкости вдоль оси x.

Основные уравнения в неконсервативной формее имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0;\\ \rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}=0;\\ \rho\frac{\partial E}{\partial t}+\rho u\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(up)=0.\end{gathered} \tag{3.117}$$

Полная внутренняя энергия E может быть выражена через давление и скорость:

$$E=e+\frac{1}{2}u^2=\frac{p}{\beta\rho}+\frac{1}{2}u^2, \tag{3.118}$$

где $\beta=\gamma-1$.

Отсюда

$$dE=\frac{dp}{\beta\rho}-\frac{pd\rho}{\beta\rho^2}+udu. \tag{3.119}$$

Подставляя производные E в третье уравнение (3.117), получаем:

$$\frac{1}{\beta}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{u}{\beta}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{p}{\beta\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+u\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)+p\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{3.120}$$

Отсюда с учетом уравнения неразрывности и количества движения получаем уравнение энергии, выраженной через давление:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\gamma p\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial p}{\partial x}=0. \tag{3.121}$$

Таким образом, рассматриваемую задачу решаем относительно вектора

$$W=\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix}. \tag{3.122}$$

Система уравнений в векторной форме имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t}+A\frac{\partial W}{\partial x}=0, \tag{3.123}$$

где

$$A=\begin{pmatrix}u & \rho & 0\\ 0 & u & 1/\rho\\ 0 & \gamma p & u\end{pmatrix}. \tag{3.124}$$

Собственные значения этой матрицы равны $\lambda_1=u, \lambda_2=u-a, \lambda_3=u+a$.

Им соответствуют собственные векторы

$$\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\rho/a\\ 1\\ -\rho a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\rho/a\\ 1\\ \rho a\end{pmatrix}. \tag{3.125}$$

Таким образом, в преобразовании подобия

$$A=(S_A)^{-1}\Lambda S_A \tag{3.126}$$

матрицы равны

$$(S_A)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -\rho/a & \rho/a\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -\rho a & \rho a\end{pmatrix}, \quad S_A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1/a^2\\ 0 & 1/2 & -1/(2\rho a)\\ 0 & 1/2 & 1/(2\rho a)\end{pmatrix} \tag{3.127}$$

(матрица $(S_A)^{-1}$ составлена из собственных векторов, а S_A находится как обратная ей).

С учетом (3.126) векторное уравнение (3.123) преобразуется к виду

$$S_A \frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda S_A \frac{\partial W}{\partial x} = 0. \tag{3.128}$$

Эта система допускает прямое интегрирование, если существует такой фактор интегрирования μ и такой вектор $\boldsymbol{R}$, что выполняется условие

$$\mu_i(W) \sum_{k=1}^{3} (S_A)_{ik} dW_k = dR_i(W), \tag{3.129}$$

где R_i – компоненты вектора $\boldsymbol{R}$, они называются *инвариантами Римана*; $(S_A)_{ik}$ – компоненты матрицы S_A.

В этом случае уравнение (3.128) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x} = 0. \tag{3.130}$$

В скалярной форме это векторное уравнение имеет вид простейшего уравнения переноса

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{3.131}$$

Для него существует три характеристических линии в пространственно-временной плоскости $x-t$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda_i. \tag{3.132}$$

Инварианты Римана R_i постоянны вдоль характеристических линий.

Заметим, что эти линии не являются прямолинейными, поскольку λ_i является переменной величиной.

Так как

$$S_A dW = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1/2 & -1/(2\rho a) \\ 0 & 1/2 & 1/(2\rho a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\rho - dp/a^2 \\ du/2 - dp/(2\rho a) \\ du/2 + dp/(2\rho a) \end{pmatrix}, \tag{3.133}$$

то для рассматриваемой задачи инварианты Римана можно определить интегрированием соотношений

$$d\rho - dp/a^2, \quad du - dp/(\rho a), \quad du + dp/(\rho a). \tag{3.134}$$

Первый дифференциал легко интегрируется; фактор интегрирования равен $\frac{1}{\rho}$:

$$\frac{1}{\rho}\cdot d\rho - \frac{1}{\rho}\cdot dp/a^2 = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{\gamma p} = d(\ln\rho) - d\left(\ln p^{1/\gamma}\right) = d\left(\ln\left(\frac{\rho}{p^{1/\gamma}}\right)\right). \tag{3.135}$$

Следовательно, инвариант, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = u$, равен $R_1 = \ln\left(\frac{\rho}{p^{1/\gamma}}\right)$. Это говорит о том, что вдоль траектории частиц сохраняется постоянным комплекс $\frac{\rho}{p^{1/\gamma}}$ и, следовательно, комплекс $S = p/\rho^{\gamma}$.

Для того чтобы проинтегрировать следующие соотношения, выразим ρ через константу S и давление p:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ji}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) = \mu\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right] =$$

$$= \mu\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_i}^2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right] = \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_i}^2}.$$

Следовательно, инвариантами Римана будут

$$R_{2,3} = u \mp \frac{2a}{(\gamma - 1)}. \tag{3.136}$$

Рассматриваемая задача легко обобщается на трехмерный случай. Легко показать, что тогда появляются еще две характеристики, определяемые уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = u, \tag{3.137}$$

и им соответствуют инварианты Римана

$$R_4 = v, \quad R_5 = w. \tag{3.138}$$

3.20. ТИПЫ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Граничные условия, как правило, делятся на пять типов:

1. ВХОД – граница, на которой вектор скорости направлен *внутрь* расчетной области.

2. ВЫХОД – граница, на которой вектор скорости направлен *наружу из* расчетной области.

3. ГРАНИЦА СО СВОБОДНЫМ ПОТОКОМ – граница между расчетной областью и внешним потоком или неподвижным пространством; направление вектора скорости здесь заранее неизвестно.

4. СТЕНКА – непроницаемая поверхность.

5. ПЛОСКОСТЬ (ЛИНИЯ) СИММЕТРИИ – граница, относительно которой все параметры течения симметричны.

Рассмотрим подробнее эти случаи.

1. ВХОД. Предположим, что эта граница расположена перпендикулярно оси x, т.е. находится в плоскости $0yz$.

Возможны два варианта.

Если составляющая скорости u больше скорости звука, все собственные значения матрицы, определяющей конвективный перенос через границу $\lambda_1 = u, \lambda_2 = u + a, \lambda_3 = u, \lambda_4 = u, \lambda_5 = u - a$, имеют положительный знак. То есть все 5 характеристик направлены *внутрь* расчетной области, и распространение воздействия направлено только от границы внутрь.

В этом случае граница называется СВЕРХЗВУКОВОЙ ВХОД, и необходимо задавать на ней все 5 параметров течения. Чаще всего это три компоненты скорости, температура и давление (или плотность).

При сверхзвуковом входе проблем с заданием граничных условий обычно не возникает.

Более сложным представляется вариант, когда $u < a$. В это случае только 4 характеристики направлены *внутрь* расчетной области, а одна – из внутренней части расчетной области на границу.

Такая граница называется ДОЗВУКОВОЙ ВХОД, и на ней задается 4 параметра течения. Пятый параметр определяется экстраполяцией из внутренней части расчетной области.

Тут возможны различные варианты, зависящие от конкретной задачи.

Например, при решении задачи течения в трубе или задачи истечения струи из дозвукового сопла чаще всего на входе задаются три компоненты скорости и температура.

Давление на входе определяется из условия постоянства инварианта, связанного с собственным значением $\lambda = u - a$, т.е. из условия

$$du - dp/(\rho a) = 0. \tag{3.139}$$

Для этого берется внутренняя точка, ближайшая к рассматриваемой граничной точке, в ней определяются полученные в ходе расчета скорость и давление, а далее, в результате решения разностного аналога уравнения (3.139), получается давление в граничной точке.

Более подробно этот процесс выглядит так. Предположим, что на n-м шаге по времени все параметры течения известны. Требуется определить давление на границе на $(n+1)$-м шаге по времени. Обозначим параметры на границе индексом b, а параметры ближайшей внутренней точки – индексом i. Из уравнения (3.139) получаем

$$p_b^{n+1} = p_i^n + (\rho a)\left(u_b^{n+1} - u_i^n\right). \tag{3.140}$$

Коэффициент (ρa) берется средним между двумя точками и может находится итеративно (достаточно двух итераций).

Рассмотрим другой пример. Течение в камере сгорания ракетного двигателя. На входе в камеру, как правило, известны давление и температура.

В этом случае скорость на входе легко находится из условия постоянства инварианта Римана $R = u - \dfrac{2a}{(\gamma - 1)}$:

$$R_b = R_i. \tag{3.141}$$

Значение R_i известно на n-м шаге по времени, скорость звука определяется по давлению и температуре. Отсюда получаем u_b.

Можно рассмотреть и другие варианты задания параметров на дозвуковом входе. Все они легко решаются с использованием инварианта Римана.

2. ВЫХОД. В этом случае также следует рассмотреть два варианта: СВЕРХЗВУКОВОЙ ВЫХОД и ДОЗВУКОВОЙ ВЫХОД.

При сверхзвуковом выходе все 5 характеристик выходят из расчетной области. Граничные условия не задаются, а значения параметров на границе просто получаются экстраполяцией из соседних точек внутри расчетной области. В данном случае даже не требуется использование инвариантов Римана.

В случае дозвукового выхода на границе необходимо задавать один параметр течения, и это, как правило, давление.

Для струйных течений, для обтекания тел газовым потоком, для течения в трубе это давление полагается равным давлению окружающего пространства.

Если рассматривается правая граница расчетной области, которая расположена перпендикулярно оси x, влияние вверх по потоку определяется характеристикой $\lambda = u - a$ и соответствующим инвариантом Римана.

Остальные параметры течения определяются с помощью инвариантов Римана.

Как и прежде, обозначим параметры на границе индексом b, а параметры ближайшей внутренней точки – индексом i.

Из условия постоянства инвариантов Римана, относящихся к характеристикам, направленным вниз по потоку, получаем:

$$\left(\rho_b^{n+1} - \rho_i^n\right) - \left(p_b^{n+1} - p_i^n\right)/a^2 = 0;$$
$$\left(u_b^{n+1} - u_i^n\right) + \left(p_b^{n+1} - p_i^n\right)/(\rho a) = 0. \qquad (3.142)$$

Отсюда:

$$\rho_b^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\left(p_b^{n+1} - p_i^n\right)}{a^2}; \quad u_b^{n+1} = u_i^n - \frac{\left(p_b^{n+1} - p_i^n\right)}{\rho a}. \qquad (3.143)$$

Как и в предыдущем параграфе, на n-м шаге по времени известны значения ρ_i^n, p_i^n, u_i^n во внутренней части расчетной области; p_b^{n+1} – задано.

Далее по формулам (3.143) определяются значения параметров ρ_b^{n+1}, u_b^{n+1} на границе на $(n+1)$-м шаге по времени.

Для остальных компонент скорости из (3.138) следует:

$$v_b^{n+1} = v_i^n;$$
$$w_b^{n+1} = w_i^n. \qquad (3.144)$$

3. ГРАНИЦА СО СВОБОДНЫМ ПОТОКОМ. На этой границе компонента скорости, направленная по нормали к границе, всегда дозвуковая. Направление этой скорости, как уже говорилось, может быть любым. Следовательно, характеристики тоже могут быть направлены как внутрь расчетной области, так и наружу.

Как правило, такая граница отделяет расчетную область от внешнего потока или неподвижного пространства. Казалось бы, в этом случае можно задавать граничные условия, совпадающие с параметрами внешнего потока. В ряде случаев это допустимо, но более корректно использовать характеристические переменные.

В качестве примера рассмотрим границу, находящуюся сверху расчетной области перпендикулярно оси y.

Имеем, как всегда, 5 характеристик, которые в данном случае соответствуют собственным значениям $\lambda_1 = v, \lambda_2 = v + a, \lambda_3 = v, \lambda_4 = v, \lambda_5 = v - a$.

Очевидно, что вторая характеристика приходит на границу изнутри расчетной области, а пятая – из внешней области. Обозначим параметры внешней области индексом e (от английского слова external). Считаем, что влияние внешнего потока обусловлено и другими характеристиками.

С точки зрения характеристических переменных это означает, что внешним потоком и границей справедливы соотношения

$$d\rho - dp/a^2 = 0, \quad dv - dp/(\rho a) = 0,$$
$$du = 0, \quad dw = 0, \qquad (3.145)$$

а между внутренней областью и границей –

$$dv + dp/(\rho a) = 0. \qquad (3.146)$$

Разностная форма этих уравнений имеет вид:

$$\left(\rho_b^{n+1} - \rho_e^n\right) - \left(p_b^{n+1} - p_e^n\right)/a^2 = 0, \quad \left(v_b^{n+1} - v_e^n\right) - \left(p_b^{n+1} - p_e^n\right)/(\rho a) = 0,$$
$$\left(u_b^{n+1} - u_e^n\right) = 0, \quad \left(w_b^{n+1} - w_e^n\right) = 0,$$
$$\left(v_b^{n+1} - v_i^n\right) + \left(p_b^{n+1} - p_i^n\right)/(\rho a) = 0. \qquad (3.147)$$

Решение этой системы:

$$u_b^{n+1} = u_e^n, \quad w_b^{n+1} = w_e^n, \quad v_b^{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_e^n + v_i^n\right) + \frac{p_i^n - p_e^n}{2\rho a};$$

$$p_b^{n+1} = \frac{1}{2}\left(p_i^n + p_e^n\right) + \frac{1}{2}(\rho a)\left(v_i^n - v_e^n\right); \qquad (3.148)$$

$$\rho_b^{n+1} = \rho_e^n + \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}\left(p_i^n - p_e^n\right) + \frac{1}{2}(\rho a)\left(v_i^n - v_e^n\right)\right].$$

Анализ этих формул показывает, что, даже если внешний поток неподвижен, т.е. $u_e = v_e = w_e = 0$, при приближении положительного возмущения давления к границе появится положительная нормальная составляющая скорости v_b. Изменится и давление на границе. Таким образом, параметры на границе будут отличаться от параметров внешнего потока.

Задавать граничные условия, совпадающие с параметрами внешнего потока, можно только в том случае, когда заранее известно, что никакие возмущения, происходящие во внутренней части расчетной области, не дойдут до границы.

Все уравнения, полученные для границ, расположенных параллельно координатным плоскостям, легко распространяются на произвольно расположенные границы. Только вместо скоростей u,v,w следует использовать нормальные и тангенциальные к границе составляющие скорости.

Например, для рассмотренного случая вместо v используется u_n – нормальная по отношению к границе составляющая скорости, а вместо u,w берутся тангенциальные составляющие скорости.

4. СТЕНКА. Стенки могут быть *со скольжением потока*. Тогда нормальная составляющая скорости на границе равна нулю, а для тангенциальных составляющих справедливо:

$$\frac{\partial u_t}{\partial n} = 0, \qquad (3.149)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к поверхности.

Если на стенке нет *скольжения потока*, то все компоненты скорости на границе равны нулю.

В обоих случаях для давления принимается

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0. \qquad (3.150)$$

Температура стенки может быть задана,

$$T_b = T_W, \tag{3.151}$$

или стенка может быть адиабатной, тогда

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0. \tag{3.152}$$

Использование характеристических переменных в районе стенки затруднительно, так как здесь сильное влияние оказывает вязкость.

Условия (3.149), (3.150), (3.152) следует задавать в неявном виде. Для этого очень удобно использовать так называемые *фиктивные ячейки*, которые будут подробно рассмотрены в следующем разделе.

5. ПЛОСКОСТЬ (ЛИНИЯ) СИММЕТРИИ. Этот тип границы с точки зрения математики является частным случаем СТЕНКИ, когда есть скольжение и стенка является адиабатной.

3.21. ФИКТИВНЫЕ ЯЧЕЙКИ

В этом разделе для простоты описания рассматриваются границы в двумерных задачах, однако все полученные результаты легко распространяются на трехмерные задачи.

Прежде всего отметим, что контрольные объемы, расположенные в непосредственной близости от границы расчетной области, можно конструировать различными способами.

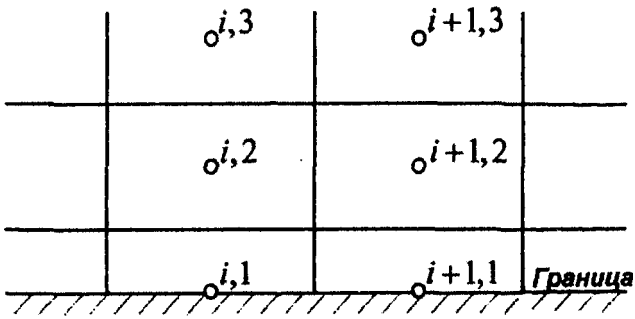

Рис. 3.4. Граница расчетной области проходит через узлы ячеек

Рассмотрим это на примере нижней границы двумерной сетки.

На рис. 3.4 показан способ I, когда граница расчетной области проходит через узлы сетки. Приграничные контрольные объемы вдвое меньше соседних объемов. Такой способ удобен, когда значения всех параметров течения известны: либо они непосредственно заданы граничными условиями, либо определяются с помощью характеристик. В этом случае для приграничных контрольных объемов нет необходимости записывать уравнения балансов, так как значения параметров в узлах этих ячеек уже известны. В нашем примере это узлы $(i,1)$, $i=1,2,...,N_X$.

Значения параметров течения в этих узлах используются для определения потоков через грани соседних ячеек – $(i,2)$, $i=1,2,...,N_X$.

Способ II, представленный на рис. 3.5, основан на том, что граница расчетной области проходит через нижние грани приграничных контрольных объемов. В этом случае значения параметров течения в приграничных узлах заранее неизвестны, и для них записываются такие же балансные уравнения, как и для остальных ячеек.

Если параметры течения на границе известны, то при составлении балансов потоки через нижние грани приграничных ячеек легко определяются.

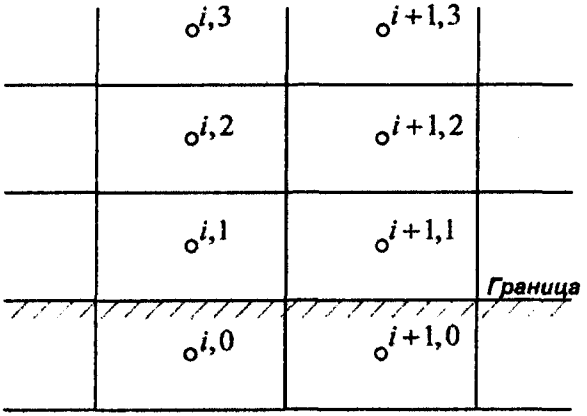

Рис. 3.5. Граница расчетной области совпадает с нижними границами ячеек. Создание фиктивных ячеек на нижней границе расчетной области

Дело обстоит хуже для границ типа СТЕНКА или СИММЕТРИЯ, на которых задаются не сами параметры, а их производные. Для использования таких граничных условий необходимо вводить соотношения между параметрами в нескольких слоях приграничных ячеек, причем в неявной форме.

