

*О.С. СЕРГЕЛЬ*

# *ПРИКЛАДНАЯ ГИДРОГАЗО- ДИНАМИКА*

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов авиационных специальностей высших учебных заведений



*МОСКВА «МАШИНОСТРОЕНИЕ» 1981*

ББК 22.253.3  
С32  
УДК 532. 013

**Сергель О. С.**  
С32 Прикладная гидрогазодинамика: Учебник для  
авиационных вузов. — М.: Машиностроение, 1981.—  
374 с., ил.

В пер.: 1 р. 20 к.

С  $\frac{31808-189}{038(01)-81}$  189-81 1703040000

ББК 22.253.3  
532

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге с общих позиций фундаментальных законов физики излагаются основы гидрогазодинамики.

Материал, приводимый в учебнике, соответствует программе курса «Прикладная гидрогазодинамика» для студентов факультетов двигателей летательных аппаратов авиационных вузов и может быть использован студентами и инженерами других энергетических специальностей. Этот материал базируется на предшествующих курсах математики, физики, механики и термодинамики и является фундаментом последующих курсов, таких как теплопередача, лопаточные машины, реактивные двигатели, регулирование и испытание реактивных двигателей.

Автор уделил большое внимание выявлению физического смысла рассматриваемых явлений и уравнений, их описывающих.

Краткость изложения достигнута за счет широкого использования газодинамических функций при выводе формул и решении задач.

Для лучшего усвоения курса в текст включены задачи, которые необходимо решать при работе над курсом. Это поможет не только закрепить, но и расширить получаемые знания.

Предлагаемый учебник возник на основе учебного пособия автора [23] и учета замечаний о его содержании и форме.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам профессорам Виноградову Б. С., Дубинскому М. Г. и доценту Панченко В. И., а также академику Люлька А. М., профессорам Абрамовичу Г. Н., Борисенко А. И., Гахуну Г. Г., Овсянникову Б. В., Степчкову А. А., доценту Сухареву А. Д. и другим товарищам за ценные замечания и помощь на различных этапах работы над книгой.

## ВВЕДЕНИЕ

**Прикладная гидрогазодинамика** — наука, изучающая законы движения жидкостей при их взаимодействии с твердыми телами и между самими жидкостями при скоростях существенно меньших скорости света, т. е. когда справедливы законы классической механики Ньютона и отсутствуют релятивистские эффекты.

*Жидкостями* называются субстанции, обладающие *легкоподвижностью* или *текучестью*, т. е. непрерывно и сколь угодно сильно деформирующиеся под действием сколь угодно малого срезающего напряжения. Легкоподвижностью в равной степени обладают капельные жидкости и газы. Поэтому и те и другие называются одинаково — *жидкость*. Легкоподвижность обеспечивает использование жидкостей в технике в качестве рабочих тел различных тепловых и гидравлических двигателей, агрегатов, систем охлаждения и смазки, плавание кораблей и полеты летательных аппаратов. С другой стороны, легкоподвижность и некоторые другие свойства настолько существенно усложняют процессы движения жидкостей по сравнению с движением твердых тел, что для их изучения необходима специальная наука — *механика жидкости*. Механика жидкости бурно развивается и объединяет много различных направлений, обусловленных конкретными свойствами отдельных классов жидкостей и условиями протекания процессов их движения.

Прикладная гидрогазодинамика, в которой принимается ряд упрощенных моделей жидкостей и их движений, позволяющих получить результаты, удовлетворяющие по точности практику, является лишь ветвью механики жидкости.

Курс состоит из *гидростатики*, в которой изучается равновесие жидкостей и тел в них погруженных, *кинематики*, где исследуется движение жидкостей вне связи с определяющими движение взаимодействиями, и *динамики*, изучающей движение жидкостей при их взаимодействии с твердыми телами и с жидкостями.

Динамика имеет два раздела:

1. **Гидродинамика** — изучает законы движения несжимаемой жидкости. При движении несжимаемой жидкости рассматриваемый объем может деформироваться, но не может изменить величины, т. е. плотность жидкости остается неизменной. Механическое движение несжимаемой жидкости не сопровождается термоди-

намическими процессами сжатия или расширения. В современной технике широко используются гидравлические системы. Для авиационной техники это системы топливные, смазки, управления, охлаждения. Кроме того, в ряде случаев движение газа можно рассматривать как движение несжимаемой жидкости.

2. Газовая динамика — изучает движение газов при существенном изменении их плотности. Основная особенность газодинамического процесса — неразрывная связь одновременно протекающих механического процесса движения газа (главным образом его ускорения или торможения) и термодинамического процесса его расширения или сжатия. Поэтому для анализа и расчета газодинамических процессов используются законы механики и термодинамики и изменение параметров состояния газа может изображаться в  $pv$ ,  $Ts$ ,  $is$  координатах. Последнее помогает глубже усвоить их физическую сущность и упрощает расчеты. Несмотря на общность основных физических законов, которым подчиняется движение любых жидкостей, процессы движения сжимаемой жидкости сложнее процессов движения несжимаемой и отличаются от них не только качественно, но часто и количественно. Например, при течении несжимаемой жидкости по расширяющемуся каналу скорость ее движения всегда уменьшается. При течении газа по расширяющемуся каналу, в зависимости от условий, скорость может и уменьшаться и увеличиваться и не изменяться. Как показывают теория и опыт, плотность существенно изменяется при движении газа с большими скоростями — большими 30...40% от скорости распространения звука в этом газе, а также при подводе к газу или отводе от него тепла и механической работы.

*Следовательно, газовая динамика — это наука о законах движения газа с большими скоростями, а при энергетическом обмене с внешней средой — как при движении с большими, так и с малыми скоростями.*

Значение гидрогазодинамики для инженеров-теплотехников обусловлено тем, что все процессы течения газа в лопаточных машинах, реактивных двигателях и других теплосиловых и испытательных установках суть газодинамические. Газовая динамика учит управлять этими процессами и рассчитывать их. Только после газодинамического расчета, в котором определяются основные размеры двигателя и параметры газового потока, могут быть выполнены расчеты охлаждения и на прочность.

На рис. 0.1 даны схема турбореактивного двигателя с форсажной камерой сгорания (ТРДФ), графики изменения параметров газового потока вдоль его тракта и идеального цикла ТРДФ в координатах  $pv$  и  $is$ . Движение обращено: двигатель остановлен и на него направлен поток со скоростью полета  $W_n$ . При этом изменение параметров воздушного потока по тракту и силовое взаимодействие двигателя и потока не меняются, что устанавливается принципом относительности движения. Обращение движения (поток — двигатель) производится для того, чтобы вместо неустановившегося движения рассматривать установившееся.

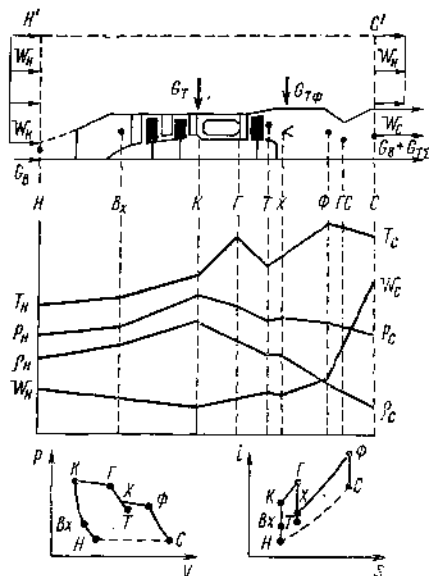


Рис. 0.1. Газодинамические процессы в ТРДФ

**Задача 0.1.** Рассмотрите характер изменения скорости  $W$  и плотности  $\rho$  газового потока на выделенных участках тракта ТРДФ и докажите, что на них происходят газодинамические процессы. Например, процесс на участке  $вх—к$  (вход в компрессор — выход из компрессора) представляет сочетание механического процесса торможения ( $W_k < W_{вх}$ ) и термодинамического процесса адиабатного сжатия газа ( $q_k > q_{вх}$ ) за счет подвода к газу механической работы в компрессоре и изменения площади канала, т. е. является газодинамическим.

### Общая постановка задач в прикладной гидрогазодинамике

- Дано: 1. Область течения жидкости и ее свойства.  
 2. Твердые тела, обтекаемые жидкостью, или канал, по которому она течет, и энергетическое воздействие на жидкость.  
 3. Значение параметров жидкости на границе области в начальный момент времени  $t_0$ .

Определить пространственно-временные поля всех параметров текущей жидкости, т. е. скорости, плотности, давления и температуры:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z, t); & v &= v(x, y, z, t); \\ w &= w(x, y, z, t); \\ \rho &= \rho(x, y, z, t); & p &= p(x, y, z, t); \\ T &= T(x, y, z, t), \end{aligned} \right\} \quad (0.1)$$

где  $u, v, w$  — проекции вектора скорости жидкости  $W$  на оси  $x, y, z$  произвольно выбранной системы координат;  $\rho, p, T$  — плотность, давление и температура жидкости.

Решение поставленной задачи позволяет определить силовое и тепловое взаимодействие между потоком жидкости и твердыми телами, спроектировать и рассчитать работоспособную конструкцию двигателя, агрегата или летательного аппарата.

В зависимости от заданных условий течения и определяемых параметров в гидрогазодинамике различают следующие группы задач.

*Внутренние задачи* — посвящены исследованию течений жидкости в различных каналах (см. рис. 0.1).

*Внешние задачи* — рассматривают внешнее обтекание твердых тел, например, летательного аппарата в полете или его модели в аэродинамической трубе.

*Струйные задачи* — посвящены изучению течения струй жидкостей, вытекающих из отверстий в пространство, не ограниченное твердыми стенками и заполненное жидкостью того же агрегатного состояния. Например, взаимодействие струи выхлопных газов реактивного двигателя с воздухом.

На практике эти задачи очень часто невозможно разграничить. Например, при обтекании решеток профилей компрессоров и турбин, исследование течения в каналах между лопатками относится к внутренней задаче; обтекание отдельной лопатки — к внешней, а взаимодействие межлопаточных потоков за решеткой — к струйной.

Каждая из перечисленных задач может быть *прямой* или *обратной*. Если заданы невозмущенный поток, форма, размеры и положение обтекаемых тел, а требуется определить поля параметров жидкости (0,1), то задача называется *прямой*. Если заданы поля параметров (0.1), а требуется определить параметры невозмущенного потока и характеристики твердых тел, обеспечивающих получение заданных полей, то задача называется *обратной*.

Прикладная гидрогазодинамика имеет простую логически стройную структуру. Анализ всех течений и решение всех задач базируется всего лишь на следующих четырех основных законах физики и шести основных уравнениях, выражающих в математической форме все те же четыре основных закона.

Основной физический закон	Основное уравнение прикладной гидрогазодинамики
1. Закон сохранения массы 2. Закон сохранения импульса (Второй закон Ньютона о движении) 3. Закон сохранения и превращения энергии 4. Второй закон термодинамики	1. Уравнение неразрывности течения 2, 3, 4. Уравнение количества движения в проекциях на оси координат $x, y, z$ 5. Уравнение энергии 6. Уравнение изменения энтропии газа

В общем случае эти шесть уравнений являются независимыми. В частных случаях все они остаются справедливыми, но некоторые могут быть зависимыми. Например, при течении несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) неизвестных остается пять и уравнения количества движения и энергии становятся зависимыми (см. п. 4.6).

В дополнение к перечисленным фундаментальным принципам в анализе используются вспомогательные законы и уравнения, описывающие конкретные свойства изучаемых жидкостей: уравнение состояния совершенного газа, законы Ньютона о трении в жидкостях, Фурье — о теплопроводности, Фика — о диффузии и т. п.

После твердого усвоения этих основных принципов весь остальной материал может быть освоен без особого труда.

## Глава 1

# ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 1.1. СОВЕРШЕННЫЙ ГАЗ

В прикладной газовой динамике мы вместо реального газа будем использовать его модель — совершенный газ, молекулы которого представляются в виде материальных точек, взаимодействующих только при соударениях. Совершенный газ имеет постоянные теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$ , показатель изоэнтропы  $k = C_p/C_v$  и молекулярную массу  $m$  и удовлетворяет уравнению состояния (уравнению Менделеева—Клапейрона), являющимся одним из важных уравнений газовой динамики:

$$p = R \rho T, \quad (1.1)$$

где  $R = mR/m = C_p - C_v$  — удельная газовая постоянная, Дж/(кг·К);  $mR = 8320$  Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная;  $m$  — масса моля газа, кг/моль.