В этом случае очень удобно использовать так называемые фиктивные или «призрачные» ячейки ("ghost cells").

Фиктивные или «призрачные ячейки» не существуют после генерации сетки, а создаются в процессе расчета. Они тесно привязаны к границе. На плоской границе фиктивные ячейки симметричны относительно границы приграничным ячейкам (см. рис. 3.5).

В узлах этих ячеек параметры течения задаются таким образом, чтобы обеспечить правильные значения потоков на границе. Например, на стенке невязкий конвективный поток массы и энергии равен нулю, а конвективный поток момента количества движения обусловлен только давлением. Вязкие потоки должны соответствовать заданным на границе вязким силам и тепловому потоку. Совместное выполнение требований для конвективных и вязких потоков не всегда возможно, поэтому при расчете конвективных потоков используется один набор параметров в узлах фиктивных ячеек, а при расчете диффузионных – другой.

3.21.1. Граничные условия для конвективных потоков

Стенка и симметрия. С точки зрения невязких конвективных потоков эти типы границ идентичны. Основное условие: конвективные потоки массы и энергии равны нулю, а конвективный поток момента количества движения обусловлен только давлением, т.е. нормальная к границе составляющая скорости равна нулю.

Например, для нижней границы (см. рис. 3.5) это условие обеспечивается тем, что в фиктивной ячейке нормальная составляющая скорости берется с противоположным знаком по отношению к пристеночной ячейке:

$$v_{i,0} = -v_{i,1}. \qquad (3.153)$$

В этом случае на границе получается: $v_{i,0+1/2} = \frac{1}{2}\left(v_{i,0} + v_{i,1}\right) = 0.$

В векторной форме это условие записывается так:

$$\boldsymbol{U}_{i,0} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{U}_{i,1}, \quad i = 1,2,...,N_X, \tag{3.154}$$

где

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.155}$$

Если граница расположена слева от расчетной области, то для нее в фиктивной ячейки полагаем

$$u_{0,j} = -u_{1,j}, \quad j = 1,2,...N_Y, \tag{3.156}$$

а матрица W содержит отрицательную единицу на второй позиции.

Неявное представление граничных условий на основе разностного уравнения (3.100) для двумерной задачи выглядит как

$$\boldsymbol{A}_{i,j}\delta\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,j} + \boldsymbol{D}_{i,j}\delta\boldsymbol{U}^{n}_{i+1,j} + \boldsymbol{E}_{i,j}\delta\boldsymbol{U}^{n}_{i-1,j} + \boldsymbol{B}_{i,j}\delta\boldsymbol{U}^{n}_{i,j+1} + \boldsymbol{C}_{i,j}\delta\boldsymbol{U}^{n}_{i,j-1} = \Delta\boldsymbol{U}^{n}_{i,j}. \tag{3.157}$$

Для приращений $\delta\boldsymbol{U}$ на стенке справедливы такие же соотношения, как для основного вектора $\boldsymbol{U}$.

Например, для нижней границы

$$\delta\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,0} = \boldsymbol{W}\delta\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,1}, \quad i = 1,2,...,N_X, \tag{3.158}$$

откуда получаем, что при $j = 1$ конвективные потоки через нижнюю грань вычисляются не по (3.95), а по формуле

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{G}_C\right)_{i,j+1/2} &= \left(\boldsymbol{G}_C\right)^n_{i,j+1/2} + \alpha\left[\left(\boldsymbol{B}_+\right)^n_{i,j+1/2}\delta\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,j} + \left(\boldsymbol{B}_-\right)^n_{i,j+1/2}\delta\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,j+1}\right], \\ \left(\boldsymbol{G}_C\right)_{i,j-1/2} &= \left(\boldsymbol{G}_C\right)^n_{i,j-1/2} + \alpha\left[\left(\boldsymbol{B}_+\right)^n_{i,j-1/2}\boldsymbol{W} + \left(\boldsymbol{B}_-\right)^n_{i,j-1/2}\right]\delta\boldsymbol{U}^{n+1}_{i,j}. \end{aligned} \tag{3.159}$$

Явное выражение для потока определяется формулой (3.66):

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{G}_C\right)^n_{i,j-1/2} &= \left(\boldsymbol{B}_+\right)^n_{i,j-1/2}\boldsymbol{U}_L + \left(\boldsymbol{B}_-\right)^n_{i,j-1/2}\boldsymbol{U}_R = \\ &= \left(\left(\boldsymbol{B}_+\right)^n_{i,j-1/2}\boldsymbol{W} + \left(\boldsymbol{B}_-\right)^n_{i,j-1/2}\right)\boldsymbol{v}_R. \end{aligned} \tag{3.160}$$

Основное разностное уравнение для $j=1$ имеет вид

$$A_{i,j}\delta U_{i,j}^{n+1} + D_{i,j}\delta U_{i+1,j}^{n} + E_{i,j,k}\delta U_{i-1,j}^{n} + B_{i,j,k}\delta U_{i,j+1}^{n} = \Delta U_{i,j}^{n}, \quad (3.161)$$

при этом коэффициенты $D_{i,j}, E_{i,j}, B_{i,j}$ рассчитываются по тем же формулам, что и для не приграничных узлов, а вклад конвекции G_C в коэффициент $A_{i,j}$ определяется формулой

$$A_{i,j} \to A_{i,j} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y}\left[(B_+)_{i,j+1/2}^{n} - (B_-)_{i,j-1/2}^{n} - (B_+)_{i,j-1/2}^{n} W\right] \quad (3.162)$$

вместо

$$A_{i,j} \to A_{i,j} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta y}\left[(B_+)_{i,j+1/2}^{n} - (B_-)_{i,j-1/2}^{n}\right].$$

Выход сверхзвуковой. Для такого типа границы тоже удобно использовать фиктивные ячейки. Например, если выход расположен справа, то

$$U_{Nx+1,j} = U_{Nx,j}, \quad j = 1,2,\ldots N_Y. \quad (3.163)$$

Для неявного представления граничных условий при $i = N_X$ получаем из (3.94):

$$(F_C)_{i+1/2,j,k} = (F_C)_{i+1/2,j,k}^{n} + \alpha\left[(A_+)_{i+1/2,j,k}^{n} + (A_-)_{i+1/2,j,k}^{n}\right]\delta U_{i,j,k}^{n+1},$$

$$(F_C)_{i-1/2,j,k} = (F_C)_{i-1/2,j,k}^{n} + \alpha\left[(A_+)_{i-1/2,j,k}^{n}\delta U_{i-1,j,k}^{n+1} + (A_-)_{i-1/2,j,k}^{n}\delta U_{i,j,k}^{n+1}\right]. \quad (3.164)$$

Разностное уравнение:

$$A_{i,j}\delta U_{i,j}^{n+1} + E_{i,j}\delta U_{i-1,j}^{n} + B_{i,j}\delta U_{i,j+1}^{n} + C_{i,j}\delta U_{i,j-1}^{n} = \Delta U_{i,j}^{n}. \quad (3.165)$$

А вклад конвекции F_C в коэффициент $A_{i,j}$ определяется формулой

$$A_{i,j} \to A_{i,j} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\left[(A_+)_{i+1/2,j,k}^{n} - (A_-)_{i-1/2,j,k}^{n} + (A_-)_{i+1/2,j,k}^{n}\right] \quad (3.166)$$

вместо

$$A_{i,j} \to A_{i,j} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\left[(A_+)_{i+1/2,j,k}^{n} - (A_-)_{i-1/2,j,k}^{n}\right].$$

Граница со свободным потоком. И здесь фиктивные ячейки удобны для применения. В этом случае параметры в этих ячейках полагаются равными параметрам внешнего потока.

Фиктивные ячейки могут применяться и для других типов границ: ВХОД, ВЫХОД ДОЗВУКОВОЙ. Но больших преимуществ по сравнению с заданием потоков непосредственно на границе этот метод не дает.

3.21.2. Граничные условия для вязких потоков

Стенку со скольжением рассматривать нет смысла, так как там нет вязкости.

На стенке без скольжения задаются следующие параметры:

$$u_W = v_W = w_W = 0; \qquad p_W = p_{in}. \tag{3.167}$$

Здесь индексом W обозначены параметры на стенке, индексом in – параметры в ближайшем внутреннем узле расчетной области.

Для уравнения энергии возможны разные варианты граничных условий:

1. На стенке может быть задана температура – T_W.
2. Стенка может быть адиабатной, тогда

$$T_W = T_{in}. \tag{3.168}$$

3. Возможен вариант, когда тепловой поток, идущий в стенку q_w, сбрасывается за счет излучения. Баланс тепла имеет вид

$$\varepsilon\sigma_0 T_W^{\,4} = \lambda_W \frac{T_{in} - T_W}{\Delta n}, \tag{3.169}$$

где Δn – расстояние от узла приграничной ячейки до стенки по нормали; ε – коэффициент черноты стенки; σ_0 – константа Стефана–Больцмана; λ_W – коэффициент теплопроводности газа у стенки.

Уравнение (3.169) решается итеративно относительно T_W в каждый момент времени в каждой приграничной ячейке.

Зная значения всех параметров на стенке, можно определить их и в узлах фиктивных ячеек. Например, для нижней границы (см. рис. 3.5) эти значения определяются по формуле

$$f_{i,0} = 2f_W - f_{i,1}, \quad i = 1,2,\ldots,N_X, \tag{3.170}$$

где $f = (u, v, w, p, T)$ – любой параметр течения.

Для получения *неявного представления граничных условий* на нижней стенке поступаем следующим образом.

Вязкие потоки на верхней и нижней границе приграничной ячейки $j=1$ определяются формулой (3.98):

$$(G_V)_{i,j+1/2} = (G_V)^n_{i,j+1/2} + \alpha N^n_{i,j+1/2} \frac{1}{\Delta y}\left(\delta U^n_{i,j+1} - \delta U^n_{i,j}\right);$$

$$(G_V)_{i,j-1/2} = (G_V)^n_{i,j-1/2} + \alpha N^n_{i,j-1/2} \frac{1}{\Delta y}\left(\delta U^n_{i,j} - \delta U^n_{i,j-1}\right), \quad (3.171)$$

где $\delta U^n_{i,j-1}$ — приращение в фиктивной ячейке. Необходимо как-то выразить его через приращения в основных ячейках.

Для этого, как и ранее, вводим вектор

$$V = [\rho, u, v, e]^T. \quad (3.172)$$

Пусть

$$\delta V_{i,j-1} = \Omega \delta V_{i,j}. \quad (3.173)$$

Тогда

$$\delta U_{i,j-1} = \frac{\partial U}{\partial V}\delta V_{i,j-1} = \frac{\partial U}{\partial V}\Omega \delta V_{i,j}. \quad (3.174)$$

Вспоминаем, что с учетом (3.90)

$$G_V = M_V \frac{\partial V}{\partial y} = M_V \frac{\partial V}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (3.175)$$

Используя это, можно аппроксимировать вязкий поток на границе как

$$G_V = M_V \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y}. \quad (3.176)$$

При неявном представлении это дает:

$$(G_V)^{n+1}_{i,j-1/2} = (G_V)^n_{i,j-1/2} + \frac{\partial G_V}{\partial V_{i,j}}\delta V^{n+1}_{i,j} + \frac{\partial G_V}{\partial V_{i,j-1}}\delta V^{n+1}_{i,j-1} =$$

$$= (G_V)^n_{i,j-1/2} + \frac{M_V}{\Delta y}\delta V^{n+1}_{i,j} - \frac{M_V}{\Delta y}\delta V^{n+1}_{i,j-1}; \quad (3.177)$$

$$(G_V)_{i,j-1/2} = (G_V)^n_{i,j-1/2} + \alpha\frac{M_V}{\Delta y}\delta V^{n+1}_{i,j} - \alpha\frac{M_V}{\Delta y}\delta V^{n+1}_{i,j-1}.$$

Отсюда с учетом (3.173)

$$(G_V)_{i,j-1/2} = (G_V)^n_{i,j-1/2} + \alpha \frac{M_V}{\Delta y}(I - \Omega)\delta V^{n+1}_{i,j}. \qquad (3.178)$$

Окончательно получаем:

$$(G_V)_{i,j-1/2} = (G_V)^n_{i,j-1/2} + \alpha \frac{1}{\Delta y}\widetilde{N}^n_{i,j-1/2}\delta U^{n+1}_{i,j}, \qquad (3.179)$$

где

$$\widetilde{N}^n_{i,j-1/2} = M_V (I - \Omega)\frac{\partial V}{\partial U}. \qquad (3.180)$$

Таким образом, разностное уравнение для узла $j = 1$ имеет вид

$$A_{i,j}\delta U^{n+1}_{i,j} + D_{i,j}\delta U^n_{i+1,j} + E_{i,j,k}\delta U^n_{i-1,j} + B_{i,j,k}\delta U^n_{i,j+1} = \Delta U^n_{i,j}. \qquad (3.181)$$

А вклад вязкого потока G_V в коэффициент $A^{\sim}_{i,j}$ определяется формулой

$$A_{i,j} \to A_{i,j} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\left(N^n_{i,j+1/2} + \widetilde{N}^n_{i,j-1/2}\right) \qquad (3.182)$$

вместо

$$A_{i,j} \to A_{i,j} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}\left(N^n_{i,j+1/2,k} + N^n_{i,j-1/2,k}\right).$$

Напомним, что $N = M_V \dfrac{\partial V}{\partial U}$, а M_V определяется по формуле (3.91).

Открытым еще остается вопрос определения матрицы Ω, входящей в формулу (3.173). Она строится с использованием соотношений (3.170) и зависит от граничных условий для уравнения энергии. Граничные условия реализуются следующим образом.

1. На стенке задана температура T_W:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (3.183)$$

2. Если стенка адиабатна, то

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.184)$$

3. Вариант с излучением по формуле (3.169). Дифференцируя эту формулу, получаем

$$4\varepsilon\sigma_0 T_W{}^3 \delta T_W - \lambda_W \frac{\delta T_{in} - \delta T_W}{\Delta n} = 0. \qquad (3.185)$$

Можно показать, что при малых значениях Δn первый член в этом уравнении значительно меньше второго и им можно пренебречь. Поэтому

$$\delta T_W = \delta T_{in} = \delta T_{i,j}. \qquad (3.186)$$

С учетом формулы (3.170) получаем

$$\delta T_{i,0} = 2\delta T_W - \delta T_{i,1} = \delta T_{i,j}. \qquad (3.187)$$

Следовательно, формула для Ω совпадает с (3.184).

Для всех остальных типов границ предполагается отсутствие градиентов параметров на границе, т.е. принимается, что вектор U в фиктивной ячейке равен его значению в приграничной ячейке. Например, если граница расположена справа, то

$$U_{Nx+1,j} = U_{Nx,j}, \quad j = 1,2,...N_Y. \qquad (3.188)$$

При неявном представлении получаются такие же формулы, как для стенки с матрицей Ω, равной единичной:

$$\Omega = I. \qquad (3.189)$$

Глава 4
МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

4.1. ЛАМИНАРНЫЕ И ТУРБУЛЕНТНЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ

Все течения жидкости можно разделить на два совершенно разных класса: ламинарные и турбулентные. (Напомню, что термин «жидкость» имеет широкое значение: жидкость может быть несжимаемой (это собственно жидкость), сжимаемой (газ), проводящей и т.д.)

Основной признак турбулентных течений состоит в том, что движение носит неупорядоченный, хаотический характер. Если использовать подход Лагранжа, то следует отметить, что в отличие от ламинарного течения, в котором близлежащие частицы движутся по практически параллельным траекториям, в турбулентном течении траектории частиц могут произвольно пересекаться и вести себя достаточно непредсказуемо.

Турбулентные течения всегда нестационарны, причем характерные времена (масштабы) этих нестационарностей могут иметь весьма широкий диапазон.

В качестве примера перехода от ламинарного течения к турбулентному чаще всего приводят струйку дыма горящей сигареты в неподвижном воздухе. Вначале частицы дыма движутся практически параллельно по неизменяемым во времени траекториям. Дым кажется неподвижным. Потом в каком-то месте *вдруг* возникают крупные вихри, которые движутся совершенно хаотически. Эти вихри распадаются на более мелкие, те – на еще более мелкие и так далее, и, в конце концов, дым практически смешивается с окружающим воздухом.

На этом примере можно сформулировать основные характерные черты турбулентного течения:

1. Переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит не в точно заданном месте, а в достаточно произвольном, случайном месте и носит вероятностный характер.

2. Само турбулентное движение также носит случайный характер: тот или иной вихрь может оказаться в совершенно произвольном, непредсказуемом месте.

3. Сначала возникают крупные вихри, размер которых больше, чем размер струйки дыма. Движение становится нестационарным и сильно анизотропным. Крупные вихри теряют устойчивость и распадаются на все более мелкие. Таким образом, возникает целая *иерархия вихрей*. Энергия движения этих вихрей передается от крупных вихрей к более мелким и в конце этого процесса исчезает – происходит *диссипация* энергии при мелких масштабах.

4. Смешения дыма с окружающим воздухом практически не происходит при ламинарном режиме, а при турбулентном – оно носит очень интенсивный характер.

5. Несмотря на то, что граничные условия стационарны, само турбулентное течение носит ярко выраженный нестационарный характер – все газодинамические параметры меняются во времени.

6. Есть и еще одно важное свойство турбулентности: оно всегда трехмерно. Даже если мы рассматриваем одномерное течение в трубе или двумерный пограничный слой, все равно движение турбулентных вихрей происходит в направлениях всех трех координатных осей.

Переход от ламинарного течения к турбулентному характеризуется так называемым критическим числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_{cr} = \left(\frac{\rho u L}{\mu} \right)_{cr}, \qquad (4.1)$$

где ρ – плотность потока; u – характерная скорость потока; L – характерный размер потока; μ – коэффициент динамической вязкости.

Например, для течения со скоростью u в трубе в качестве L используется диаметр трубы.

Рейнольдс показал, что в этом случае $2300 < \mathrm{Re}_{cr} < 20000$. Разброс весьма велик, практически на порядок величины.

Аналогичный результат получается в пограничном слое на пластине. В качестве характерного размера берется расстояние от пе-

редней кромки пластины, и тогда $3 \cdot 10^5 < \mathrm{Re}_{cr} < 4 \cdot 10^4$ [8]. Если же L определяется как толщина пограничного слоя, то $2700 < \mathrm{Re}_{cr} < 9000$.

Есть экспериментальные исследования, которые показали, что Re_{cr} может быть еще больше.

В [8] показано, что критическое значение числа Рейнольдса зависит от большего числа факторов, например, от градиента давления, от высоты бугорков шероховатости, от интенсивности турбулентности во внешнем потоке, от перепада температур и т.д.

Вероятно, практически все эти факторы можно свести всего лишь к одному: *возмущению скорости*. И градиент давления, и шероховатость, и интенсивность турбулентности, и неравномерность температур – все это может вызвать некоторое возмущение скорости. Если это возмущение невелико, оно может быть погашено вязкими силами, стремящимися выровнять поле скоростей. При больших возмущениях течение может потерять устойчивость, и возникает турбулентность.

Напомним физический смысл числа Рейнольдса [8]: это соотношение сил инерции и сил вязкости.

Более строго:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{\rho u^2}{\mu \frac{u}{L}}. \qquad (4.2)$$

В числителе стоит удвоенный скоростной напор, а в знаменателе – величина, имеющая порядок напряжения трения, если в качестве L берется толщина пограничного слоя.

Скоростной напор стремится разрушить равновесие, а силы трения противодействуют этому.

Непонятно при этом, почему силы инерции (или скоростной напор) «побеждают» только тогда, когда они более чем в 1000 раз превышают силы вязкости.

Вероятно, более удобно было бы использовать в качестве характерной скорости в Re_{cr} не абсолютную скорость потока u, а возмущение скорости.

В этом случае критическое число Рейнольдса составит порядка 10, т.е. при превышении возмущения скоростного напора над вязкими напряжениями в 5 раз происходит переход ламинарного режима течения в турбулентный.

Это определение критического числа Рейнольдса хорошо объясняет такие экспериментально подтвержденные факты:

1. Для идеально равномерного профиля скорости на идеально гладкой поверхности традиционно определяемое число Re_{cr} стремится к бесконечности [8], т.е. перехода к турбулентности фактически не наблюдается. А вот число Рейнольдса, определяемое по величине возмущения скорости, меньше критического, которое равно 10.

2. При наличии искусственных турбулизаторов, вызывающих всплеск скорости, сравнимый с основной скоростью, поток становится турбулентным при гораздо более низких значениях числа Рейнольдса, чем Re_{cr}, определенное по абсолютному значению скорости.

Это дает нам право использовать значение $Re_{cr} = 10$, где в качестве характерной скорости применяется абсолютное значение возмущения скорости, вызываемого указанными выше причинами.

4.2. ОСРЕДНЕННОЕ И ПУЛЬСАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Как уже говорилось, турбулентное движение является нестационарным и ему присущ широкий спектр масштабов турбулентных вихрей – от наиболее крупных до самых мелких.

Нестационарные уравнения динамики вязкой жидкости описывают движение в турбулентном течении вплоть до минимальных масштабов турбулентности. Однако при численном решении этих уравнений для того, чтобы учесть эти масштабы, может потребоваться настолько мелкая сетка, что даже современные компьютерные мощности не позволят решить такую задачу. То же относится и к выбору шага численного интегрирования по времени, так как характерное время мелкомасштабной турбулентности очень мало. С другой стороны, именно мелкомасштабная турбулентность играет важнейшую роль при описании турбулентных течений.

Поэтому прямое численное моделирование (Direct Numeric Simulation, DNS) турбулентных течений применяется для инженерных расчетов достаточно редко.

Более простой моделью является так называемое моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES). В этом подходе

крупные вихри рассчитываются, а мельчайшие вихри подсеточного масштаба (Sub-Grid Scale, SGS) моделируются. Основной предпосылкой такого подхода является то, что наибольшие вихри, которые находятся под прямым воздействием граничных условий, несут максимум энергии и должны быть рассчитаны.

Эти подходы имеют хорошую перспективу, но в настоящее время наиболее распространенным способом моделирования турбулентности является использование осреднения Рейнольдса, когда вместо уравнений для мгновенных значений параметров используются уравнения для неких осредненных величин. Эти уравнения называются *уравнениями Рейнольдса.*

При турбулентном режиме течения в каждой точке потока все газодинамические параметры течения (скорость, температура, давление и т.д.) постоянно изменяются, притом очень неравномерно.

На рис. 4.1 мгновенная скорость u пульсирует около некоторого среднего во времени значения $\bar{u}$. Отклонение мгновенной скорости u от средней во времени называют пульсационными скоростями u', при этом в любой момент времени

$$u = \bar{u} + u'. \tag{4.3}$$

Таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осреднёнными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

Рис. 4.1. Осциллограмма колебаний скорости в определенной неподвижной точке турбулентного потока, имеющего неизменную среднюю скорость течения

Можно использовать различные способы осреднения газодинамических параметров течения. Например, с использованием математического ожидания и функции плотности распределения вероятностей:

$$M(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} u\cdot f(u)du, \tag{4.4}$$

где u – любой газодинамический параметр (в данном случае скорость), который рассматривается как случайная величина; $f(u)$ – функция распределения плотности вероятностей (ФРПВ) этой величины.

Для течений, в которых средняя величина не меняется во времени, можно использовать осреднение по времени:

$$\bar{u}(x,y,z)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} u(x,y,z,t)dt, \tag{4.5}$$

где Δt – период времени, существенно превышающий временной масштаб турбулентности.

Эргодическая гипотеза (др.-греч. ἔργον – работа и ὁδός – путь) в статистической физике – предположение о том, что средние по времени значения физических величин, характеризующих систему, равны их средним статистическим значениям, – служит для обоснования статистической физики.

Таким образом, можно считать, что $M(u)\cong\bar{u}$.

В дальнейшем будем обозначать осредненные параметры верхним подчеркиванием: $\bar{u},\bar{\rho},\bar{T},\bar{p}$ и т.д. Это так называемые средние по Рейнольдсу.

Для осредненных и пульсационных величин справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\overline{A\pm B}=\bar{A}\pm\bar{B}, \quad \overline{AB}=\bar{A}\cdot\bar{B}+\overline{A'B'}, \quad \overline{A'B'}\neq 0,\\ &\overline{\bar{A}B}=\bar{A}\cdot\bar{B}, \quad \overline{\frac{\partial A}{\partial x_i}}=\frac{\partial\bar{A}}{\partial x_i}, \quad \overline{\frac{\partial A}{\partial t}}=\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}, \quad \overline{A'}=0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Величину $\overline{A'B'}$ называют корреляцией пульсаций случайных величин A и B. В общем случае она не равна нулю, и это порождает очень интересные следствия. Об этом будет рассказано далее.

Осредненные уравнения движения вязкой жидкости называются *уравнениями Рейнольдса.*

4.3. ДВУМЕРНЫЙ СЛОЙ СМЕШЕНИЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Рассмотрим смешение двух потоков несжимаемой жидкости, которые движутся параллельно оси x, но с разной скоростью. При этом плотность и динамическая вязкость являются константами.

Для несжимаемого течения

$$\operatorname{div}(v) \equiv \frac{\partial u_m}{\partial x_m} = 0. \tag{4.7}$$

Тензор вязких напряжений равен

$$\tau_{ij} \equiv \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m}{\partial x_m} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{4.8}$$

Таким образом, входящая в уравнение количества движения величина будет равна

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ji}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) = \mu\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right] =$$

$$= \mu\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_i}^2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right] = \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial {x_i}^2}.$$

А уравнение количества движения в проекции на ось x для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{4.9}$$

Очевидно, что каждый из двух параллельных потоков за счет вязкости вызывает возмущение скорости в соседнем потоке, и это возмущение равно разности скоростей Δu. Число Рейнольдса, выраженное через это возмущение и толщину слоя смешения δ, равно

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \Delta u \delta}{\mu}. \tag{4.10}$$

Если оно превышает критическое значение ~ 10, происходит переход к турбулентному режиму течения.

Для математического описания этого течения используем подход Рейнольдса, т.е. проведем осреднение уравнения (4.9), используя правила (4.6):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{u})+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\bar{u}^2+\rho\overline{u'^2}+\bar{p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\bar{u}\bar{v}+\rho\overline{u'v'}\right)=\mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}. \quad (4.11)$$

Действительно, например,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\rho uv}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\overline{(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\overline{(\bar{u}\bar{v}+u'\bar{v}+\bar{u}v'+u'v')}\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(\overline{\bar{u}\bar{v}}+\overline{u'\bar{v}}+\overline{\bar{u}v'}+\overline{u'v'}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{u}\bar{v})+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\overline{u'v'}\right).$$

Плотность не надо осреднять, так как она не пульсирует.

По форме записи уравнение (4.11) очень похоже на исходное уравнение (4.9), но в нем появились два дополнительных члена: $\rho\overline{u'^2}$, $\rho\overline{u'v'}$. Это связано с тем, что корреляции пульсаций случайных величин не равны нулю.

Попробуем понять физический смысл этих дополнительных членов.

Прежде всего введем понятие *турбулентной кинетической энергии*:

$$K=\frac{1}{2}\overline{u_i'^2}=\frac{1}{2}\left(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2}\right). \quad (4.12)$$

Эту энергию несут турбулентные вихри, и она отнюдь не равна нулю. Как уже указывалось, турбулентность носит существенно трехмерный характер, и поэтому ни один из трех членов, входящих в (4.12), не равен нулю.

Дополнительный член $\overline{u'^2}$ является одной из составляющих турбулентной кинетической энергии.

Для того, что понять смысл величины $\rho\overline{u'v'}$, представим следующую умозрительную картину. Пусть в каком-то поперечном сечении слоя смешения профиль скорости имеет вид, как на рис. 4.2.

В какой-то момент времени возникает крупный турбулентный вихрь, и пусть в результате появляется положительная пульсация попе-

речной скорости v'. За счет этого происходит перенос вещества вверх: из слоя с координатой y_1 (см. рис. 4.2) в слой с координатой y_2. Расстояние между слоями L примерно равно размеру возникшего вихря.

В результате количество движения в слое y_2 составит $\rho u_1 = \rho u(y_1)$ вместо количества движения $\rho u_2 = \rho u(y_2)$, которое было до возникновения вихря. Таким образом, произойдет изменение скорости, т.е. возникнет пульсация продольной скорости

$$u' = u_1 - u_2 . \tag{4.13}$$

В данном примере эта пульсация имеет отрицательный знак, так как на рис. 4.2 скорость u_1 меньше скорости u_2. То есть происходит торможение потока в слое y_2.

Исходя из профиля скорости, представленного на рисунке, эту разницу скоростей можно приблизительно выразить через производную скорости:

$$u_1 - u_2 \cong -L\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.14}$$

В результате получается, что положительная пульсация случайной величины v' вызвала пульсацию случайной величины u', определяемую формулой (4.14), т.е.

$$u'v' \cong -v'L\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.15}$$

Аналогично, в случае отрицательной пульсации v' вызывает положительную пульсацию u', и в общем случае получается формула

$$u'v' \cong -|v'|L\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.16}$$

В качестве оценки интенсивности пульсации поперечной скорости можно использовать среднеквадратичную величину $\sqrt{v'^2}$, и в результате после осреднения имеем:

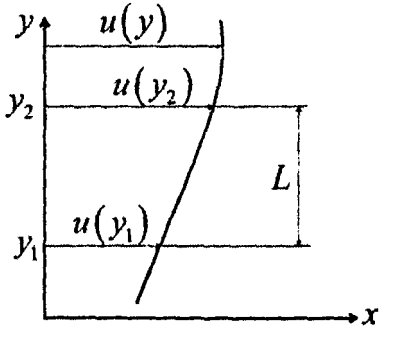

Рис. 4.2. Профиль скорости в поперечном сечении слоя смешения

$$\rho\overline{u'v'} \cong -\rho\sqrt{v'^2}L\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}. \qquad (4.17)$$

Влияние пульсаций проявляется в том, что более медленный слой жидкости тормозит более быстрый, и наоборот, более быстрый слой увлекает за собой более медленный. Такой физический процесс похож на обычное трение и называется *турбулентным трением.*

При ламинарном режиме течения молекулярное трение в слое смешения определяется формулой

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (4.18)$$

По аналогии строится турбулентное трение:

$$\tau_T \equiv -\rho\overline{u'v'} = \mu_T\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}, \qquad (4.19)$$

где

$$\mu_T = C_1\rho\sqrt{v'^2}L\ - \qquad (4.20)$$

так называемый *коэффициент турбулентной вязкости.*

В этой формуле C_1 – константа порядка единицы.

Вводим определения: величина $\sqrt{v'^2}$ – *масштаб пульсаций поперечной скорости,* L – *масштаб турбулентности.* Таким образом, коэффициент турбулентной вязкости пропорционален произведению масштаба пульсаций скорости на масштаб турбулентности, который имеет порядок линейного размера крупных турбулентных вихрей.

Стоит отметить, что вывод формулы для обыкновенной молекулярной вязкости дает аналогичный результат, только в ней используются среднеквадратичная скорость теплового движения молекул и длина свободного пробега молекул.

Оценка величин, входящих в уравнение (4.11), показывает, что в слое смешения справедливо:

$$\overline{u'^2} \ll \bar{u}^2, \quad \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}. \qquad (4.21)$$

При использовании всех описанных допущений уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\bar{u})+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\bar{u}^2+\bar{p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\bar{u}\bar{v})=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu+\mu_T)\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right]. \qquad (4.22)$$

4.4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Формула (4.20), полученная для двумерного слоя смешения, лежит в основе большинства используемых на практике способов моделирования турбулентных течений – *моделей турбулентности.*

Простейшими из них являются модели, основанные на алгебраических формулах для масштаба пульсаций скорости $\sqrt{v'^2}$ и масштаба турбулентности L.

Для течения в пограничном слое успешно использовалась модель *пути смешения (перемешивания) Прандтля.*

Она основана на двух предположениях.

1. Турбулентный вихрь (комок жидкости) при перемещении из одного слоя пограничного слоя в другой сохраняет свою индивидуальность (свои свойства) на некотором расстоянии, называемом путем перемешивания. Это расстояние ассоциируется с масштабом турбулентности L.

2. Средние пульсации поперечной скорости пропорциональны пульсациям продольной скорости, т.е. для них можно использовать формулу (4.14).

В результате получается следующая формула для коэффициента турбулентной вязкости:

$$\mu_T = C_2\rho L^2\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|. \qquad (4.23)$$

Чаще всего полагают, что длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию от стенки.

Для слоя смешения большее распространение получила формула, основанная на предположении, что $\sqrt{v'^2}$ пропорциональна разности скоростей смешивающихся потоков жидкости Δu, а масштаб турбулентности пропорционален ширине слоя смешения Δy. В этом случае

$$\mu_T = C_3\rho|\Delta u|\Delta y. \qquad (4.24)$$

Разумеется, числовые коэффициенты пропорциональности C_1, C_2, C_3 имеют совершенно разные значения в рассматриваемых формулах (4.20), (4.23) и (4.24).

Основным достоинством алгебраических моделей турбулентности является их простота. Основная система уравнений, описывающих движение жидкости и называемых уравнениями Рейнольдса, по форме практически совпадает с системой уравнений Навье–Стокса. Только вместо коэффициента динамической вязкости μ используется некая эффективная вязкость

$$\mu_{ef} = \mu + \mu_T, \tag{4.25}$$

а вместо мгновенных значений параметров (например, u) используются их осредненные аналоги ($\overline{u}$ и т.п.).

4.5. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ПОТОКАХ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ. ОСРЕДНЕНИЕ ПО ФАВРУ

Правила осреднения Рейнольдса можно применить к основным уравнениям динамики жидкости и в случае сжимаемых течений, т.е. в случае, когда плотность не является константой. Однако для сжимаемых течений в полученных уравнениях содержится большое количество членов, содержащих пульсации плотности.

Для устранения этой проблемы используется метод, предложенный Фавром [9], в котором используются так называемые среднемассовые значения параметров или средние по Фавру:

$$\widetilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\overline{\rho}}. \tag{4.26}$$

Мгновенные значения величин в этом случае представляются в виде

$$T = \widetilde{T} + T'', \tag{4.27}$$

где T'' – пульсационная составляющая по Фавру, т.е. мгновенное отклонение параметра от среднего по Фавру.

Для средних по Фавру и соответствующих пульсаций справедливы следующие соотношения:

$$\widetilde{A\pm B}=\frac{\overline{\rho(A\pm B)}}{\overline{\rho}}=\widetilde{A}\pm\widetilde{B},\quad \widetilde{A\overline{B}}=\overline{A\frac{\rho\overline{B}}{\overline{\rho}}}=\widetilde{A}\overline{B},$$

$$\overline{\rho A''}=\overline{\rho\left(A-\widetilde{A}\right)}=\overline{\rho A}-\overline{\rho}\widetilde{A}=\overline{\rho}\widetilde{A}-\overline{\rho}\widetilde{A}=0;$$

$$\overline{\rho AB}=\overline{\rho\left(\widetilde{A}+A''\right)\left(\widetilde{B}+B''\right)}=\overline{\rho\left(\widetilde{A}\widetilde{B}+A''\widetilde{B}+\widetilde{A}B''+A''B''\right)}=$$

$$=\overline{\rho}\widetilde{A}\widetilde{B}+\overline{\rho A''\widetilde{B}}+\overline{\rho}\widetilde{A}B''+\overline{\rho A''B''}=\overline{\rho}\widetilde{A}\widetilde{B}+\overline{\rho A''B''}=\overline{\rho}\widetilde{A}\widetilde{B}+\overline{\rho}\widetilde{A''B''},\quad (4.28)$$

$$\overline{A''}=\overline{\left(A-\widetilde{A}\right)}=\overline{A}-\widetilde{A}=\overline{A}-\frac{\overline{\rho A}}{\overline{\rho}}=\overline{A}-\frac{\overline{\left(\overline{\rho}+\rho'\right)\left(\overline{A}+A'\right)}}{\overline{\rho}}=$$

$$=\overline{A}-\frac{\overline{\left(\overline{\rho}\overline{A}+\rho'\overline{A}+\overline{\rho}A'+\rho'A'\right)}}{\overline{\rho}}=-\frac{\overline{\rho'A'}}{\overline{\rho}}\neq 0.$$

4.6. ОСРЕДНЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Применим правила осреднения Рейнольдса (4.6) и Фавра (4.28) к основным уравнениям динамики жидкости.