Вводя энтальпию  $i = C_p T$  и  $C_p = \frac{k}{k-1} R$ , получим из (1.1) калорическое уравнение состояния

$$i = C_p p / (\rho R) = \frac{k}{k-1} (p/\rho), \quad \text{Дж/кг.} \quad (1.2)$$

Постоянные значения  $k$ ,  $m$ ,  $R$ ,  $C_p$  даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Газ	$k$	$m$ , кг/моль	$R$ , Дж/(кг·К)	$C_p$ , Дж/(кг·К)
Фреон 12	1,14	121	69	560
Воздух	1,4	28,97	287	1005
Гелий	1,67	4	2080	5200
Водород	1,4	2	4160	14580

Повышение температуры реального газа, которое часто происходит при его движении, вначале интенсифицирует колебательное движение молекул, затем вызывает их диссоциацию и ионизацию. Все это приводит не только к изменению  $C_p$ ,  $C_v$  и  $k$ , но и природы газа — молекулярного веса, газовой постоянной и электропроводности. Исследование движения с учетом изменения свойств реаль-



ного газа представляет большие математические трудности и является предметом физико-химической газовой динамики.

Использование модели «совершенный газ» обеспечивает достаточно для практики точность расчетов, если температура воздуха не превышает примерно 2500 К. При больших температурах эта модель позволяет выяснить лишь механические особенности этих сложных течений. Такое изучение является лишь первым необходимым шагом в решении общей проблемы.

**Задача 1.1.** Определите плотность воздуха в вашей комнате, задавшись необходимыми параметрами. Сравните ее с плотностью водорода при тех же параметрах. Ответ  $\rho_{\text{возд}} \approx 1,2$ ;  $\rho_{\text{H}_2} \approx 0,08$  кг/м<sup>3</sup>.

## 1.2. МОЛЕКУЛЯРНОЕ СТРОЕНИЕ

Особенности движения жидкостей (по сравнению с движением твердых тел) обусловлены их специфическими физическими свойствами — легкоподвижностью, сжимаемостью и вязкостью. Эти свойства являются проявлением особенностей молекулярного строения жидкостей.

Молекулы твердых тел располагаются на очень малых расстояниях друг от друга и совершают колебания. Силы взаимодействия между ними очень велики и возрастают пропорционально изменению расстояния. Поэтому твердые тела сопротивляются сжатию, растяжению, изгибу, сдвигу, кручению. Напряжение  $\sigma$  при упругой деформации твердого тела пропорционально его относительной деформации  $\Delta l/l$ . По закону Гука:  $\sigma = E\Delta l/l$ , где  $E$  — модуль упругости,  $l$  — размер тела,  $\Delta l$  — величина деформации. Твердые тела не обладают легкоподвижностью, поэтому на твердое тело может действовать сосредоточенная сила, приложенная к одной точке. Механика твердого тела — это механика материальной точки или совокупности неподвижных, относительно друг друга, материальных точек.

Молекулы капельных жидкостей располагаются на больших расстояниях, чем в твердых телах, а силы взаимодействия между ними значительно меньше. Молекулы капельных жидкостей свободно перемещаются в пространстве, совершая колебания около подвижных центров равновесия. При увеличении температуры хаотическое движение молекул и их колебания интенсифицируются, а силы взаимодействия уменьшаются.

Молекулы газов в обычных условиях располагаются на еще больших расстояниях друг от друга, находятся в непрерывном хаотическом тепловом движении и сталкиваются между собой. Силы взаимодействия между ними настолько малы, что ими обычно пренебрегают. При повышении температуры газа скорость хаотического теплового движения молекул и число их соударений возрастают.

Легкоподвижность жидкостей является результатом слабых связей между молекулами. В силу легкоподвижности к поверхности жидкости не может быть приложена сосредоточенная сила, а только непрерывно распределенная нагрузка. Направленное дви-

жение жидкости складывается из хаотического движения огромного числа молекул, непрерывно смещающихся относительно друг друга.

Практику не интересует поведение отдельных молекул, а интересует изменение в пространстве и во времени макроскопических параметров, характеризующих движение и состояние жидкости в целом.

### 1.3. СПЛОШНОСТЬ ЖИДКОСТИ

Для того, чтобы стало возможным теоретическое исследование направленного движения жидкости, необходимо разрешить два принципиальных вопроса:

1. Каким образом применить для анализа движения жидкостей, имеющих молекулярное строение, математический аппарат исследования непрерывных функций, чтобы получить решение вида (0.1)?

2. Как выявить силы, действующие в жидкости, и приложить их к легкоподвижной дискретной среде, чтобы проанализировать ее движение?

Ответ на первый вопрос дает *постулат Даламбера—Эйлера*, утверждающий, что при изучении направленного движения жидкостей и сил взаимодействия их с твердыми телами, жидкости можно рассматривать как сплошную среду (континуум), лишенную молекул и межмолекулярных пространств.

Реально существующее хаотическое движение молекул отражается в этом случае в величине макроскопических параметров движущейся жидкости —  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $W$ , которые для континуума являются функциями точек пространства. Это дает возможность применить для анализа движения жидкостей математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления, хорошо разработанный для непрерывных функций, и получить решения (0.1). Таким образом, гидрогазодинамика не изучает молекулярные процессы в жидкостях и, так же как термодинамика, является наукой феноменологической. Поэтому ее называют также ветвью механики сплошных сред.

Параметры жидкости в данной точке. Для характеристики распределения массы жидкости в пространстве вводятся понятия о средней плотности жидкости и о плотности в данной точке.