1. Уравнение неразрывности в декартовой системе имеет вид (см. главу 1)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)=0. \quad (4.29)$$

Осредним его:

$$\overline{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)}=\overline{\frac{\partial\rho}{\partial t}}+\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)}=\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j}\right)=\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_j}\right).$$

Таким образом, уравнение неразрывности для осредненных величин имеет вид

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_j}\right)=0. \quad (4.30)$$

2. Аналогично поступаем с уравнением движения, которое для мгновенных значений параметров имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_j\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho u_i u_j+\delta_{ij}p-\tau_{ji}\right)=\rho F_j,\quad j=1,2,3. \quad (4.31)$$

Применим к нему осреднение:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j+\delta_{ij}p-\tau_{ji})}=\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\rho u_j)}+\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{(\rho u_i u_j+\delta_{ij}p-\tau_{ji})}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\widetilde{u_j})+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{B}+\overline{\rho u_i'' u_j''}+\delta_{ij}\overline{p}-\overline{\tau_{ji}}\right).$$

Уравнение количества движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho}\widetilde{u_j})+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_i}\widetilde{u_j}+\overline{\rho u_i'' u_j''}+\delta_{ij}\overline{p}-\overline{\tau_{ji}}\right)=\overline{\rho}\widetilde{F_j},\quad j=1,2,3. \quad (4.32)$$

3. Применяя осреднение к уравнению энергии

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j H-u_i\tau_{ij}+q_j\right]=\rho F_j u_j, \quad (4.33)$$

получаем:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\widetilde{E})}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_j\widetilde{H}+\overline{\rho u_j'' h''}+\tilde{u}_i\overline{\rho u_j'' u_j''}+\frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i''^2}+\overline{q}_j-\tilde{u}_i\overline{\tau}_{ij}-\overline{u_i''\tau_{ij}}\right)=$$

$$=\overline{\rho}\widetilde{F_j}\widetilde{u_j}. \quad (4.34)$$

Пульсациями плотности массовой силы можно пренебречь.

Более полная информация содержится в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/4_6.pdf

В (4.34) $\widetilde{H}=\left(\tilde{h}+\frac{1}{2}\tilde{u}_i^2+K\right)$ – осредненная полная энтальпия H; $K=\frac{1}{2}\widetilde{u_i''^2}$ – *турбулентная кинетическая энергия.*

Внутренняя энергия e и энтальпия h связаны соотношением

$$h=e+\frac{p}{\rho}. \quad (4.35)$$

Кроме того, для идеального справедливо уравнение состояния:

$$p=\rho RT=(\gamma-1)C_V T\rho=(\gamma-1)e\rho. \quad (4.36)$$

После осреднения этих уравнений получаем

$$\tilde{h}=\tilde{e}+\frac{\overline{p}}{\overline{\rho}},\quad \overline{p}=\overline{\rho}R\tilde{T}=(\gamma-1)C_V\widetilde{T\rho}=(\gamma-1)\widetilde{e\rho}. \quad (4.37)$$

В уравнениях (4.32), (4.34) присутствуют важные корреляции пульсаций $\overline{\rho u_j'' u_i''}$ и $\overline{\rho u_j'' h''}$.

В параграфе 4.3 на примере двумерного слоя мы убедились, что корреляции пульсаций компонент скорости имеют физический смысл дополнительного турбулентного трения. Аналогично, корреляции пульсаций скорости и энтальпии имеет смысл дополнительного турбулентного переноса тепла.

Таким образом, указанные члены имеют следующий физический смысл: $\overline{\rho u_j'' u_i''} = \rho \overline{u_j'' u_i''}$ – компоненты тензора напряжений дополнительного турбулентного трения; $\overline{\rho u_j'' h''} = \rho \overline{u_j'' h''}$ – компоненты вектора дополнительного турбулентного теплового потока.

4.7. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Полученную систему невозможно решить без введения дополнительных допущений. Эти допущения можно разбить на несколько логических групп.

Группа 1. Относится к моделированию молекулярных вязких, тепловых и диффузионных потоков.

Пренебрегаем корреляцией: $\overline{u_i'' \tau_{ij}} = 0$.

Тензор вязких напряжений и тепловой поток моделируются по формулам

$$\bar{\tau}_{ij} = \bar{\mu}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\bar{\mu}\frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m}, \quad \bar{q}_j = -\bar{\lambda}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}. \tag{4.38}$$

Переносные свойства при этом выражаются через средние (по Фавру) значения параметров:

$$\bar{\mu} = \overline{\mu(T)} = \mu\left(\tilde{T}\right), \quad \bar{\lambda} = \overline{\lambda(T)} = \lambda\left(\tilde{T}\right). \tag{4.39}$$

Если ввести в рассмотрение критерий Прандтля

$$\mathrm{Pr} = \frac{\bar{\mu} C_P}{\bar{\lambda}}, \tag{4.40}$$

то уравнение для теплового потока можно записать в виде

$$\bar{q}_j = -\frac{\bar{\mu} C_P}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} = -\frac{\bar{\mu}}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}. \qquad (4.41)$$

Некоторые аргументы в обоснование правомочности допущений этой группы будут рассмотрены позднее в данной главе.

Группа 2. Относится к моделированию дополнительных турбулентных потоков $\overline{\rho u_j'' u_i''}$, $\overline{\rho u_j'' h''}$, $\frac{1}{2}\overline{\rho u_j'' u_i''^2}$. Основное допущение, наиболее часто используемое на практике, состоит в том, что эти потоки моделируются аналогично молекулярным потокам (см. главу 1 и формулы (4.38) и (4.41)).

Тензор турбулентных напряжений моделируется через скорость деформаций

$$-\overline{\rho u_j'' u_i''} = \mu_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu_T \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho K. \qquad (4.42)$$

Последний член в формуле добавлен для совпадения инвариантов тензоров, стоящих в формуле справа и слева.

Здесь μ_T – коэффициент турбулентной вязкости.

Для моделирования μ_T за основу можно взять формулу (4.20):

$$\mu_T = C_1 \bar{\rho} \sqrt{\overline{\nu''^2}} L. \qquad (4.43)$$

В качестве масштаба скорости $\sqrt{\overline{\nu''^2}}$ можно по аналогии со слоем смешения использовать среднеквадратичную пульсацию скорости по направлению по нормали к линиям тока $\sqrt{\overline{V_n''^2}}$.

Однако в общем случае для практического использования масштаба турбулентности L неудобно. Для описания турбулентных течений более важным параметром является не какой-то один характерный масштаб длины, а характерный масштаб времени τ, т.е. время, за которое энергия движения крупных вихрей, полученная от осредненного движения, проходит весь спектр масштабов размеров – от наиболее крупных до самых мелких, при которых происходит диссипация турбулентной энергии.

Исходя из теории размерностей, получаем

$$L = \sqrt{\overline{V_n''^2}}\,\tau, \qquad (4.44)$$

и окончательная формула для μ_T принимает вид

$$\mu_T = C_1 \bar{\rho} \widetilde{V_n''^2} \tau . \qquad (4.45)$$

Эту формулу и будем рассматривать как основу для дальнейших выкладок.

Турбулентные потоки скалярных величин моделируются через градиенты этих величин:

$$\widetilde{\rho u_j'' h''} = -\frac{\mu_T}{\mathrm{Pr}_T}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}, \quad \frac{1}{2}\widetilde{\rho u_j'' u_i''^2} = -\frac{\mu_T}{\sigma_K}\frac{\partial K}{\partial x_j}, \qquad (4.46)$$

где Pr_T – турбулентное число Прандтля; σ_K – аналог числа Прандтля для потока турбулентной кинетической энергии K (обычно полагается константой, близкой к единице).

Таким образом, задача моделирования турбулентности сведена к определению параметров, входящих в определение коэффициента турбулентной вязкости μ_T (4.45), турбулентной кинетической энергии K и турбулентного числа Прандтля.

4.8. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Одним из важнейших параметров, характеризующих турбулентное движение, является турбулентная кинетическая энергия $K = \frac{1}{2}\widetilde{u_i''^2}$. Процесс получения дифференциального уравнения переноса этого параметра называется *взятием момента* от уравнения количества движения. Этот процесс подробно описан в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/4_8.pdf

Уравнение для турбулентной кинетической энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}K\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\underbrace{-\overline{\rho u_j'' \frac{1}{2}\left(u_i''\right)^2}}_{\text{(I)}} \underbrace{-\overline{p' u_j''}}_{\text{(II)}} + \underbrace{\overline{\tau_{ij} u_i''}}_{\text{(III)}}\right] -$$

$$\underbrace{-\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{(IV)}} \underbrace{-\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}}_{\text{(V)}} \underbrace{-\overline{u_j''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}}_{\text{(VI)}} + \underbrace{\overline{p'\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}}}_{\text{(VII)}} \underbrace{-\overline{\tilde{\tau}_{ij}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}}_{\text{(VIII)}}. \qquad (4.47)$$

Физический смысл членов, входящих в правую часть уравнения (4.47), следующий: (I) – турбулентный диффузионный перенос, обусловленный пульсациями скорости; (II) – турбулентный диффузионный перенос, обусловленный пульсациями давления; (III) – молекулярный диффузионный перенос; (IV) – генерация турбулентной энергии, обусловленная взаимодействием напряжений Рейнольдса и градиента средней скорости; (V) – вязкая диссипация турбулентной энергии в тепло; (VI) – работа сил давления; (VII) – дополнительная диссипация, обусловленная взаимодействием пульсаций давления с дивергенций пульсаций скорости; (VII) – дополнительный член, учитывающий вязкое трение.

4.9. НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ

Уравнение для турбулентной кинетической энергии наиболее хорошо изучено для несжимаемой жидкости, т.е. для случая, когда $\rho = \text{const}$. Обычно при этом полагается постоянным коэффициент динамической вязкости: $\mu = \text{const}$. Средние по Рейнольдсу и по Фавру при этом совпадают: $\widetilde{T} = \overline{T}$. Совпадают и соответствующие пульсации: $T'' = T'$.

Очевидно, что в несжимаемой жидкости справедливо

$$\overline{u_i''} = -\frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} = 0. \tag{4.48}$$

Легко показать, что дивергенция пульсаций скорости равна нулю. Действительно, из (4.29) и (4.30) следует:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0. \tag{4.49}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(u_j - \overline{u_j}\right)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0. \tag{4.50}$$

Таким образом, в несжимаемой жидкости три последних члена уравнения (4.47) – (VI), (VII), (VIII) – тождественно равны нулю.

Для представления диссипативного члена (V) уравнения (4.47) рассмотрим несколько промежуточных формул.

Прежде всего,

$$\tau_{ij}'' = \tau_{ij}' = \left(\tau_{ij} - \overline{\tau_{ij}}\right) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \mu\left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right) = \mu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right) = 2\mu S_{ij}', \tag{4.51}$$

где $S_{ij}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)$ – тензор пульсаций скоростей деформаций.

Вследствие симметрии тензора τ_{ij}' с помощью перестановки индексов можно получить

$$\tau_{ij}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \tau_{ji}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} = \tau_{ij}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}. \tag{4.52}$$

Отсюда получаем:

$$\tau_{ij}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\tau_{ij}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \tau_{ij}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\tau_{ij}'\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2 =$$

$$= 2\mu\left(S_{ij}'\right)^2. \tag{4.53}$$

После осреднения

$$\overline{\tau_{ij}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = \frac{1}{2}\mu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2} = \frac{1}{2}\mu\overline{\left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + 2\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\right]} =$$

$$= \mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}. \tag{4.54}$$

Можно доказать, что

$$\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i' u_j'}\right)\right) - 2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}\right) + \overline{\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}\right)^2}. \tag{4.55}$$

При однородной турбулентности первые два члена в правой части формулы (4.55) обращаются в нуль.

Для несжимаемой жидкости третий член в правой части формулы (4.55) также равен нулю.

Таким образом, в случае однородной турбулентности получаем

$$\overline{\mu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}} = 0. \qquad (4.56)$$

В работе [10] показано, что и для неоднородной турбулентности при больших значениях чисел Рейнольдса ассимптотически справедливо это выражение.

Таким образом, член, характеризующий вязкую диссипацию в уравнении (4.47), при больших числах Re может быть записан как

$$\rho\varepsilon \equiv \overline{\tau_{ij}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = \overline{\mu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}. \qquad (4.57)$$

Здесь через ε обозначена так называемая *скорость диссипации* турбулентной кинетической энергии. Ее физический смысл – скорость, с которой турбулентная кинетическая энергия K превращается в тепло вследствие вязкого трения. Единицы измерения ε – [м^2/с^3].

Для несжимаемой жидкости уравнение переноса турбулентной кинетической энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_j} K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_K} + \mu\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + P_K - \rho\varepsilon, \qquad (4.58)$$

где $P_K = -\overline{\rho u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ – генерация K.

Здесь использовались допущения о градиентном характере турбулентной и молекулярной диффузии турбулентной кинетической энергии:

$$-\overline{\rho u_j' K} - \overline{p' u_j'} = \frac{\mu_T}{\sigma_K}\frac{\partial K}{\partial x_j}, \quad \overline{\tau_{ij} u_i'} = \mu \frac{\partial K}{\partial x_j}. \qquad (4.59)$$

Уравнение переноса ε можно строго получить, используя ту же методику, что и для вывода уравнения переноса K, только вместо $u_i'' u_i''$ необходимо использовать $\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$. Здесь $\nu = \mu/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости.

В результате получается уравнение, содержащее большое количество достаточно сложных корреляций пульсаций, для кото-

рых при больших значениях чисел Рейнольдса получаются некоторые асимптотические зависимости. Автор не будет утомлять читателей этими выкладками, а переадресует интересующихся к книге [11].

Дело в том, что в результате получается уравнение, по структуре подобное уравнению переноса K:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}+\mu\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_j}\right]+\frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon 1}\mathrm{P}_K-C_{\varepsilon 2}\rho\varepsilon\right), \quad (4.60)$$

где σ_ε, $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ – числовые константы.

Следует признать очень удачным представление, предложенное в [12]. Смысл этого представления состоит в том, что необязательно использовать уравнения именно для K или ε; вместо них можно решать уравнение для любой их степенной функции:

$$Z=C_Z K^m\varepsilon^n. \quad (4.61)$$

Уравнение переноса этой функции и имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}Z\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_Z}+\mu\right)\frac{\partial Z}{\partial x_j}\right]+\frac{Z}{K}\left(C_{Z1}\mathrm{P}_K-C_{Z2}\rho\varepsilon\right), \quad (4.62)$$

где σ_Z, C_{Z1}, C_{Z2} – числовые коэффициенты.

4.10. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. K-ε МОДЕЛЬ, K-ω МОДЕЛЬ УИЛКОКСА, МОДЕЛЬ SST МЕНТЕРА

Как уже говорилось, в системе уравнений Рейнольдса, описывающих осредненное течение жидкости при турбулентном режиме течения, появляются дополнительные неизвестные параметры, имеющие физический смысл тензора турбулентных напряжений трения. Для его моделирования можно использовать формулу (4.42), которая для несжимаемых течений имеет вид

$$-\rho\overline{u_j'u_i'}=\mu_T\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\delta_{ij}\rho K. \quad (4.63)$$

При таком подходе для замыкания системы необходимо получить формулу для коэффициента турбулентной вязкости μ_T. В настоящее время для этой цели чаще всего используются так называемые *двухпараметрические модели.* Так они называются потому, что в них μ_T определяется через два параметра, для которых решаются дополнительные дифференциальные уравнения в частных производных.

Целый ряд моделей турбулентности строится на основе уравнения для турбулентной кинетической энергии.

Предполагается, что среднеквадратичная пульсация $\widetilde{V_n'^2}$ пропорциональна всей турбулентной кинетической энергии K (а это совершенно справедливо для больших значений чисел Рейнольдса). Тогда из формулы (4.45) следует, что

$$\mu_T = C\rho K\tau. \qquad (4.64)$$

1. K-ε модель турбулентности. С точки зрения теории размерностей можно предположить, что отношение K/ε и есть то время, за которое энергия движения крупных вихрей, полученная от осредненного движения, проходит весь спектр масштабов размеров – от наиболее крупных до самых мелких, при которых происходит диссипация турбулентной энергии. То есть τ, входящее в формулу (4.45), определяется как $\tau = K/\varepsilon$.

Отсюда следует, что коэффициент турбулентной вязкости определяется по формуле

$$\mu_T = C_\mu \rho \frac{K^2}{\varepsilon}. \qquad (4.65)$$

Кроме того, в модель входят следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_j} K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_K} + \mu\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + P_K - \rho\varepsilon; \qquad (4.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_j}\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} + \mu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon 1} P_K - C_{\varepsilon 2}\rho\varepsilon\right). \qquad (4.67)$$

В классической K-ε модели используются следующие числовые константы:

$$C_\mu = 0.09;\quad \sigma_K = 1;\quad \sigma_\varepsilon = 1.3;\quad C_{\varepsilon 1} = 1.44;\quad C_{\varepsilon 2} = 1.92. \qquad (4.68)$$

Эта модель широко используется для свободных течений (струи, слой смешения и т.п.), но плохо описывает пристеночные течения. Дело в том, что при выводе основных уравнений, относящихся к скорости диссипации ε, использовалось допущение о больших значениях локального числа Рейнольдса. Возле стенки это допущение нарушается – локальное число Рейнольдса стремится к нулю.

2. K-ω модель Уилкокса [13]. Она лишена вышеуказанного недостатка K-ε модели. В ней также используются два параметра: турбулентная кинетическая энергия K и величина ω, которая обратно пропорциональна характерному масштабу времени τ и измеряется, следовательно, в единицах частоты [1/с].

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитываются по формуле

$$\mu_T = \rho\frac{K}{\omega}. \qquad (4.69)$$

Уравнения переноса K и ω имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}K\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{K1}}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right]+P_K-\beta_0^*\rho K\omega; \qquad (4.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\omega\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 1}}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+\alpha\frac{\omega}{K}P_K-\beta_0\rho\omega^2. \qquad (4.71)$$

Числовые константы, входящие в эту модель, равны

$$\beta_0^*=0.09,\quad \alpha=5/9,\quad \beta_0=0.075,\quad \sigma_{K1}=2,\quad \sigma_{\omega 1}=2.$$

Если использовать подход, описанный формулами (4.61),(4.62), то очевидно, что связь между параметрами ω и ε имеет вид

$$\omega=\frac{\varepsilon}{\beta_0^* K}. \qquad (4.72)$$

K-ω модель хорошо описывает пристеночные течения, но крайне неудобна для свободных течений: в зависимости от задания параметра частоты турбулентных пульсаций ω, принимаемого на границе расчетной области, может быть получен значительный разброс в результатах расчета. Кроме того, рассматриваемый метод имеет низкую точность решения в области свободного течения.

3. Модель SST Ментера [14,15]. Эта модель является некой комбинированной моделью турбулентности, основанной на использовании K-ω модели в пристеночных областях и K-ε модели в областях, находящихся на достаточном удалении от стенки. Этот комбинированный метод заключается в преобразовании уравнений K-ε модели к K-ω формулировке. Уравнения видоизмененной K-ε модели дополняются стыковочной функцией $1-F_1$. Функция F_1 принимает значение $F_1=1$ вблизи поверхности и обращается в ноль за пределами пограничного слоя, т.е. на линии границы пограничного слоя и за его пределами K-ε модель возвращается к первоначальной, стандартной формулировке.

Эта модель показала хорошие результаты при расчете течений в зоне отрыва и при сильном продольном градиенте давления. Она учитывает перенос касательных напряжений.