Средней плотностью  $\rho_{\text{ср}}$ , кг/м<sup>3</sup> называется отношение массы жидкости  $\Delta m$  к занимаемому объему  $\Delta V$

$$\rho_{\text{ср}} = \Delta m / \Delta V. \quad (1.3)$$

Плотностью жидкости в данной точке называется предел отношения (1.3) при стягивании объема к данной внутренней точке

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta m / \Delta V). \quad (1.4)$$

Применяемые здесь и далее предельные переходы к бесконечно малым объемам ( $\Delta V \rightarrow 0$ ), массе ( $\Delta m \rightarrow 0$ ) или площадке ( $\Delta S \rightarrow 0$ ) являются лишь условными обозначениями переходов к так называемым физически малым объемам  $\delta V$ , массе  $\delta m$  и площадке  $\delta S$ . Для того, чтобы жидкость можно было считать континуумом, т. е. для того, чтобы плотность ее в данной точке имела определенное значение, необходимо, чтобы понятие физически малого объема  $\delta V$  удовлетворяло следующим условиям:

1) характерный размер  $\delta V$ , например его диаметр  $d$ , должен быть исчезающе мал по сравнению с характерными размерами течения (размеры канала или обтекаемых тел) так, чтобы  $\delta V$  можно было считать «точкой»;

2) объем  $\delta V$ , с другой стороны, должен иметь такую величину, чтобы содержащееся в нем число молекул было так велико, что его изменение во времени за счет теплового хаотического движения не вызывало бы заметного изменения плотности. Это условие выполняется, если  $d$  существенно превышает длину свободного пробега молекул  $l$  ( $d/l \gg 1$ ). При дальнейшем уменьшении объема число содержащихся в нем молекул за счет теплового хаотического движения так существенно изменяется во времени, что плотность в данной точке, а вместе с ней и постулат о сплошности, теряют смысл. Поэтому предельный переход к бесконечно малому объему  $\Delta V \rightarrow 0$  для дискретной среды не имеет смысла и, как уже было сказано, записывается условно. Для капельных жидкостей и для не слишком разреженных газов длина свободного пробега молекулы, и следовательно, предельный размер физически малого объема исчезающе малы по сравнению с интересующими нас характерными размерами течений, поэтому плотность в данной точке имеет определенную величину и жидкость можно считать континуумом.

Все законы газовой динамики сплошной среды справедливы до тех пор, пока справедлив постулат о сплошности жидкости. Количественно пределы применения законов газовой динамики сплошной среды определяются величиной критерия Кнудсена — отношения длины свободного пробега молекул газа ( $l$ ) к характерному размеру течения ( $L$ )

$$Kn = l/L. \quad (1.5)$$

Все течения газов в зависимости от величины  $Kn$  делятся на области:

I.  $Kn = l/L < 0,01$  — течения континуума. Справедливы законы гидродинамики сплошных сред. При обтекании твердых тел сплошной средой молекулы ее прилипают к твердой поверхности (гипотеза Прандтля о прилипанию) и поэтому скорость жидкости на поверхности твердых тел всегда равна скорости этой поверхности, а температура жидкости на стенке равна температуре стенки.

II.  $Kn > 0,01$  — течения разреженных газов. В этой области различают три степени разреженности:

1)  $0,01 < Kп < 0,1$  — течения со скольжением. В этой области течения не сильно разреженных газов наблюдаются два эффекта — газ скользит по поверхности твердого тела с некоторой конечной скоростью и температура его отличается от температуры поверхности на конечную величину. При исследовании течений газов в этой области используются уравнения газовой динамики сплошной среды с внесением поправок на скачки скорости и температуры;

2)  $0,1 < Kп < 10$  — переходная, наименее исследованная область течения разреженных газов;

3)  $Kп > 10$  — свободномолекулярное течение. Газ состоит из отдельных молекул не взаимодействующих практически между собой. С телами взаимодействуют отдельные молекулы и расчет этого взаимодействия производится методами статической физики. В области достаточно сильно разреженных газов  $Kп > 0,1$  постулат о сплошности, понятие о плотности в точке и законы газовой динамики сплошной среды не применимы.

Изучение течений разреженных газов является предметом газовой динамики разреженных газов или супергазодинамики — молодой бурно развивающейся науки, возникшей в связи с развитием космической и вакуумной техники [1].

Задача 1.2. Используя данные международной стандартной атмосферы (приложение 1) определить для летательного аппарата с характерным размером  $L = 1$  м изменение областей течения, с подъемом на высоту, вплоть до свободномолекулярного течения.

При исследовании движения континуума используются следующие понятия.

Жидкая частица — мысленно выделенная весьма малая масса  $\delta m$  жидкости неизменного состава по объему, сравнимая с физически малым объемом  $\delta V$ . При движении жидкая частица может изменять объем и форму, но заключенная в ней масса жидкости остается неизменной.

Жидкий объем — мысленно выделяемый объем, состоящий из одних и тех же жидких частиц. При движении может деформироваться, но сохраняет постоянную массу.

Контрольный объем — мысленно выделяемый постоянный объем, занимающий неизменное положение в пространстве. Через этот объем протекает жидкость.

Внешняя или окружающая среда — жидкость и все остальное, находящееся вне выделенного объема.

Контрольная поверхность — поверхность, ограничивающая контрольный объем (для жидкого объема — поверхность жидкого объема).

Жидкий контур — контур в пространстве, состоящий из одних и тех же жидких частиц (или жидких частиц одинаковых свойств).

Скорость жидкости в данной точке — мгновенная скорость движения центра массы жидкой частицы, проходящей в данный момент через данную точку пространства.

## Методика исследования движения континуума

1. В рассматриваемом пространстве выбирается произвольная система координат  $x, y, z$ .

2. В произвольной точке пространства мысленно выделяется жидкий объем.

3. Внешняя среда мысленно отбрасывается и ее действие на жидкий объем заменяется соответствующими силами, которые таким образом переводятся из внутренних во внешние, определяющие движение выделенного жидкого объема.

4. К объему применяются законы сохранения массы и механики твердого тела и изучается его движение за определенный промежуток времени  $dt$  под действием приложенных сил. Составляются уравнения сохранения массы жидкого объема и движения жидкости.

5. Одновременно изучается обмен энергией между жидким объемом и внешней средой — составляется уравнение энергии. Кроме того, параметры газа в каждой точке пространства связываются между собой уравнением состояния (1.1).

Поскольку практику обычно в большей степени интересует изменение параметров потока жидкости в зафиксированных точках пространства, а не движение жидкого элемента, то устремляя  $dt$  к нулю, переходят к контрольному объему. Предельный переход  $dt \rightarrow 0$  позволяет изучить изменение параметров жидкости, протекающей через контрольный объем. При выводе интегральных уравнений, удовлетворяющих конечным участкам течений, объемы выбираются соответствующей конечной величины. При выводе дифференциальных уравнений, удовлетворяющих каждой точке пространства, жидкий и контрольный объемы выбираются физически малыми, «стягиваемыми в точку».

Эта методика позволяет получить шесть основных дифференциальных уравнений гидрогазодинамики, решение которых с использованием условий однозначности, конкретизирующих данную задачу, позволяет получить искомые поля (0.1).

### 1.4. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЖИДКИЙ ОБЪЕМ

Внешние силы, действующие на жидкий объем и определяющие его движение, разделяются на массовые (объемные) и поверхностные.

Массовые силы  $R_m$  приложены ко всем жидким частицам, составляющим жидкий объем. К ним относятся силы тяжести и силы инерции. Кроме того, к массовым силам относятся силы взаимодействия частиц токопроводящей жидкости с электромагнитными полями. Наука, изучающая эти течения, называется магнитной гидрогазодинамикой [1].

Напряжением  $\vec{J}$  массовой силы ( $m/c^2$ , Н/кг) называется отношение вектора массовой силы  $\Delta \vec{R}_m$  к массе  $\Delta m$  жидкой частицы, на

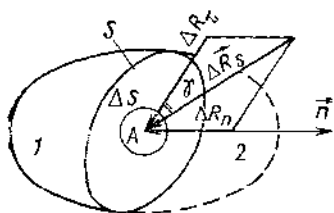


Рис. 1.1. Поверхностные силы

жидкостью. Проекции напряжения массовой силы на оси координат  $x, y, z$  обозначим  $X, Y, Z$ , тогда

$$\vec{J} = \vec{i}X + \vec{j}Y + \vec{k}Z; \quad J = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (1.7)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — орты.

**Задача 1.3.** Определить величины  $X, Y, Z$  в поле сил тяжести на уровне моря, если ось  $Z$  направлена вдоль радиуса земли. Ответ.  $X=Y=0; Z=-9,8 \text{ м/с}^2$ .

Поверхностные силы  $R_s$  представляют воздействие внешней среды на поверхность выделенного объема. Это воздействие распределено по поверхности непрерывно. Выберем на плоскости  $S$ , рассекающей некоторую массу жидкости на части 1 и 2 (рис. 1.1), элементарную площадку  $\Delta S$ , на которой лежит точка  $A(x, y, z)$ . Отбросим часть 2 и заменим ее действие на площадку  $\Delta S$  части 1 равнодействующей поверхностных сил  $\Delta \vec{R}_s$ . В общем случае величина  $\Delta \vec{R}_s$  зависит от ориентировки площадки  $\Delta S$  и направлена к ней под острым углом  $\gamma$ . Ориентация площадки  $\Delta S$  определяется единичным вектором внешней нормали  $\vec{n}$ .

Нормальная составляющая  $\Delta R_n$  поверхностной силы  $\Delta \vec{R}_s$  действует по нормали к поверхности  $\Delta S$ , противоположно  $\vec{n}$ .

Сила трения или тангенциальная составляющая  $\Delta R_t$  действует в плоскости  $\Delta S$ .

**Задача 1.4.** В соответствии с рис. 1.1 изобразите схему сил действия части 1 на площадку  $\Delta S$  части 2. Какой закон Вы применили при решении этой задачи?

Напряжения поверхностных сил в точке  $A(x, y, z)$  — это пределы отношений соответствующих сил к площадке  $\Delta S$  при стягивании ее в точку. Различают следующие напряжения.

Напряжение равнодействующей поверхностной силы,  $\text{Н/м}^2$

$$r = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta \vec{R}_s / \Delta S. \quad (1.8)$$

Нормальное напряжение,  $\text{Н/м}^2$

$$\sigma = - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta R_n / \Delta S. \quad (1.9)$$

Знак минус показывает, что за положительное принято растягивающее нормальное напряжение.

Напряжение трения или касательное напряжение,  $\text{H}/\text{м}^2$

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta R_\tau / \Delta S. \quad (1.10)$$

## 1.5. ВЯЗКОСТЬ ИЛИ ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ В ЖИДКОСТЯХ

Вязкостью называется свойство всех реальных жидкостей оказывать сопротивление относительному сдвигу частиц, т. е. изменению их формы (но не объема). Для выяснения сущности вязкости рассмотрим течение жидкости между нижней неподвижной пластиной и верхней, движущейся параллельно нижней с постоянной скоростью  $u_1$  (рис. 1.2). Опыт показывает, что скорость жидкости у нижней пластины равна нулю, у верхней —  $u_1$  (жидкость прилипает к твердым поверхностям), а скорость между пластинами распределена линейно:  $u = u_1 y/h$ , давление постоянно во всей области. Такое течение называют течением чистого сдвига. Для его осуществления к жидкости со стороны верхней пластины должна быть приложена сила  $R_\tau$ , уравновешивающая силу вязкости (трения) жидкости, а для удержания на месте нижней пластины — сила ( $R_\tau$ ). Измерения показывают, что напряжение трения  $\tau = R_\tau/S$  пропорционально отношению скорости  $u_1$  к расстоянию между пластинами  $h$  и не зависит от абсолютной величины скорости (имеет значение лишь относительное движение слоев жидкости). Отношение  $u_1/h = du/dy$  называется градиентом скорости по нормали к плоскости скольжения слоев или кратко — поперечным градиентом скорости

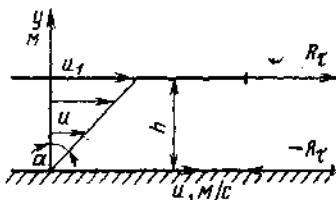


Рис. 1.2. Течение чистого сдвига

$$\tau = \mu u_1/h = \mu du/dy. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) выражает закон Ньютона о молекулярном трении в жидкости — напряжение трения пропорционально поперечному градиенту скорости. Этот закон был установлен Ньютоном экспериментальным путем. Жидкости, удовлетворяющие уравнению (1.11), называются ньютоновскими. Для неньютоновских жидкостей (смолы, коллоидальные растворы) напряжение трения определяется по более сложным формулам. Наука, изучающая движение неньютоновских жидкостей, называется реологией.