Для преобразования уравнений стандартной K-ε модели к уравнениям в формулировке K-ω воспользуемся формулой (4.72)

$$\varepsilon=\beta_0^* K\omega. \tag{4.73}$$

Отсюда

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{K\beta_0^*}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}-\frac{\varepsilon}{K}\frac{dK}{dt}\right). \tag{4.74}$$

Подставляем эти формулы в уравнения (4.66), (4.67) и получаем, что в преобразованном виде стандартная K-ε модель имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}K\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right]+\mathrm{P}_K-\beta_0^*\rho K\omega; \tag{4.75}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\omega\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 2}}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+\alpha_2\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K-\beta_2\rho\omega^2+$$
$$+\frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}, \tag{4.76}$$

где числовые константы равны

$$\beta_0^*=C_\mu=0.09;\quad \alpha_2=(C_{\varepsilon 1}-1)=0.44;\quad \beta_2=(C_{\varepsilon 2}-1)C_\mu=0.0828.$$

Следует отметить, что уравнение (4.75) является строгим следствием уравнения (4.66), а при выводе уравнения (4.76) Ментер пренебрег некоторыми диффузионными членами. В работе [15] показано, что эти члены не влияют на результаты расчетов.

Основная идея модели SST турбулентности состоит в том, что с помощью стыковочной функции F_1 получается линейная комбинация уравнений (4.70), (4.71) из K-ω модели и уравнений (4.75), (4.76) в преобразованной стандартной модели турбулентности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}K\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{K3}}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right]+\mathrm{P}_K-\beta_0^*\rho K\omega, \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\omega\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 3}}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+\alpha_3\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K-\beta_3\rho\omega^2+$$
$$+(1-F_1)\frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j}, \quad (4.78)$$

где коэффициенты новой модели – линейная комбинация соответствующих коэффициентов моделей, лежащих в основе метода:

$$\alpha_3=F_1\alpha+\alpha_2(1-F_1),\quad \beta_3=F_1\beta_0+\beta_2(1-F_1);$$
$$\frac{1}{\sigma_{K3}}=F_1\frac{1}{\sigma_{K1}}+(1-F_1)\frac{1}{\sigma_K},\quad \frac{1}{\sigma_{\omega 3}}=F_1\frac{1}{\sigma_{\omega 1}}+(1-F_1)\frac{1}{\sigma_{\omega 2}}. \quad (4.79)$$

Стыковочная функция в модели Ментера строится таким образом, чтобы наиболее адекватно учитывать перенос напряжения трения в пограничном слое. Напомним, что $F_1=1$ вблизи поверхности и $F_1=0$ за пределами пограничного слоя.

В модели Ментера для несжимаемой жидкости коэффициент турбулентной вязкости определяется по формуле

$$\mu_T=\rho\frac{a_1K}{\max(a_1\omega,\Omega F_2)}=\rho\frac{K}{\max(\omega,SF_2/a_1)}, \quad (4.80)$$

где $a_1=0.31$; $S=\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ – инвариант тензора скоростей деформации,

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \quad (4.81)$$

Стыковочные функции в модели SST определяются по следующим формулам:

$$F_1 = \tanh\left(\arg_1{}^4\right); \quad \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{K}}{\beta_0^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right), \frac{4\rho K}{CD_{K\omega}\sigma_{\omega 2} y^2}\right];$$

$$CD_{K\omega} = \max\left(\frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 1.0\times 10^{-10}\right); \quad F_2 = \tanh\left(\arg_2{}^2\right);$$

$$\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{K}}{\beta_0^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right). \tag{4.82}$$

Здесь y – расстояние до ближайшей стенки.

Расстояние от стенки можно определять чисто геометрически, но лучше использовать следующий алгоритм.

Для всей расчетной области решается уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \phi = -1 \tag{4.83}$$

с граничными условиями Дирихле $\phi = 0$ на стенке и Неймана $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ на всех остальных границах.

После нахождения функции ϕ расстояние от стенки определяется через градиент ϕ:

$$y = -|\nabla\phi| + \sqrt{|\nabla\phi|^2 + 2\phi}. \tag{4.84}$$

4.11. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЧЛЕНЫ В УРАВНЕНИИ ПЕРЕНОСА ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ В СЛУЧАЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В случае сжимаемой жидкости, когда плотность жидкости является переменной, в уравнении переноса турбулентной кинетической энергии (4.47) появляются дополнительные члены, которых нет в несжимаемой жидкости.

Это $\Pi = -\overline{u_j''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \equiv \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}$ – работа сил давления; $K = \overline{p'\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}}$ – дополнительная диссипация, обусловленная взаимодействием

пульсаций давления с дивергенций пульсаций скорости; $\overline{\tilde{\tau}_{ij}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$ – дополнительный член, учитывающий вязкое трение.

Последним членом можно пренебречь, так как при больших значениях числа Рейнольдса первый сомножитель, входящий в него, очень мал, а при малых значениях числа Рейнольдса – пренебрежимо мал второй сомножитель.

Кроме появления дополнительных членов, есть и еще одна особенность. Дело в том, что вязкая диссипация $\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$ в случае сжимаемой жидкости уже не определяется формулой $\rho\varepsilon = \mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$, для которой выводится уравнение (4.60).

Проанализируем формулу для вязкой диссипации $\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$.

Прежде всего отметим, что вследствие симметричности тензора вязких напряжений справедливо:

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ji}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad a = b \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a+b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\tau_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Введем обозначение для пульсаций скорости деформации:

$$s_{ij}'' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right). \tag{4.85}$$

Тогда для сжимаемых течений с учетом того, что

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m}{\partial x_m}, \tag{4.86}$$

получаем, пренебрегая пульсациями вязкости:

$$\tau_{ij}'' \simeq \mu\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m} = 2\mu s_{ij}'' - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m}. \tag{4.87}$$

Отсюда

$$\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}=\frac{1}{2}\overline{\tau_{ij}''\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right)}=\overline{\left(2\mu s_{ij}''-\frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m}\right)s_{ij}''}=$$

$$=2\mu\overline{s_{ij}''s_{ij}''}-\frac{2}{3}\overline{\left(\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m}\right)s_{ii}''}=2\mu\overline{s_{ij}''s_{ij}''}-\frac{2}{3}\mu\overline{\frac{\partial u_m''}{\partial x_m}\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}}=2\mu\overline{s_{ij}''s_{ij}''}-\frac{2}{3}\mu\overline{d''^2}, \tag{4.88}$$

где $d''=\dfrac{\partial u_j''}{\partial x_j}$ — дивергенция пульсаций скорости

Квадрат пульсаций скорости деформации можно представить так:

$$s_{ij}''s_{ij}''=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}+2\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right). \tag{4.89}$$

Можно показать, что

$$\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i''u_j''}\right)\right)-2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i''\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}}\right)+\overline{\left(\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}\right)^2}. \tag{4.90}$$

Доказательство аналогично доказательству формулы (4.55) для несжимаемой жидкости.

Для однородной турбулентности первые два члена в уравнении (4.90) равны нулю, т.е. справедливо:

$$\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}}=\overline{\left(\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}\right)^2}=\overline{d''^2}. \tag{4.91}$$

В работе [10] показано, что и для неоднородной турбулентности при больших значениях чисел Рейнольдса ассимптотически справедливо это выражение.

Таким образом, получаем

$$\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}=\mu\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}+\overline{\mu d''^2}-\frac{2}{3}\overline{\mu d''^2}=\mu\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}+\frac{4}{3}\overline{\mu d''^2}. \tag{4.92}$$

В формуле (4.92) первая часть диссипации практически совпадает с выражением для случая несжимаемой жидкости. Обозначим ее, как и прежде,

$$\overline{\rho}\varepsilon = \overline{\mu}\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}. \qquad (4.93)$$

Вторая часть зависит от пульсаций дивергенции скорости и называется сжимаемой диссипацией:

$$\overline{\rho}\varepsilon_C = \frac{4}{3}\overline{\mu}\overline{d''^2}. \qquad (4.94)$$

Саркар и др. [10], а также Земан [16] показали, что скорость диссипации, заданная формулой (4.93), практически не зависит от влияния сжимаемости и для нее можно использовать такое же уравнение переноса, как для случая несжимаемой жидкости.

Таким образом, полный источник в уравнении турбулентной кинетической энергии в рассматриваемом случае имеет вид

$$S_K = \mathrm{P}_K - \overline{\rho}(\varepsilon + \varepsilon_C) + \mathrm{K} + \Pi. \qquad (4.95)$$

Моделирование членов, включающих пульсации дивергенции скорости. Наиболее часто используется модель Саркара и др. [10]:

$$\varepsilon_C \sim \mathrm{M}_T{}^2\varepsilon, \qquad (4.96)$$

где $\mathrm{M}_T = \dfrac{\sqrt{2K}}{a}$ — турбулентное число Маха; a — локальная скорость звука.

В эту же формулу включена и добавка $\mathrm{K} = \overline{p'd''}$, т.е. полагается, что

$$\overline{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \alpha_1 \mathrm{M}_T{}^2\overline{\rho}\varepsilon, \qquad (4.97)$$

где $\alpha_1 = 1$ — числовая константа.

В другой работе Саркара и др. [17] предлагается формула

$$\overline{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \alpha_2 \mathrm{P}_K \mathrm{M}_T + (\alpha_1 - \alpha_3)\overline{\rho}\varepsilon \mathrm{M}_T{}^2, \qquad (4.98)$$

где константы равны: $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.15$, $\alpha_3 = 0.2$.

В работе [16] оба параметра, содержащие пульсации дивергенции, выражаются одной формулой:

$$\overline{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = c_D F(\mathrm{M}_T)\overline{\rho}\varepsilon, \tag{4.99}$$

где $c_D = 0.75$, $F(\mathrm{M}_T) = \left\{1 - \exp\left[-\frac{(\gamma+1)}{2}\left(\frac{\mathrm{M}_T - \mathrm{M}_{T0}}{\sigma_0}\right)^2\right]\right\} H(\mathrm{M}_T - \mathrm{M}_{T0})$,

$\mathrm{M}_{T0} = 0.1\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$, $\sigma_0 = 0.6$, $H(x)$ – функция Хевисайда.

В работе [18] предполагается, что дополнительные члены, которые содержат пульсации дивергенции скорости, имеют акустическое происхождение.

Плотность потока энергии, связанного с распространяющимися звуковыми волнами, в волновой зоне равна [19]:

$$J_E = \frac{a^3\overline{\rho'^2}}{\overline{\rho}} = \frac{\overline{p'^2}}{\overline{\rho}a} \quad \left[\frac{\mathrm{Вт}}{\mathrm{м}^2}\right], \tag{4.100}$$

так как $\frac{p'}{a^2} = \rho'$, $\frac{\overline{p'^2}}{a^4} = \overline{\rho'^2}$.

Тогда полная акустическая энергия, излучаемая за единицу времени в единице объема турбулентной среды, может быть оценена как

$$\overline{\rho}\varepsilon_A = \frac{1}{V}\iint_S J_E dS \cong \frac{\overline{p'^2}}{\overline{\rho}aL}, \tag{4.101}$$

где L – масштаб турбулентности.

Для пульсации давления используется простейшее предположение:

$$(p')^2 \sim (\overline{\rho}K)^2. \tag{4.102}$$

Масштаб турбулентности может быть выражен через кинетическую энергию турбулентности и скорость диссипации:

$$L \sim \frac{K^{3/2}}{\varepsilon}. \tag{4.103}$$

При подстановке оценочных формул (4.102) и (4.102) в (4.101) получаем:

$$\overline{\rho}\varepsilon_A \sim \overline{\rho}\frac{K^{1/2}}{a}\varepsilon. \tag{4.104}$$

Таким образом, получается, что

$$\bar{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = c_A \bar{\rho} \mathrm{M}_T \varepsilon, \tag{4.105}$$

где $C_A = 0.29$ – константа.

В работе [20] предложена формула

$$\bar{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \alpha_1 \tilde{\mathrm{M}}_T{}^2 \mathrm{P}_K + \alpha_2 \tilde{\mathrm{M}}_T{}^2 \bar{\rho}\varepsilon, \tag{4.106}$$

где $\tilde{\mathrm{M}}_T = \max(\mathrm{M}_T - \lambda, 0)$, $\alpha_1 = 2.5$, $\alpha_2 = 2.0$, $\lambda = 0.2$.

Уилкокс [21] предлагает свою поправку на сжимаемость:

$$\bar{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \xi^* \left(\mathrm{M}_T{}^2 - \mathrm{M}_{T0}{}^2\right) H(\mathrm{M}_T - \mathrm{M}_{T0}) \bar{\rho}\varepsilon; \quad \xi^* = 1.5; \quad \mathrm{M}_{T0} = 0.25. \tag{4.107}$$

Формулы (4.97), (4.99), (4.105) и (4.107) имеют общую структуру:

$$\bar{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \varphi(\mathrm{M}_T) \bar{\rho}\varepsilon. \tag{4.108}$$

В табл. 4.1. собраны функции $\varphi(\mathrm{M}_T)$ для различных моделей.

Таблица 4.1

Источник	$\varphi(\mathrm{M}_T)$	Числовые константы
[10]	$\alpha_1 \mathrm{M}_T{}^2$	$\alpha_1 = 1$
[17]	$\alpha_2 \frac{\mathrm{P}_K}{\bar{\rho}\varepsilon} \mathrm{M}_T + (\alpha_1 - \alpha_3) \mathrm{M}_T{}^2$	$\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.15$, $\alpha_3 = 0.2$
[16]	$c_D \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{(\gamma+1)}{2} \left(\frac{\mathrm{M}_T - \mathrm{M}_{T0}}{\sigma_0} \right)^2 \right] \right\} \times H(\mathrm{M}_T - \mathrm{M}_{T0})$	$c_D = 0.75$, $\mathrm{M}_{T0} = 0.1\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$, $\sigma_0 = 0.6$
[18]	$c_A \mathrm{M}_T$	$C_A = 0.29$
[20]	$\alpha_1 \tilde{\mathrm{M}}_T{}^2 \frac{\mathrm{P}_K}{\bar{\rho}\varepsilon} + \alpha_2 \tilde{\mathrm{M}}_T{}^2$	$\tilde{\mathrm{M}}_T = \max(\mathrm{M}_T - \lambda, 0)$, $\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 2.0, \lambda = 0.2$
[21]	$\xi^* \left(\mathrm{M}_T{}^2 - \mathrm{M}_{T0}{}^2\right) H(\mathrm{M}_T - \mathrm{M}_{T0})$	$\xi^* = 1.5$, $\mathrm{M}_{T0} = 0.25$

В формуле турбулентной вязкости (4.45) $\mu_T = C_1 \bar{\rho} \widetilde{V_n''^2} \tau$ при определении характерного времени τ можно использовать в качестве скорости диссипации как ε, определяемую формулой (4.93), так и полную диссипацию, учитывающую и сжимаемую часть

$$\varepsilon + \varepsilon_C - \frac{K}{\bar{\rho}} = [1 + \varphi(M_T)]\varepsilon. \qquad (4.109)$$

Моделирование члена, содержащего градиент давления. Как уже говорилось, член $\Pi = -\overline{u_j''} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}$ характеризует работу сил давления. Вопрос стоит в моделировании корреляции $\overline{\rho' u_j''}$.

Самый простейший вариант, градиентное представление, предложен в работе [22]:

$$\overline{\rho' u_j''} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\mu_T}{\sigma_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j}. \qquad (4.110)$$

Таким образом,

$$\Pi = -\frac{1}{\bar{\rho}^2} \frac{\mu_T}{\sigma_\rho} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}. \qquad (4.111)$$

Следует отметить, что многие исследователи этим членом пренебрегают.

4.12. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. *K*-ε МОДЕЛЬ, *K*-ω МОДЕЛЬ УИЛКОКСА, МОДЕЛЬ SST МЕНТЕРА

В этом разделе рассматриваются те же двухпараметрические модели турбулентности, что и в разделе 3.3, только для сжимаемой жидкости.

Для моделирования тензора турбулентных напряжений трения здесь используется формула (4.42):

$$-\bar{\rho} \widetilde{u_j'' u_i''} = \mu_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu_T \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} K. \qquad (4.112)$$

Как и в случае несжимаемой жидкости, предполагается, что среднеквадратичная пульсация $\widetilde{V_n''^2}$ пропорциональна всей турбулентной кинетической энергии K. Тогда из формулы (4.45) следует, что

$$\mu_T = C\bar{\rho}K\tau. \tag{4.113}$$

1. K-ε модель турбулентности. Как указано ранее, при определении τ может быть использовано разное понятие скорости диссипации. Соответственно, коэффициент турбулентной вязкости может определяться по формуле

$$\mu_T = C_\mu \bar{\rho}\frac{K^2}{\varepsilon}, \tag{4.114}$$

либо

$$\mu_T = C_\mu \bar{\rho}\frac{K^2}{\left[1+\varphi(M_T)\right]\varepsilon}. \tag{4.115}$$

Уравнение переноса турбулентной кинетической энергии следует из (4.47):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j K)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_K}+\mu\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right]+P_K-\left[1+\varphi(M_T)\right]\bar{\rho}\varepsilon+\Pi, \tag{4.116}$$

где

$$P_K = -\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \text{ — генерация } K. \tag{4.117}$$

Здесь использовались допущения о градиентном характере турбулентной и молекулярной диффузии турбулентной кинетической энергии:

$$-\overline{\rho u_j'' K}-\overline{p' u_j''}+\overline{\tau_{ij} u_i''}=\frac{\mu_T}{\sigma_K}\frac{\partial K}{\partial x_j}+\mu\frac{\partial K}{\partial x_j}. \tag{4.118}$$

Как уже указывалось, доказано, что уравнение переноса скорости диссипации ε по форме совпадает со случаем несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}+\mu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right]+\frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon 1}P_K-C_{\varepsilon 2}\bar{\rho}\varepsilon\right). \tag{4.119}$$

Следует еще раз подчеркнуть, что это уравнение справедливо только для больших значений чисел Рейнольдса.

Числовые константы берутся такими же, как в случае несжимаемой жидкости:

$$C_\mu = 0.09;\quad \sigma_K = 1;\quad \sigma_\varepsilon = 1.3;\quad C_{\varepsilon 1} = 1.44;\quad C_{\varepsilon 2} = 1.92. \qquad (4.120)$$

Функция $\varphi(M_T)$, учитывающая влияние сжимаемости, вычисляется по одной из моделей, представленных в табл. 4.1.

2. K-ω модель Уилкокса. *В* этой модели коэффициент турбулентной вязкости рассчитываются по формуле

$$\mu_T = \bar{\rho}\frac{K}{\omega}. \qquad (4.121)$$

Уилкокс вносит в свою модель поправки на сжимаемость в работе [21].

Членом, учитывающим градиент давления $\Pi = -\overline{u_j''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}$, пренебрегают.

Дополнительная диссипация в уравнении переноса K обозначается как

$$S_{K,add} = -\varphi(M_T)\bar{\rho}\varepsilon. \qquad (4.122)$$

Сравнивая формулы (4.114) и (4.121), получаем:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu K} = \frac{\varepsilon}{\beta_0^* K}. \qquad (4.123)$$

В модели Уилкокса константа C_μ обозначена как $C_\mu = \beta_0^*$.