Коэффициент пропорциональности  $\mu = \tau/(du/dy)$ ,  $\text{H} \cdot \text{с}/\text{м}^2$  называется динамическим коэффициентом вязкости или просто вязкостью жидкости. Величина  $\mu$  зависит от природы жидкости, ее агрегатного состояния, температуры и практически не зависит от давления в широком диапазоне его изменения. Чем больше  $\mu$ , тем больше вязкость жидкости.

**Вопрос 1.5.** Каков физический смысл  $\mu$ ?

При исследовании течений, в которых действуют силы трения и силы инерции, используется кинематический коэффициент вязкости  $\nu$ , м<sup>2</sup>/с

$$\nu = \mu / \rho, \quad (1.12)$$

Из рассмотрения рис. 1.3 следует, что с увеличением температуры вязкость капельных жидкостей уменьшается, а газов увеличивается. Это объясняется различием в механизмах молекулярного трения в них.

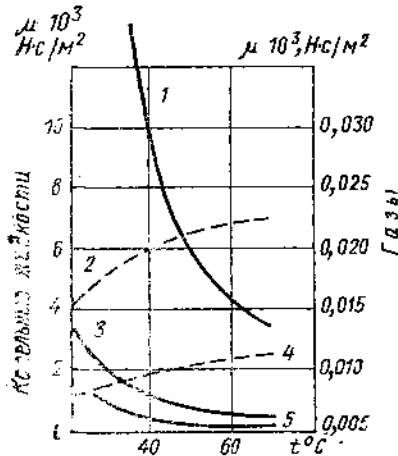


Рис. 1.3. Зависимость вязкости жидкостей от температуры:

1—масло; 2—воздух; 3—керосин; 4—водород; 5—вода

Трение в капельных жидкостях заключается, главным образом, в преодолении сил взаимодействия между молекулами слоев, смещающихся относительно друг друга. С увеличением температуры капельной жидкости увеличиваются частота колебаний молекул и силы взаимодействия между ними уменьшаются, а вместе с ними уменьшается и вязкость. Величина  $\mu$  для капельных жидкостей определяется экспериментальным путем.

Трение в газах обусловлено переносом направленного количества движения молекул при их тепловом хаотическом движении. Пусть два соседних слоя газа движутся в одну сторону с различными скоростями («быстрый» и «медленный»

слои). Молекулы «быстрого» слоя, переходя в «медленный», ускоряют его молекулы, а сами подтормаживаются и наоборот. С увеличением температуры газа скорость хаотического движения молекул и число соударений возрастают, а вместе с этим — перенос количества движения и вязкость газа.

В кинетической теории были найдены теоретическое обоснование закона Ньютона о молекулярном трении для газов и формулы для коэффициентов вязкости

$$\mu = 0,499 l_M v_M \rho, \quad (1.13)$$

$$\nu = 0,499 l_M v_M, \quad (1.14)$$

где  $l_M$  и  $v_M$  — длина свободного пробега и скорость теплового хаотического движения молекул.

**Вопрос 1.6.** Почему  $\mu$  газа не зависит от давления?

Зависимость  $\mu$  газа от температуры обычно определяется с достаточной степенью точности по эмпирической формуле

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^n. \quad (1.15)$$



Зная, что  $v = \mu/\rho$  и  $\rho = p/RT$ , получим

$$v = v_0 (T/T_0)^{n+1} p_0/p \quad (1.16)$$

$\mu_0$  и  $v_0$  — значения коэффициентов при  $T_0 = 273$  К и  $p_0 = 10^5$  Па. Величина показателя  $n$  уменьшается с увеличением температуры. Для воздуха при  $T = 273$  К  $n = 0,8$ , а при  $T = 4000$  К  $n \approx 0,65$ . В дальнейшем для воздуха будем полагать  $n = 0,76$ .

**Задача 1.7.** Получите формулу (1.16), используя (1.15), (1.1) и (1.12).

Поперечный градиент скорости  $du/dy$  характеризует изменение скорости в направлении нормали к ней и является важнейшей величиной, так как закон Ньютона утверждает, что вязкость жидкости может проявиться только при  $du/dy \neq 0$ . Если  $du/dy = 0$ , то  $\tau = 0$  и вязкость жидкости не проявляется.

Геометрически (см. рис. 1.2) поперечный градиент скорости представляет тангенс угла  $\alpha$  между касательной к полю скоростей  $u = u(y)$  в данной точке и нормалью к вектору скорости (если ось  $y$  и ось  $u$  имеют одинаковый масштаб). Для течения чистого сдвига (см. рис. 1.2)  $du/dy = du/dy = \text{tg } \alpha = \text{const}$ .

Физический смысл градиента скорости. Деформация сдвига  $dl$  кубической жидкой частицы в неравномерном поле скоростей за время  $dt$  (рис. 1.4) равна  $dl = du dt$ . Отсюда поперечный градиент скорости

$$du/dy = du/dy = dl/(dy dt) = \text{tg } \gamma / dt \quad (1.17)$$

представляет собой скорость относительной деформации сдвига. Следовательно, в жидкостях касательные напряжения  $\tau = \mu (du/dy)$  пропорциональны скорости относительной деформации сдвига. Одно из основных отличительных свойств жидкостей — их легкоподвижность — в том и состоит, что даже при значительной вязкости  $\mu$ , при малой скорости относительной деформации сдвига ( $du/dy \rightarrow 0$ ) напряжение трения также исчезающе мало ( $\tau \rightarrow 0$ ) и при неограниченном времени действия может вызвать деформацию сколь угодно большой величины (крохотные катера буксируют корабли в сотни тысяч тонн водоизмещением с малой скоростью). С другой стороны, даже в очень маловязких жидкостях, таких, как воздух, при больших скоростях относительной деформации ( $du/dy$ ) силы трения приобретают большое значение. Если величина напряжения трения постоянна для всей площади  $S$  соприкосновения слоев, как это имеет место в случае чистого сдвига, то сила трения рассчитывается по формуле

$$R_\tau = \tau S = \mu (du/dy) S. \quad (1.18)$$

В противном случае необходимо интегрировать по площади.