Из (4.123) следует, что

$$\bar{\rho}\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\beta_0^* K}\left(\bar{\rho}\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\varepsilon}{K}\bar{\rho}\frac{dK}{dt}\right), \qquad (4.124)$$

т.е. дополнительный член, появляющийся в уравнении переноса ω, равен

$$S_{\omega,add} = \frac{1}{\beta_0^* K}\left(0 - \frac{\varepsilon}{K}S_{K,add}\right) = \frac{\bar{\rho}\varepsilon^2}{\beta_0^* K^2}\varphi(M_T) = \bar{\rho}\omega^2\beta_0^*\varphi(M_T). \qquad (4.125)$$

Дополнительный член (4.122) через ω выражается как

$$S_{K,add} = -\bar{\rho}\omega\beta_0^* K\varphi(M_T). \qquad (4.126)$$

В результате K-ω модель, учитывающая сжимаемость, примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j K)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{K1}}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right]+\mathrm{P}_K-\beta_0^*\left[1+\varphi(\mathrm{M}_T)\right]\bar{\rho}K\omega; \quad (4.127)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j\omega)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 1}}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+\alpha\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K-\left[\beta_0-\beta_0^*\varphi(\mathrm{M}_T)\right]\bar{\rho}\omega^2. \quad (4.128)$$

Числовые константы, входящие в эту модель, равны, как и раньше:

$$\beta_0^*=0.09,\ \ \alpha=5/9,\ \ \beta_0=0.075,\ \ \sigma_{K1}=2,\ \ \sigma_{\omega 1}=2. \quad (4.129)$$

3. Модель SST, учитывающая влияние сжимаемости на турбулентность. Автор не встречал в литературе модель Ментера, в которую внесены поправки на сжимаемость, но ее несложно получить, используя те же принципы, что и для несжимаемой жидкости (см. приложение по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/4_12.pdf).

4.13. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НАПРЯЖЕНИЙ РЕЙНОЛЬДСА

В предыдущих разделах моделирование турбулентности было основано на использования гипотезы Буссинеска, по которой напряжения Рейнольдса пропорциональны коэффициенту турбулентной вязкости и градиенту скорости (точнее, тензору скоростей деформации).

Альтернативным подходом является непосредственное получение дифференциальных уравнений переноса напряжений Рейнольдса.

В 70–80-е гг. 20-го столетия на этот метод возлагались большие надежды. Казалось, что как только вычислительные мощности позволят эффективно решать шесть дополнительных уравнений переноса напряжений Рейнольдса, сразу будут сняты все основные проблемы моделирования турбулентности. Однако практика показала, что использование полного тензора напряжений Рейнольдса в большинстве случаев не дает существенных преимуществ по сравнению с двухпараметрическими моделями.

Кроме того, численное решение получившейся системы уравнений весьма затруднительно из-за плохой сходимости.

Тем не менее, исследование уравнений переноса напряжений Рейнольдса, анализ характера зависимостей членов, входящих в эти уравнения, позволяет, не решая эти уравнения, использовать их как руководство для построения более простых двухпараметрических моделей, для проверки и уточнения гипотез, которые в них использовались.

Уравнения переноса напряжений Рейнольдса выводятся аналогично уравнениию переноса турбулентной кинетической энергии и содержатся в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/4_13.pdf

Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\overline{\rho}\tilde{u}_k\widetilde{u_i''u_i''}\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\underbrace{\left(-\overline{\rho u_k''u_i''u_j''}+\overline{u_i''\tau_{jk}}+\overline{u_j''\tau_{ik}}\right)}_{(\mathrm{I})}-$$

$$-\underbrace{\left(\overline{\rho u_i''u_k''}\frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_k}+\overline{\rho u_j''u_k''}\frac{\partial\widetilde{u_i}}{\partial x_k}\right)}_{(\mathrm{II})}-\underbrace{\left(\overline{u_i''}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_j}+\overline{u_j''}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}\right)}_{(\mathrm{III})}-\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p'u_i''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{p'u_j''}\right)\right)}_{(\mathrm{IV})}+$$

$$+\underbrace{\left(\overline{p'\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}+\overline{p'\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}}\right)}_{(\mathrm{V})}-\underbrace{\left(\overline{\tau_{jk}'\frac{\partial u_i''}{\partial x_k}}+\overline{\tau_{ik}'\frac{\partial u_j''}{\partial x_k}}\right)}_{(\mathrm{VI})}-\underbrace{\left(\overline{\tau_{ik}}\frac{\partial\overline{u_j''}}{\partial x_k}+\overline{\tau_{jk}}\frac{\partial\overline{u_i''}}{\partial x_k}\right)}_{(\mathrm{VII})}. \qquad (4.130)$$

Физический смысл членов справа: (I) – турбулентная и молекулярная диффузия; (II) – генерация напряжений Рейнольдса; (III) – работа сил давления, – этот член возникает только в сжимаемых течениях, вероятно, им можно пренебречь; (IV) – этот член обычно включают в диффузию; (V) – корреляция пульсаций давления со скоростями деформаций; (VI) – вязкая диссипация. Членом (VII), как и в уравнении переноса K, можно пренебречь.

Таким образом, источник в уравнении переноса напряжений Рейнольдса выглядит как

$$S_{ij}=\mathrm{P}_{ij}-\overline{\rho}\varepsilon_{ij}+\Pi_{ij}, \qquad (4.131)$$

где

$$P_{ij} = -\left(\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial x_k} + \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_k}\right), \quad \overline{\rho}\varepsilon_{ij} = \left(\overline{\tau_{jk}' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} + \overline{\tau_{ik}' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}}\right),$$

$$\Pi_{ij} = \left(\overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}}\right). \qquad (4.132)$$

Член P_{ij}, учитывающий генерацию, не требует дополнительных соотношений, так как в него не входят никакие новые параметры. А вот для остальных членов требуется ввести некоторые гипотезы.

1. Диссипативный член $\overline{\rho}\varepsilon_{ij}$. При больших числах Рейнольдса мелкомасштабные диссипативные турбулентные движения можно считать изотропными (локальная изотропность), так что этот член можно записать следующим образом [11]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}. \qquad (4.133)$$

2. Корреляция пульсаций давления со скоростями деформаций K_{ij}. Для несжимаемой жидкости эта величина моделируется с использованием уравнения Пуассона.

Для сжимаемой жидкости в некоторых случаях удобно ввести бездивергентный тензор

$$K_{ij} = \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{p' \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} = K_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{p'd''}. \qquad (4.134)$$

Напомним, что корреляция $K = \overline{p' \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} = \overline{p'd''}$ входит в уравнение переноса турбулентной кинетической энергии (4.47).

Как указано в работе [11], в величину Π_{ij} вносят вклад отдельные процессы: взаимодействие только пульсаций скорости – определяется $\Pi_{ij}^{(1)}$, взаимодействие пульсаций скорости и средних деформаций – $\Pi_{ij}^{(2)}$:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(1)} + \Pi_{ij}^{(2)}. \qquad (4.135)$$

Первая часть имеет смысл *тенденции к изотропности* и для несжимаемой жидкости моделируется через диссипацию [4]:

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -C_1\bar{\rho}\varepsilon\left(\frac{\widetilde{u_i''u_j''}}{K} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\right), \qquad (4.136)$$

где C_1 – числовая константа.

Вторая часть (так называемая «быстрая часть») для несжимаемой жидкости моделируется следующим образом [11]:

$$\Pi_{ij}^{(2)} = -C_2\left(\mathrm{P}_{ij} - \frac{2}{3}\mathrm{P}_K\delta_{ij}\right), \qquad (4.137)$$

где C_2 – числовая константа. Хотя возможны и гораздо более сложные формулы для быстрой части. Вопросу определения этой величины для сжимаемых течений будет посвящен следующий параграф.

4.14. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ СЖИМАЕМЫХ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ТЕЧЕНИЙ, ОСНОВАННАЯ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ КОРРЕЛЯЦИИ «ДАВЛЕНИЕ – СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ»

Модели турбулентности, разработанные для несжимаемой жидкости, плохо описывают сверхзвуковые сжимаемые течения. Известно, что сжимаемость оказывает стабилизирующее воздействие на турбулентность, уменьшая с ростом числа Маха интенсивность турбулентного смешения.

В современных задачах авиационной и ракетно-космической техники этот эффект играет важнейшую роль. Например, в сверхзвуковых прямоточных двигателях из-за влияния сжимаемости замедляется смешение горючего с окислителем, что влияет на процесс горения. Сжимаемость изменяет характер перехода ламинарного режима течения в турбулентный на поверхности спускаемого аппарата при входе в атмосферу.

Как уже указывалось в предыдущих параграфах, в работах Саркара [10, 17], Земана [16], автора настоящей книги [18, 23, 24] и других исследователей предполагается, что эффект замедления турбулентного смешения с ростом скорости связан с появлением в уравнении турбулентной кинетической энергии дополнительной

сжимаемой диссипации, которая зависит от турбулентного числа Маха и происходит на мелкомасштабном уровне.

Однако последние исследования (например, Гиримаджи [25]) показали, что основное воздействие сжимаемости на турбулентность осуществляется уже на уровне крупных масштабов и связано с тем, что пульсации давления воздействуют на турбулентность совершенно иначе, чем в несжимаемой жидкости.

В данной работе предложена модель турбулентности, основанная на моделировании корреляции «давление – скорости деформаций» в зависимости от скорости потока и на гипотезе о том, что основную роль в механизме турбулентного переноса играют пульсации скорости, направленные по нормали к линиям тока.

Считаем, что для «медленной» части $\Pi_{ij}^{(1)}$, которая имеет физический смысл тенденции к изотропности и связана с мелкомасштабной турбулентностью, справедлива та же формула, что и для несжимаемой жидкости (формула (4.136)):

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -C_1 \bar{\rho} \varepsilon \left(\frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{K} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \right), \qquad (4.138)$$

где $C_1 = 1.8$ – числовая константа [11].

«Быстрая» часть $\Pi_{ij}^{(2)}$ связана с крупномасштабной турбулентностью. Поэтому в данной работе сделано предположение, что именно через нее осуществляется влияние пульсаций давления на развитие турбулентности.

Результаты прямого численного моделирования (DNS), полученные Ш.С. Гиримаджи [25], показывают, что для $\Pi_{ij}^{(2)}$ можно использовать формулу

$$\Pi_{ij}^{(2)} = C_{\Pi 1} \Pi_{ij}^{(P)} - C_{\Pi 2} P_{ij} \qquad (4.139)$$

и что характер влияния пульсаций давления в зависимости от скорости потока можно разбить на три области:

1. При малых скоростях потока пульсации давления ведут себя так же, как и в несжимаемой жидкости, и «быстрая» часть Π_{ij} рассчитывается через уравнение Пуассона (обозначена как $\Pi_{ij}^{(P)}$). В этой области $C_{\Pi 1} = 1$, $C_{\Pi 2} = 0$.

2. При дальнейшем росте скорости величина $\Pi_{ij}^{(2)}$ становится меньше, чем рассчитываемая через уравнение Пуассона, кроме того, на нее оказывает подавляющее воздействие тензор скоростей деформаций через генерацию. Именно этот эффект и приводит к стабилизирующему воздействию на турбулентность. В этой области $C_{\Pi 1} \to 0$, $C_{\Pi 2} \to 1$.

3. Наконец, при очень больших скоростях «быстрая» часть становится пренебрежимо малой по сравнению с генерацией. Пантано и Саркар [26] показали, что это связано с тем, что при больших значениях числа Маха скорость распространения воздействия пульсаций давления (скорость звука) слишком мала, чтобы влиять на турбулентность. В этой области $C_{\Pi 1} = 0$, $C_{\Pi 2} = 0$.

В качестве основного критерия в данной работе используется турбулентное число Маха $M_T = \sqrt{2K}/a$, а для функциональных зависимостей $C_{\Pi 1}, C_{\Pi 2}$ предлагается следующая аппроксимация кубическими параболами:

$$C_{\Pi 1}(M_T) = \begin{cases} 1, & M_T \le \alpha_1; \\ 1 - 3x^2 + 2x^3, x = \dfrac{M_T - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1}, & \alpha_1 < M_T < \beta_1; \\ 0, & M_T \ge \beta_1; \end{cases}$$

$$C_{\Pi 2}(M_T) = \begin{cases} 0, & M_T \le \alpha_2; \\ C_{\Pi 2,\max}\left(3x^2 + 2x^3\right), x = \dfrac{M_T - \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2}, & \alpha_2 < M_T \le \beta_2; \\ C_{\Pi 2,\max}\left(1 - 3x^2 + 2x^3\right), x = \dfrac{M_T - \beta_2}{\gamma_2 - \beta_2}, & \beta_2 < M_T < \gamma_2; \\ 0, & M_T \ge \gamma_2, \end{cases} \qquad (4.140)$$

где $\alpha_1 = \alpha_1 = 0.1$; $\beta_1 = 0.27$; $\beta_2 = 0.315$; $\gamma_2 = 10$; $C_{\Pi 2,\max} = 0.65$.

Для моделирования $\Pi_{ij}^{(P)}$ используется формула (4.137):

$$\Pi_{ij}^{(P)} = -C_2\left(P_{ij} - \frac{2}{3}P\delta_{ij}\right), \qquad (4.141)$$

где $C_2 = 0.6$ — числовая константа [11].

Подставляя полученные соотношения в формулу (4.131), получаем выражение для источника в уравнении переноса напряжений Рейнольдса:

$$S_{ij} = \mathrm{P}_{ij} - \bar{\rho}\varepsilon_{ij} + \Pi_{ij} = \mathrm{P}_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\rho}\varepsilon\delta_{ij} + \Pi_{ij} =$$

$$= \mathrm{P}_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\rho}\varepsilon\delta_{ij} - C_1\bar{\rho}\varepsilon\left(\frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{K} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\right) + C_{\Pi 1}\Pi_{ij}^{(P)} - C_{\Pi 2}P_{ij} =$$

$$= \left(1 - C_{\Pi 1}C_2 - C_{\Pi 2}\right)P_{ij} + \frac{2}{3}C_2 C_{\Pi 1}\mathrm{P}\delta_{ij} - \left[C_1\frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{K} + \left(1 - C_1\right)\frac{2}{3}\delta_{ij}\right]\bar{\rho}\varepsilon. \quad (4.142)$$

Уравнение переноса турбулентной кинетической энергии K получается сворачиванием уравнения (4.130) по индексам:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho}\tilde{u}_k K) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial x_k}\right] + \mathrm{P}\left(1 - C_{\Pi 2}\right) - \bar{\rho}\varepsilon, \quad (4.143)$$

где $\mathrm{P} = \frac{1}{2}P_{ii} = \overline{\rho u_i'' u_k''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}$ – генерация турбулентной кинетической энергии.

Делаем предположение, что уравнение переноса скорости диссипации ε имеет стандартную форму, за исключением того, что в ней также учитывается подавляющее воздействие сжимаемости на генерацию:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho}\tilde{u}_k\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right] + \frac{\varepsilon}{K}\left[C_{\varepsilon 1}\mathrm{P}\left(1 - C_{\Pi 2}\right) - C_{\varepsilon 2}\bar{\rho}\varepsilon\right]. \quad (4.144)$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений, позволяющая определять напряжения Рейнольдса в высокоскоростных потоках, решая соответствующие уравнения в частных производных.

В эту систему входит 6 уравнений для компонент тензора напряжений Рейнольдса и уравнение для скорости диссипации (4.144). Решение этой системы представляет довольную большую математическую сложность, однако ее можно существенно упростить. Практика показывает, что очень близкие результаты получаются, если

вместо решения системы дифференциальных уравнений в частных производных для напряжений использовать так называемые *алгебраические модели для напряжений.*

Для построения такой модели делаем допущение, что конвекция и диффузия в уравнениях переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса $\widetilde{u_i''u_j''}$ находятся в балансе. В этом случае из уравнения (4.130) получаются следующие формулы для недиагональных компонент тензора:

$$i \neq j: \quad \frac{\widetilde{u_i''u_j''}}{K} = \frac{(1 - C_{\Pi 1}C_2 - C_{\Pi 2})}{C_1} \frac{P_{ij}}{\overline{\rho}\varepsilon}. \tag{4.145}$$

Кроме того, используем тот факт, что, как было показано в начале главы, при турбулентном смешении потоков основную роль играют пульсации скорости V_n'', направленные по нормали к линиям тока.

Рассмотрим сначала двумерное течение – тонкий сдвиговой слой, в котором в качестве координаты с индексом «1» используется направление вдоль основного движения потока, а индексом «2» обозначаем координату, направленную перпендикулярно основному движению. Очевидно, что в этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\widetilde{u_2} \ll \widetilde{u_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \ll \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad f = \widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \quad \widetilde{u_3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0. \tag{4.146}$$

Тогда из (4.132) следует:

$$P_{12} \approx -\overline{\rho u_2'' u_2''} \frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2}, \quad P_{22} \approx 0, \quad P_{11} \approx -2\overline{\rho u_1'' u_2''} \frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2}, \quad \mathrm{P} \approx -\overline{\rho u_1'' u_2''} \frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2}. \tag{4.147}$$

Для единственного недиагонального элемента по формуле (4.145) получаем:

$$\widetilde{u_1'' u_2''} = -\frac{(1 - C_{\Pi 1}C_2 - C_{\Pi 2})}{C_1} \frac{K^2}{\varepsilon} \frac{\widetilde{u_2'' u_2''}}{K} \frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2}. \tag{4.148}$$

Кроме того,

$$\mathrm{P} \approx -\overline{\rho} \widetilde{u_1'' u_2''} \frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2} = \overline{\rho} \frac{(1 - C_{\Pi 1}C_2 - C_{\Pi 2})}{C_1} \frac{K^2}{\varepsilon} \frac{\widetilde{u_2'' u_2''}}{K} \left(\frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2} \right)^2. \tag{4.149}$$

Формула (4.142) для источника S_{22} с учетом (4.147) упрощается до следующего вида:

$$S_{22} = \frac{2}{3} C_2 C_{\Pi 1} \mathrm{P} - \left[C_1 \frac{\widetilde{u_2'' u_2''}}{K} + \frac{2}{3}(1 - C_1) \right] \bar{\rho}\varepsilon. \qquad (4.150)$$

Перейдем к общему случаю и обозначим индексом «1» координату, направленную вдоль линии тока, а индексом «2» – координату, направленную по нормали к линии тока. Соответствующие скорости обозначим, как V_t и V_n. Очевидно, что в этом случае справедливы соотношения (4.146)–(4.150).