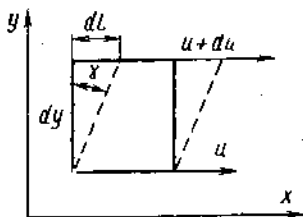


Рис. 1.4. Деформация сдвига

Сила трения между твердыми телами пропорциональна силе нормального давления и не зависит ни от скорости относительного движения тел, ни от площади их соприкосновения. Сила трения покоя больше, чем сила трения при относительном движении. Сила трения покоя в жидкостях равна нулю так же, как и при движении с равномерным полем скоростей, когда  $du/dy=0$ .

Обобщенный закон Ньютона или закон Стокса. Любое напряжение в жидкостях пропорционально соответствующей скорости относительной деформации. Например нормальное напряжение пропорционально относительным скоростям линейной и объемной деформаций.

Гидростатическое давление. Во всех случаях, когда в данной точке отсутствуют тангенциальные напряжения, т. е. при покое, при движении с равномерным полем скоростей, независимо от ориентации площадки, на нее действует только нормальное напряжение. Анализируя равновесие жидкой частицы можно доказать [18], что величина этого нормального напряжения не зависит от ориентации площадки. Это напряжение с обратным знаком называется гидростатическим давлением ( $p$ ), т. е.

$$\sigma = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \quad (1.19)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  — нормальные напряжения, действующие на грани частицы перпендикулярные осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  произвольной системы координат.

Знак минус учитывает, что давление всегда направлено внутрь выделенного объема жидкости, а напряжение принято считать положительным, если его направление совпадает с направлением внешней нормали. В общем случае течения вязкость жидкостей проявляется не только в появлении касательных напряжений, но и во влиянии на величину нормальных. При этом величина нормальных напряжений в данной точке зависит от ориентации площадки, т. е.  $\sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z$ . Однако среднее арифметическое трех взаимно перпендикулярных нормальных напряжений в вязкой жидкости не зависит от ориентации площадки и для несжимаемой жидкости, равно давлению с обратным знаком

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = -p. \quad (1.20)$$

В гидродинамике сжимаемой вязкой жидкости принимается второе обобщение гипотезы Ньютона, согласно которому среднее нормальное напряжение равно сумме давления (со знаком минус) и произведения коэффициента второй вязкости  $\eta$  на скорость относительной объемной деформации  $e$

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = -p + \eta e. \quad (1.21)$$

Коэффициент второй вязкости учитывает диссипацию энергии в самопроизвольных процессах установления равновесия. Для одноатомных газов  $\eta \approx 0$ . Для многоатомных принимает существенное значение, сопоставимое с коэффициентом вязкости  $\mu$ , в тех процессах, скорость протекания которых значительно выше скорости ус-

тавления термодинамического равновесия. Это имеет место, например, при взрывах. В курсе рассматриваются процессы, для которых  $\eta \approx 0$  и среднее напряжение и давление определяются по формуле (1.20).

Таким образом, учет вязкости существенно усложняет анализ законов движения жидкостей, так как вязкость приводит к появлению тангенциальных напряжений и сложным образом влияет на нормальные напряжения.

Идеальная жидкость — это жидкость, лишенная вязкости ( $\mu = 0$ ). Эту модель используют для упрощения расчетов в случае,

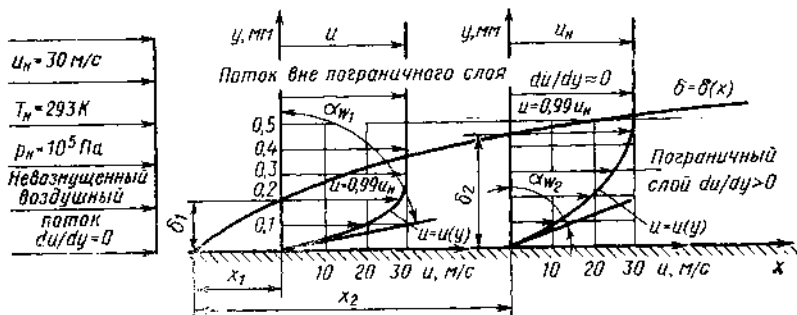


Рис. 1.5. Динамический пограничный слой

когда силами вязкости можно пренебречь. Нормальное напряжение в данной точке идеальной жидкости не зависит от ориентации площадки и равно гидростатическому давлению с обратным знаком.

Динамический пограничный слой. С вязкостью связано возникновение пограничного слоя при обтекании жидкостями твердых тел. Течение в пограничном слое будет подробно рассмотрено в гл. 15. Здесь приводятся лишь предварительные сведения о нем.

Пусть поток жидкости с равномерным полем скоростей  $u_n = \text{const}$  набегаает на поверхность плоской пластины и течет параллельно ей (рис. 1.5). Молекулы жидкости, непосредственно прилегающие к поверхности твердого тела, прилипают к этой поверхности под действием сил притяжения их к молекулам твердого тела. Прилипшие молекулы из-за вязкости жидкости взаимодействуют с близтекущими слоями, подтормаживая их. Теоретически такое тормозящее действие слоев друг на друга может простирается по направлению нормали к пластине в бесконечность, т. е. скорость вдоль нормали должна постепенно изменяться в таких пределах:  $y=0, u=u_w=0; y=\infty; u=u_n^*$ . Поэтому пограничный слой называется *асимптотическим*. Однако в большинстве интересующих нас слу-

\* Индексами  $n$  и  $w$  отмечаются параметры невозмущенного потока и на поверхности твердых тел соответственно.

чаев (маловязкие жидкости и достаточно большие скорости) значительное влияние прилипших молекул и, следовательно, существенное изменение скорости наблюдается лишь в относительно тонком пристеночном слое  $\delta/x \ll 1$ . Здесь  $\delta = \delta(x)$  толщина пограничного слоя на расстоянии  $x$  от начала пластины, возрастающая вдоль пластины (подтормаживаются все новые слои жидкости).