Из (4.148), (4.148) получаем формулу для касательного напряжения в традиционной форме:

$$\bar{\rho}\widetilde{u_1'' u_2''} = -\mu_T \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2}, \qquad (4.151)$$

где вводится коэффициент турбулентной вязкости

$$\mu_T = \frac{(1 - C_{\Pi 1} C_2 - C_{\Pi 2})}{C_1} \frac{\widetilde{V_n''^2}}{K} \bar{\rho} \frac{K^2}{\varepsilon}. \qquad (4.152)$$

Предполагается, что в общем случае коэффициент турбулентной вязкости, полученный по формуле (4.152), характеризует все напряжения турбулентного трения, т.е.

$$-\bar{\rho}\widetilde{u_i'' u_j''} = \mu_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu_T \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} K. \qquad (4.153)$$

Таким образом, получена замкнутая система для определения компонент тензора напряжений Рейнольдса, состоящая из трех дифференциальных уравнений (трехпараметрическая модель турбулентности). Эта система включает в себя уравнения переноса K и ε (4.143), (4.144), а также уравнение переноса $\widetilde{V_n''^2}$, которое получается из (4.130) с учетом (4.150):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{V_n''^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_k \widetilde{V_n''^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \widetilde{V_n''^2}}{\partial x_k} \right] + \frac{2}{3} C_2 C_{\Pi 1} \mathrm{P} -$$

$$- \left[C_1 \frac{\widetilde{V_n''^2}}{K} + \frac{2}{3}(1 - C_1) \right] \bar{\rho}\varepsilon. \qquad (4.154)$$

Кроме дифференциальных уравнений в модель входят формулы (4.152), (4.153), (4.140) и константы

$$C_\mu = 0.09,\quad \sigma_K = 1,\quad \sigma_\varepsilon = 1{,}3,\quad C_{\varepsilon 1} = 1{,}44,\quad C_{\varepsilon 2} = 1{,}92,\quad C_1 = 1{,}8,\quad C_2 = 0{,}6.$$

4.15. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ МОДЕЛИ

Для проверки модели проведено сравнение результатов расчета с использованием этой модели с экспериментальными данными. Для расчета использовалась программа UNIVERSE-CFD, разработанная в МАИ [24].

Использовались экспериментальные данные Гобела и Даттона [27] и данные из работы [28]. В этих экспериментах исследовалось плоское смешение двух параллельных потоков газа, имеющих различные скорости и плотности (обозначены индексами 1 и 2). В табл. 4.2 представлены основные параметры этих потоков для семи режимов.

На рис. 4.3–4.5 представлены безразмерные поперечные профили напряжений трения $\widetilde{u_1'' u_2''} / (\Delta U)^2$ (рис. 4.3), поперечных $\sigma_v / \Delta U$ (рис. 4.4) и продольных $\sigma_u / \Delta U$ (рис. 4.5) пульсаций скорости

Таблица 4.2

Параметр	Режим						
	1	1d	2	3	3г	4	5
$r = U_2/U_1$	0,78	0,79	0,57	0,18	0,25	0,16	0,16
$s = \rho_2/\rho_1$	0,76	0,76	1,55	0,57	0,58	0,6	1,14
M_1	2,01	2,02	1,91	1,96	2,22	2,35	2,27
M_2	1,38	1,39	1,36	0,27	0,43	0,3	0,38
T_1, K	163	151	334	161	159	171	332
T_2, K	214	198	215	281	275	285	292
U_1, м/с	515	498	700	499	561	616	830
U_2, м/с	404	392	399	92	142	100	131
P, Па	46000	55000	49000	53000	53000	36000	32000

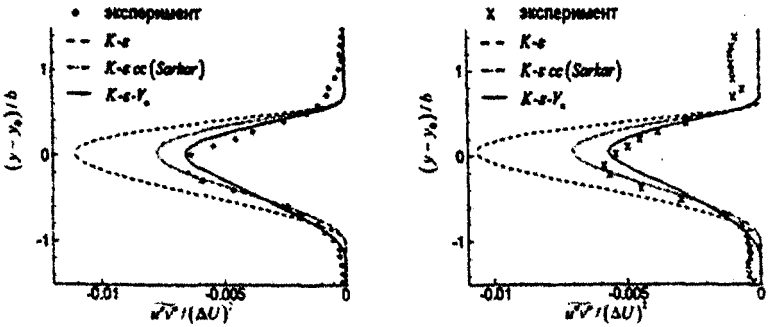

Рис. 4.3. Поперечные безразмерные профили напряжения трения

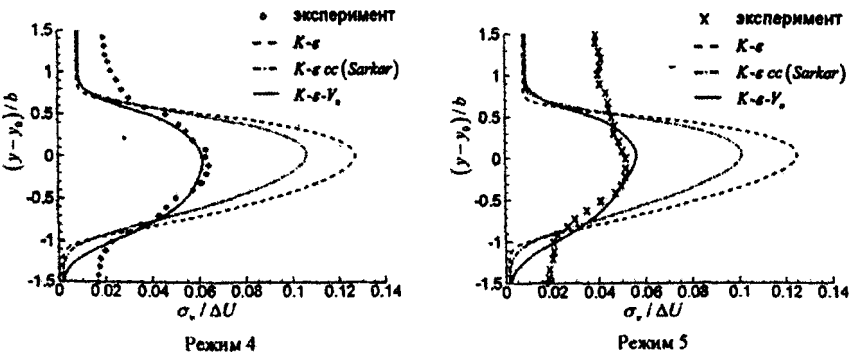

Рис. 4.4. Поперечные безразмерные профили поперечных пульсаций скорости

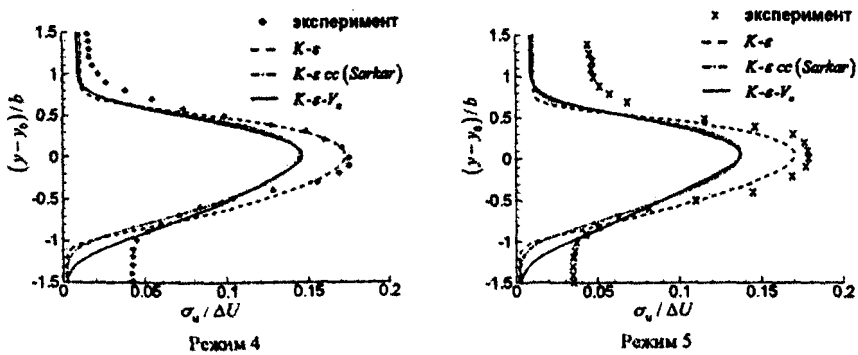

Рис. 4.5. Поперечные безразмерные профили продольных пульсаций скорости

в слоях смешения для режимов 4 и 5. Здесь: $\Delta U = U_1 - U_2$; b – толщина слоя смешения; y_0 – поперечная координата, соответствующая средней скорости $0{,}5(U_1 + U_2)$; $\sigma_u = \sqrt{\overline{u_1'' u_1''}}$, $\sigma_v = \sqrt{\overline{u_2'' u_2''}}$.

Сравнивались расчеты с использованием трех моделей турбулентности:

1) стандартной K-ε модели;

2) K-ε *cc* модели с поправками на сжимаемость Саркара и др. [10];

3) K-ε-V_n модели, представленной в данной работе (§ 4.14).

Наилучшее совпадение получается при использовании предложенной в данной работе модели.

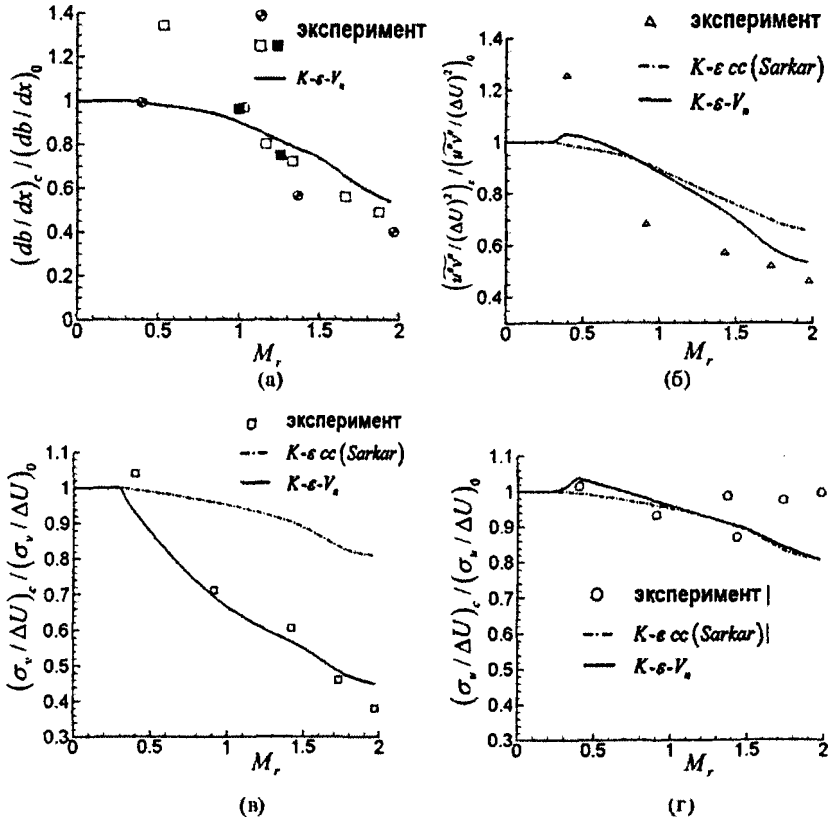

Рис. 4.6. Нормализованные параметры турбулентного смешения:

(а) – скорость расширения слоя смешения, (б) – сдвиговое напряжение, (в) – пульсации скорости, направленные по нормали к линиям тока, (г) – пульсации скорости, направленные вдоль линий тока

На рис. 4.6 показано влияние относительной скорости потоков $M_r = (U_1 - U_2)/\bar{a}$ на основные параметры турбулентного смешения. Рассчитанные параметры нормированы на свои аналоги, полученные без учета влияния сжимаемости в модели в турбулентности при таких же значениях спутности $r = U_2/U_1$ и отношении плотностей $s = \rho_2/\rho_1$.

Анализ полученных результатов показывает следующее.

1. С ростом M_r наблюдается замедление смешения (уменьшается db/dx); это явление наблюдается как в эксперименте, так и в расчетах с использованием предложенной модели и модели Саркара [10].

2. Увеличение относительной скорости M_r приводит к уменьшению сдвигового напряжения, к существенному уменьшению поперечных пульсаций скорости и очень слабому изменению продольных пульсаций. Это означает, что сжимаемость, в первую очередь, воздействует на пульсации скорости, направленные по нормали к линиям тока, а через эту величину $\widetilde{V_n''^2}$ в соответствии с формулой (4.148) – на сдвиговое напряжение; воздействие на пульсации скорости вдоль линий тока невелико. Предложенная модель турбулентности хорошо отражает эти факты, а модель Саркара и др. [10] – нет.

4.16. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПОТОКИ СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В предыдущих разделах мы, в основном, рассматривали вопросы, связанные с моделированием динамических характеристик турбулентности: напряжений Рейнольдса, турбулентной вязкости и т.д.

Однако в основную систему уравнений входят и другие параметры, связанные с турбулентным переносом. В частности, в уравнении энергии (4.34) присутствует член $\widetilde{\rho u_j'' h''}$, имеющий физический смысл турбулентного потока энтальпии.

На практике мы сталкиваемся и с другими подобными параметрами, например, с турбулентным потоком массы того или иного компонента газовой смеси.

И энтальпия, и внутренняя энергия, и концентрация газового компонента являются скалярными величинами. Поэтому их турбулентные потоки называются *потоками скалярной величины*. Для общности обозначим эту величину через f.

Чаще всего для этих потоков используются формулы, основанные на градиентной гипотезе:

$$\overline{\rho u_j'' f''} = -\frac{\mu_T}{\sigma_f}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}, \qquad (4.155)$$

где σ_f – некий числовой коэффициент.

Для потока энтальпии это так называемое *турбулентное число Прандтля*. В практических расчетах это число полагают обычно константой, равной 0,7 для свободных течений и 0,9 для пристеночной области.

Тем не менее, многочисленные экспериментальные данные показывают, что на самом деле турбулентное число Прандтля, введенное формулой (4.155), может меняться в весьма широком диапазоне: от 0,1 до 2. В данном разделе будут рассмотрены некоторые аспекты, которые позволят более корректно определять турбулентные потоки скалярных величин.

4.17. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОТОКА СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Вывод уравнения для потока скалярной величины содержится в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/4_17.pdf

Оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_i'' f''}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho}\widetilde{u_j}\widetilde{u_i'' f''}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' u_i'' f''} + \delta_{ji}\overline{p' f''}\right) -$$

$$\underbrace{-\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} - \overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{(I)} + \underbrace{\left(\overline{f''\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} - \overline{u_i''\frac{\partial}{\partial x_j}(J_j)}\right)}_{(II)} +$$

$$+ \underbrace{\overline{p'\frac{\partial f''}{\partial x_i}}}_{(III)} + \underbrace{\overline{u_i''\omega}}_{(IV)} - \underbrace{\overline{f''}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}}_{(V)}. \qquad (4.156)$$

В левой части этого уравнения стоит производная по времени и конвективный член, первый член правой части – диффузионный член. Физический смысл и моделирование членов, входящих в источниковую часть уравнения (4.156): (I) – генерация осредненным течением; (II) – вязкая диссипация; согласно книге [11] в случае локальной изотропности этот член равен нулю; (II) – корреляция пульсаций давлений с градиентом скалярной величины; (IV) – корреляция пульсаций скорости и источника ω, – как правило, этой величиной можно пренебречь; (V) – член, включающий градиент давления, – этим членом с достаточной точностью можно пренебречь.

Как и в случае корреляции скоростей деформаций с пульсациями давления, корреляция пульсаций давлений с градиентом скалярной величины разбивается на сумму двух физически разнородных частей: турбулентной части $\Pi_{if,1}$ и средних деформаций $\Pi_{if,2}$.

Первая часть имеет смысл тенденции к изотропности и моделируется как

$$\Pi_{if,1} = -C_{1\varphi}\bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i'' f''}}{\tau}, \qquad (4.157)$$

где τ – характерное время пульсаций. Обычно в качестве этого времени используется отношение K/ε, которое на самом деле характеризует только пульсацию скорости. Более правильно было бы учесть временной масштаб пульсаций скалярной величины – отношение $\widetilde{f''^2}/\varepsilon_f$.

Предлагается использование среднего геометрического между этими двумя временными масштабами

$$\tau_f = \sqrt{\frac{K}{\varepsilon}\frac{\widetilde{f''^2}}{\varepsilon_f}}, \qquad (4.158)$$

где ε_f – диссипация скалярной величины $\widetilde{f''^2}$.

Для части $\Pi_{if,2}$ при малых скоростях потока предполагается, что она пропорциональна генерации за счет средней деформации [11]:

$$\Pi_{if,2} = C_{2\varphi}\rho\overline{f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}. \qquad (4.159)$$

Учитывая результаты, полученные в параграфе 4.14 настоящей главы, резонно предположить по аналогии с формулой (4.139) следующую формулу для $\Pi_{if,2}$ при больших скоростях:

$$\Pi_{if,2} = C_{\Pi 1} C_{2\varphi} \rho \overline{f'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} - C_{\Pi 2} P_{if}, \qquad (4.160)$$

где $P_{if} = -\rho \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} - \rho \overline{f'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}$ – генерация.

Таким образом, член (III) уравнения (4.156) моделируется как

$$\overline{p' \frac{\partial f''}{\partial x_i}} = -C_{1\varphi} \bar{\rho} \frac{\widetilde{u_i'' f''}}{\tau_f} + C_{\Pi 2} \rho \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} + \left(C_{\Pi 2} + C_{\Pi 1} C_{2\varphi} \right) \rho \overline{f'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}. \qquad (4.161)$$

В результате источниковый член в правой части уравнения (4.156) будет таким:

$$S_i = -\left(1 - C_{\Pi 2}\right) \rho \overline{u_i'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} + \left(C_{\Pi 2} + C_{\Pi 1} C_{2\varphi} - 1 \right) \rho \overline{f'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} - C_{1\varphi} \bar{\rho} \frac{\widetilde{u_i'' f''}}{\tau_f}. \qquad (4.162)$$

Для турбулентного потока концентраций компонентов можно также применить алгебраическую модель. Простейшая модель получается, если положить $S_i = 0$:

$$\widetilde{u_i'' f''} = \left[-\left(1 - C_{\Pi 2}\right) \widetilde{u_i'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} + \left(C_{\Pi 2} + C_{\Pi 1} C_{2\varphi} - 1 \right) \widetilde{f'' u_j''} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} \right] \frac{\tau_f}{C_{1\varphi}}. \qquad (4.163)$$

Рассмотрим, как и в предыдущем разделе, случай тонкого сдвигового слоя. Полагаем, что индекс «1» относится к координате, направленной вдоль основного движения жидкости (например, вдоль струи), а индекс «2» – к координате, направленной перпендикулярно к этому направлению. Справедливы следующие соотношения:

$$\widetilde{u}_2 \ll \widetilde{u}_1, \quad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1} \ll \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_1} \ll \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2}.$$

В этом случае поперечный поток скалярной величины равен

$$\widetilde{u_2'' f''} = -\left(1 - C_{\Pi 2}\right) \frac{\widetilde{u_2'' u_2''}}{K} \frac{\tau_f}{C_{1\varphi}} K \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2}. \qquad (4.164)$$

Сравнение этого выражения с формулой (4.155),

$$\overline{\rho u_2'' f''} = -\frac{\mu_T}{\sigma_f}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}, \tag{4.165}$$

позволяет получить следующее соотношение:

$$\bar{\rho}(1-C_{\Pi 2})\frac{\overline{u_2'' u_2''}}{K}\frac{\tau_f}{C_{1\varphi}}K = \frac{\mu_T}{\sigma_f}. \tag{4.166}$$

Если использовать, как и в § 4.14, в качестве u_2'' пульсацию скорости, направленную по нормали n к линии тока V_n'', то

$$\bar{\rho}(1-C_{\Pi 2})\frac{\overline{V_n''^2}}{K}\frac{\tau_f}{C_{1\varphi}}K = \frac{\mu_T}{\sigma_f}. \tag{4.167}$$

В качестве формулы для коэффициента турбулентной вязкости используем (4.152) и с учетом (4.158) получаем формулу для турбулентного числа Прандтля–Шмидта σ_f:

$$\sigma_f = \frac{(1-C_{\Pi 1}C_2 - C_{\Pi 2})C_{1\varphi}}{C_1(1-C_{\Pi 2})}\sqrt{\frac{K}{\varepsilon}\frac{\varepsilon_f}{\overline{f''^2}}}. \tag{4.168}$$

Константу берем из работы [11]: $C_{1\varphi} = 3{,}0$.

При малых скоростях ($C_{\Pi 1} = 1$, $C_{\Pi 2} = 0$) получаем

$$\sigma_f = \frac{(1-C_2)C_{1\varphi}}{C_1}\sqrt{\frac{K}{\varepsilon}\frac{\varepsilon_f}{\overline{f''^2}}}. \tag{4.169}$$

Если положить, что характерные масштабы пульсаций скорости K/ε и скалярной величины $\overline{f''^2}/\varepsilon_f$ равны, то для малых скоростей получаем

$$\sigma_f = \frac{(1-C_2)C_{1\varphi}}{C_1} = \frac{(1-0{,}6)3{,}0}{1{,}8} = 0{,}67. \tag{4.170}$$

Это значение хорошо согласуется с обычно используемым для свободных течений значением $\mathrm{Pr}_T = 0{,}7$.

Однако для более правильного описания турбулентного переноса следует учесть возможность того, что характерные масштабы

пульсаций скорости и скалярной величины могут сильно отличаться. Для этого необходимо решать дополнительные уравнения: для $\widetilde{f''^2}$ и ε_f.

4.18. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАДРАТА ПУЛЬСАЦИЙ СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ (ДИСПЕРСИИ) $\widetilde{f''^2}$

Вывод этого уравнения содержится в приложении по адресу: http://www.k204.ru/mathmodel/4_18.pdf

Оно имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{f''^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\widetilde{f''^2}\right)=$$

$$=\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{\rho u_j'' f''^2}-2\overline{f''J_j}\right)}_{(\mathrm{I})}\underbrace{-2\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}}_{(\mathrm{II})}+\underbrace{2J_j\overline{\frac{\partial f''}{\partial x_j}}}_{(\mathrm{III})}+\underbrace{2\overline{f''\omega}}_{(\mathrm{IV})}. \qquad (4.171)$$

Физический смысл членов, входящих в правую часть этого уравнения: (I) – диффузия пульсаций скалярной величины; (II) – генерация; (III) – диссипация; (IV) – член, учитывающий влияние источника ω.

Диффузионный поток скалярной величины представляется в виде

$$J_j=-\rho D_f\frac{\partial f}{\partial x_j}. \qquad (4.172)$$

Тогда диссипация в уравнении (4.171) представляется как

$$\bar{\rho}\varepsilon_f\equiv-\overline{J_j\frac{\partial f''}{\partial x_j}}=\overline{\rho D_f\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f''}{\partial x_j}}=\overline{\rho D_f\frac{\partial f''}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}}+\overline{\rho D_f\frac{\partial f''}{\partial x_j}\frac{\partial f''}{\partial x_j}}\cong\bar{\rho}\overline{D_f\frac{\partial f''}{\partial x_j}\frac{\partial f''}{\partial x_j}}. \qquad (4.173)$$

Диффузионные члены моделируются как

$$-\overline{\rho u_j'' f''^2}=\frac{\mu_T}{\sigma_{T,f}}\frac{\partial\widetilde{f''^2}}{\partial x_j}, \qquad (4.174)$$

$$-2\overline{f''J_j}=2\overline{f''\rho D_f\frac{\partial f}{\partial x_j}}=2\overline{f''\rho D_f}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}+\overline{\rho D_f\frac{\partial f''^2}{\partial x_j}}\cong\tilde{\rho}D_f\frac{\partial\widetilde{f''^2}}{\partial x_j}=\frac{\mu}{\sigma_f}\frac{\partial\widetilde{f''^2}}{\partial x_j}. \qquad (4.175)$$

Турбулентная диффузия моделируется по градиентному закону (4.155):

$$\overline{\rho f'' u_j''} = -\frac{\mu_T}{\sigma_f}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}. \qquad (4.176)$$

Таким образом, уравнение для дисперсии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{f''^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\widetilde{f''^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_{T,f}}+\frac{\mu}{\sigma_f}\right)\frac{\partial\widetilde{f''^2}}{\partial x_j}\right]+2\mathrm{P}_f-2\bar{\rho}\varepsilon_f+2\overline{f''\omega}. \qquad (4.177)$$

Здесь $\sigma_{f,T}$ – турбулентное число Шмидта–Прандтля; σ_f – число Шмидта–Прандтля;

$\mathrm{P}_f = \dfrac{\mu_T}{\sigma_{f,T}}\left(\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}\right)^2$ – генерация.

4.19. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ ПУЛЬСАЦИЙ СКАЛЯРНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Скорость диссипации пульсаций скалярной величины вместе с величиной $\widetilde{f''^2}$ определяет временной масштаб пульсаций скалярной величины f. Многие исследователи полагают, что отношение временных масштабов пульсаций скоростей и скалярных величин постоянно. Однако эксперименты с течениями даже довольно близких типов показали, что отношение $R=\left(\dfrac{\widetilde{f''^2}}{\varepsilon_f}\right)\Big/\left(\dfrac{K}{\varepsilon}\right)$ может меняться в широких пределах.

По этой причине большинство исследователей выступают за использование уравнения переноса ε_f.

В [28] для высоких значений чисел Re получено уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\varepsilon_f\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\varepsilon_f\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_{\varepsilon f}\bar{\rho}\frac{K}{\varepsilon}\widetilde{u_k''u_j''}\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial x_j}\right)+$$

$$+\left(C_{d1}\frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}+C_{d2}\frac{\varepsilon}{K}\right)\mathrm{P}_f+C_{d3}\frac{\varepsilon_f}{K}\mathrm{P}-\left(C_{d4}\frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}+C_{d5}\frac{\varepsilon}{K}\right)\bar{\rho}\varepsilon_f. \qquad (4.178)$$

Авторы рекомендуют:

$$C_{d1}=2{,}0;\quad C_{d2}=0{,}0;\quad C_{d3}=0{,}72;\quad C_{d4}=2{,}2;\quad C_{d5}=0{,}8. \quad (4.179)$$

Это уравнение мы и возьмем за основу. При этом учитывается подавляющее воздействие сжимаемости на генерацию P и предполагается, что диффузия подчиняется градиентному закону.

В результате получается следующее уравнение для скорости диссипации пульсаций пассивной скалярной величины:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\varepsilon_f\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\varepsilon_f\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu}{\sigma_f}+\frac{\mu_T}{\sigma_{f,T}}\right)\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial x_j}\right]+$$

$$+\left(C_{d1}\frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}+C_{d2}\frac{\varepsilon}{K}\right)\mathrm{P}_f+C_{d3}\frac{\varepsilon_f}{K}\mathrm{P}\left(1-C_{\mathrm{П}2}\right)-\left(C_{d4}\frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}+C_{d5}\frac{\varepsilon}{K}\right)\bar{\rho}\varepsilon_f, \quad (4.180)$$

где константы определяются по (4.179);

$$\mathrm{P}_f=-\bar{\rho}\widetilde{u_j''f''}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}=\frac{\mu_T}{\sigma_{f,T}}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}\right)^2,\quad \mathrm{P}=-\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j};$$

$\sigma_{f,T}$ – турбулентное число Шмидта–Прандтля; σ_f – число Шмидта–Прандтля.

Таким образом, получена замкнутая система уравнений, позволяющих определять турбулентные потоки энергии, концентраций и любых других скалярных величин.

4.20. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ТУРБУЛЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Уравнения для турбулентных параметров ($K,\varepsilon,\widetilde{f''^2},\varepsilon_f$ и т.п.) по своей структуре мало отличаются от основных уравнений Навье–Стокса, и для их решения можно легко использовать численные методы, описанные в главе 3.

Единственное принципиальное отличие – наличие источника $\boldsymbol{S}$ в правой части уравнения (3.1) главы 3:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z}=\boldsymbol{S}. \quad (4.181)$$

Для численной аппроксимации источника используется линеаризованное неявное представление:

$$\boldsymbol{S}^{n+1} = \boldsymbol{S}^{n} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^{n} \left(\boldsymbol{U}^{n+1} - \boldsymbol{U}^{n}\right). \tag{4.182}$$

При этом для приблизительного расчета матрицы Якоби $\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{U}}$ можно использовать следующую диагональную форму:

$$\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} s_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.183}$$

где

$$s_{ii} = -\frac{|S_i|}{\max\left(|U_i|, \chi\right)}; \tag{4.184}$$

$\chi = 10^{-10} \div 10^{-12}$ – малое число, необходимое для ограничения производной.

Кроме того, сходимость численного метода существенно улучшается, если использовать демпфирование генерации: $P_K \le (10 \div 20)\rho\varepsilon$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. – New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. – 218 p.

2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970, Т. 1. – 492 с.

3. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы (введение в теорию). М.: Наука, 1977. – 440 с.

4. *MacCormack R.W.* Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes equations // AIAA Paper No. 85–0032. 1985.

5. *MacCormack R.W. and Pulliam T.* Assessment Of A New Numerical Procedure For Fluid Dynamics // AIAA paper 98–2821 Presented at the 29th AIAA Fluid Dynamics Conference. Albuquerque, New Mexico, June 15–18, 1998.

6. *Steger J.L. and Warming R.F.* Flux vector splitting for the inviscid gasdynamic equations with applications to finite difference methods // Journal of Computational Physics. Vol. 40, 1981. P. 263–293.

7. *Tysinger T. and Caughey D.* Implicit Multigrid Algorithm for the Navier–Stokes Equations // AIAA Paper 91–0242, 1991/ P. 1–16.

8. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. Учебник / Под ред. В.С. Авдуевского, В.К. Кошкина. – М.: Машиностроение, 1992. – 528 с.

9. *Favre A.* Turbulence: space-time statistical properties and behavior in supersonic flows // Physics of Fluids, 1983, A 26 (10): P. 2851–2863.

10. *Sarkar S., Erlebacher G., Hussaini M.Y., Kreiss H.O.* The analysis and modeling of dilatational terms in compressible turbulence // NASA Center: Langley Research Center, 1989, Report Number: ICASE-89-79, NAS 1.26:181959, NASA-CR-181959, 34 p.

11. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Кольмана. – М.: Мир, 1984. – 464 с.

12. *Launder B.E., Spalding D.B.* Lectures in mathematical models of turbulence. – London, New York: Academic Press, 1972. – 176 p.

13. *Wilcox D.C.* Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models // AIAA Journal, 1988. Vol. 26, No. 11, P. 1299–1310.

14. *Menter F.R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal, 1994. Vol. 32, No. 8, P. 269–289.

15. *Menter F.R.* Zonal Two Equation k-ω Turbulence Models for Aerodynamic Flows // AIAA Paper 93-2906, 1993.

16. *Zeman O.* Dilatation dissipation: the concept and application in modeling compressible mixing layer // Phys. Fluids A, 1990, 2, P. 178–188.

17. *Sarkar S., Erlebacher G., Hussaini M.Y.* Compressible Homogeneous Shear: Simulation and Modeling // NASA Contractor Report 189611, ICASE Report No. 92–6, 1992, 28 p.

18. *Глебов Г.А., Молчанов А.М.* Модель турбулентности для расчета высокоскоростных реагирующих струй. Исследование теплообмена в летательных аппаратов: Сборник статей. – М.: МАИ, 1982. С. 6–11.

19. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 2. – М.: Наука, 1965. – 720 с.

20. *Ayyalasomayajula H., Kenzakowski D.C., Papp J.L. and Dash S.M.* Assessment of k-e/EASM Turbulence Model Upgrades for Analyzing High Speed Aeropropulsive Flows // AIAA-2005-1101, 15 p.

21. *Wilcox D.C.* Dilatation dissipation corrections for advanced turbulence models // AIAA J., 1992, 30, 11, P. 2639-2646.

22. *Lehnasch G., Bruel P.* A Robust Methodology for RANS Simulations of Highly Underexpanded Jets // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2008. Vol. 56, issue 12, P. 2179-2205.

23. *Молчанов А.М.* Расчет сверхзвуковых неизобарических струй с поправками на сжимаемость в модели турбулентности // Вестник Московского авиационного института. 2009. Т. 16. №1. С. 38–48.

24. *Быков Л.В., Молчанов А.М.* Математическое моделирование струй реактивных двигателей // Тепловые процессы в технике. 2011. № 3. Т. 3. С. 98–107.

25. *Gomez C.A., Girimaji S.S.* Algebraic Reynolds Stress Model (ARSM) for Compressible Shear Flows. // AIAA Paper 2011–3572. 14 p.

26. *Pantano C., Sarkar S.* A study of compressibility effects in the high speed turbulent shear layer using direct simulation // Journal of Fluid Mechanics. 2002. Vol. 451. P. 329–371.

27. *Goebel S.G., Dutton J.C.* Experimental study of compressible turbulent mixing layers // AIAA Journal. 1991. Vol. 29. No. 4. P. 538–546.

28. *Mattick S., Brinckman K.W., Dash S.M. and Liu. Z.* Improvements in Analyzing High-Speed Fuel/Air Mixing Problems Using Scalar Fluctuation Modeling // AIAA 2008–768, 2008.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

Глава 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ТЕРМОДИНАМИКИ 11

1.1. Основные гипотезы механики сплошной среды 11
1.2. Системы координат и закон движения сплошной среды с точки зрения Лагранжа 12
1.3. Векторы базиса 13
1.4. Вектор скорости 14
1.5. Скалярное и векторное произведения векторов в декартовой системе координат 15
1.6. Тензорная форма записи и соглашение Эйнштейна. .16
1.7. Точка зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды 17
1.8. Скалярные и векторные поля и их характеристики 17
1.9. Контравариантный базис 19
1.10. Оператор набла, градиент скалярной величины, дивергенция вектора, ротор вектора 20
1.11. Элементы тензорного исчисления 21
1.12. Преобразования координат 22
1.13. Определение вектора 24
1.14. Понятие тензора 25
1.15. Контравариантный базис с точки зрения тензорного исчисления 27
1.16. Метрический тензор 28
1.17. Длина вектора 30
1.18. Примеры метрических тензоров 30
1.19. Ковариантные компоненты вектора и тензора 32
1.20. Скалярные инварианты тензора 33
1.21. Ковариантная производная 35

1.22. Свойства ковариантной производной 37
1.23. Свойства символов Кристоффеля 39
1.24. Дивергенция. Градиент. Тензор скоростей деформаций. Теорема Остроградского–Гаусса 39
1.25. Уравнение неразрывности 43
1.26. Уравнение количества движения. 44
1.27. Понятие идеального газа. 45
1.28. Уравнения Эйлера для невязкого газа 47
1.29. Линейная вязкая жидкость. 47
1.30. Уравнение энергии 48
1.31. Основные уравнения динамики вязкой жидкости в декартовой системе координат 51
1.32. Основные уравнения динамики вязкой жидкости в цилиндрической системе координат. 53

Глава 2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ. 55
2.1. Обобщенное дифференциальное уравнение. 55
2.2. Дискретизация исходного уравнения 59
2.3. Использование рядов Тейлора 61
2.4. Метод контрольного объема. 62
2.5. Основные правила, вытекающие из физического смысла метода контрольного объема. 64
2.6. Сходимость, порядок точности 65
2.7. Невязка, аппроксимация. 66
2.8. Устойчивость 68
2.9. Аппроксимация и устойчивость дискретных аналогов уравнений в частных производных 69
2.10. Аппроксимация задачи Коши. 69
2.11. Устойчивость по начальным данным. Спектральный признак Неймана. Примеры исследования 70
2.12. Явная, Кранка–Николсона и полностью неявная схемы 73
2.13. Метод прогонки. 76
2.14. Методы решения задач с несколькими пространственными переменными. Особенности двух- и трехмерных задач 78

2.15. Итерационный метод Гаусса—Зейделя с переменой направлений 80
2.16. Метод приближенной факторизации 82
2.17. Модифицированный метод приближенной факторизации Маккормака 84
2.18. Методы расщепления 86
2.19. Метод установления 87

Глава 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ 90
3.1. Общий вид системы. Особенности численного решения 90
3.2. Векторная форма системы уравнений Навье—Стокса . 92
3.3. Основные требования к численному методу 94
3.4. Искусственная вязкость 95
3.5. Конечно-объемная аппроксимация основного уравнения 97
3.6. Расщепление потоков 101
3.7. Модельное уравнение 101
3.8. Одномерное уравнение динамики жидкости 103
3.9. Матрицы перехода, собственные значения, собственные векторы 107
3.10. Разностный аналог рассматриваемой задачи 110
3.11. Двумерные и трехмерные задачи 111
3.12. Векторно-матричное представление вязких потоков . 113
3.13. Аппроксимация вязких потоков в явной форме . . . 115
3.14. Неявное представление вязких потоков. Предположение о «тонком слое» 116
3.15. Неявное представление вязких потоков. Предположение о «малости дивергенции скорости» . 118
3.16. Разностная форма уравнений Навье—Стокса и способы решения системы 121
3.17. Векторная прогонка 124
3.18. Граничные условия 125
3.19. Характеристики. Инварианты Римана 126
3.20. Типы граничных условий 131
3.21. Фиктивные ячейки 136

3.21.1. Граничные условия для конвективных потоков. . 138
3.21.2. Граничные условия для вязких потоков. 141
Глава 4. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ . 145
4.1. Ламинарные и турбулентные режимы течения. . . . 145
4.2. Осредненное и пульсационное движение. 148
4.3. Двумерный слой смешения несжимаемых жидкостей . 151
4.4. Алгебраические модели турбулентности 155
4.5. Турбулентность в потоках переменной плотности. Осреднение по Фавру 156
4.6. Осреднение основных уравнений 157
4.7. Основные допущения. 159
4.8. Уравнение для турбулентной кинетической энергии . 161
4.9. Несжимаемая жидкость. Уравнение для скорости диссипации. 162
4.10. Двухпараметрические модели турбулентности для несжимаемой жидкости. K-ε модель, K-ω модель Уилкокса, модель SST Ментера 165
4.11. Дополнительные члены в уравнении переноса турбулентной энергии в случае сжимаемой жидкости . . 170
4.12. Двухпараметрические модели турбулентности для сжимаемой жидкости. K-ε модель, K-ω модель Уилкокса, модель SST Ментера 176
4.13. Уравнения переноса напряжений Рейнольдса . . . 179
4.14. Модель турбулентности для сжимаемых высокоскоростных течений, основанная на представлении корреляции «давление – скорости деформаций» . . 182
4.15. Некоторые результаты тестирования модели. . . . 188
4.16. Турбулентные потоки скалярной величины. 191
4.17. Уравнение для потока скалярной величины 192
4.18. Уравнение для квадрата пульсаций скалярной величины (дисперсии) $\widetilde{f''^2}$ 196
4.19. Уравнение для скорости диссипации пульсаций скалярной величины 197
4.20. Численные методы решения уравнений переноса турбулентных характеристик 198
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 200

Научное издание

Молчанов Александр Михайлович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ГАЗОДИНАМИКИ И ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Редактор *Е.Б. Страумал*
Компьютерная верстка *В.В. Демкин*

Сдано в набор 7.08.13. Подписано в печать 2.12.13.
Бумага писчая. Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 13,00.
Тираж 500 экз. Зак. 362/176.

Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993