Граничные условия пограничного слоя его условная толщина определяется общепринятыми граничными условиями:

$$\left. \begin{array}{l} \text{внутренняя граница (условия прилипания)} \quad y=0; \quad u=u_w=0 \\ \text{внешняя граница (условная)} \quad y=\delta; \quad u=0,99u_n \end{array} \right\} \quad (1.22)$$

Формулировка теории пограничного слоя. Всю область течения жидкости около твердого тела можно разбить на две качественно отличные зоны:

а) пограничный слой толщиной  $\delta(x)$ . Это относительно тонкий слой  $\delta/x \ll 1$ , примыкающий к поверхности твердого тела. В этом слое существенно изменяется скорость от  $u_w=0$  до  $u=0,99u_n$  и  $du/dy \gg 0$ . Поэтому только внутри пограничного слоя проявляется вязкость жидкости и ее необходимо учитывать в расчетах. Однако для пограничного слоя учет вязкости существенно упрощается;

б) набегающий невозмущенный поток и область, лежащая над пограничным слоем, в которых  $du/dy \approx 0$ . Поэтому жидкость, текущую над пограничным слоем, можно считать идеальной ( $\tau=0$ ) и анализировать ее движение по более простым законам движения идеальной жидкости.

Теория пограничного слоя разделяет решение общей сложной задачи об обтекании твердого тела потоком вязкой жидкости на две более простые: обтекание твердого тела лишь тонким слоем вязкой жидкости и обтекание твердого тела несколько увеличенного в размерах (на величину пропорциональную толщине пограничного слоя) идеальной жидкостью. Пограничный слой возникает при всех реальных течениях в лопаточных машинах и двигателях и существенно влияет на их работу. Теория пограничного слоя позволяет управлять сознательно этими течениями, а также рассчитывать их.

Одними из первых представления о пограничном слое высказали знаменитые русские ученые Д. И. Менделеев в монографии «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании» (1880 г.) и Н. Е. Жуковский в работе «О форме судов» (1890 г.) и в более поздних лекциях. Известный немецкий ученый Л. Прандтль в 1904 г. получил дифференциальные уравнения движения жидкости в пограничном слое, которые лежат в основе современной теории пограничного слоя. Впервые эти уравнения были решены Блазиусом в 1907 г. для простейших случаев пластины и круглого цилиндра. На этой основе, усилиями многих ученых мира, была создана современная теория пограничного слоя, которая бурно развивается и поныне. Большой вклад в эту теорию внесли советские ученые Г. Н. Абрамович, В. С. Авдуевский, А. А. Дородницын,

И. Е. Кочин, Л. Г. Лойцянский, Г. И. Петров, Е. И. Степанов, В. В. Струминский и многие другие, а также зарубежные ученые Т. Карман, Л. Прандтль, В. Толмин, Г. Шлихтинг и др.

**Задача 1.8.** Используя данные рис. 1.3 и 1.5 доказать, что напряжение трения имеет следующие значения

Ордината и напряжение трения	Сечение $x_1$			Сечение $x_2$		
	$y$	$\delta_1/2$	$\delta_1$	$y$	$\delta_2/2$	$\delta_2$
$\tau, \text{ Н/м}^2$	0 ~5,4	$\delta_1/2$ ~2	$\delta_1$ ~0	0 ~2,7	$\delta_2/2$ ~1,15	$\delta_2$ ~0

## 1.6. СЖИМАЕМОСТЬ ЖИДКОСТИ

Сжимаемость — это свойство жидкостей изменять плотность (объем) при изменении давления и температуры. Для количественной оценки сжимаемости используется модуль упругости жидкостей  $\mathcal{K}$  — отношение изменения давления  $\Delta p$  к относительному изменению плотности  $\Delta \rho/\rho$  (Па) в данном процессе

$$\mathcal{K} = \Delta p / (\Delta \rho / \rho). \quad (1.23)$$

Относительное изменение плотности при заданном изменении давления  $\Delta \rho/\rho = \Delta p/\mathcal{K}$  обратно пропорционально модулю упругости  $\mathcal{K}$ . Капельные жидкости малосжимаемы и их модули упругости достаточно велики. Для воды, керосина и ртути соответственно  $\mathcal{K} = 2 \cdot 10^9$ ;  $1,3 \cdot 10^9$ ;  $3,3 \cdot 10^9$  Па.

**Вопрос 1.9.** Каков физический смысл модуля упругости и чему он равен для абсолютно твердого тела?

**Задача 1.10.** Докажите, что при изменении давления на  $10^7$  Па (примерно на 100 атм.) плотность (объем) воды изменяется всего на 0,5%.

При изменении температуры плотность жидкости изменяется более существенно. Это свойство используется в термометрах и термостатах.

Сжимаемость газов очень велика. Переходя от конечных разностей к дифференциалам, получим

$$\mathcal{K} = dp / (dq/q). \quad (1.24)$$

При изотермическом процессе  $p = q \text{ const}$   $\mathcal{K} = dp / (dq/q) = p$ , т. е. сжимаемость газов тем больше, чем меньше давление.

**Вопрос 1.11.** Во сколько раз при атмосферном давлении и изотермическом процессе сжимаемость газа больше сжимаемости воды?

При изоэнтропном процессе ( $p = q^k \text{ const}$ ,  $k = C_p/C_v$  и  $dp/dq = = k p/q$ )

$$\mathcal{K}_{\text{эл}} = dp / (dq/q) = k p \quad (1.25)$$

и сжимаемость газов определяется не только давлением, но и показателем изоэнтропы  $k$ , уменьшаясь с его увеличением. В этом проявляется влияние изменения температуры на изменение плотности газа в изоэнтропном процессе.

Для количественной оценки сжимаемости жидкости при изменении только температуры при  $p = \text{const}$  используется коэффициент температурного расширения  $\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{d\rho}{dT} \right)_p$ . Учет изменения плотности газа, вызванного изменением температуры, имеет особенно существенное значение при исследовании пограничного слоя (п. 15.5).

Несжимаемая жидкость — жидкость, плотность которой при изменении давления и температуры не изменяется ( $\rho = \text{const}$ ).

Эта модель используется для упрощения исследования течений, когда относительное изменение плотности жидкости весьма мало, т. е.  $\Delta\rho/\rho \ll 1$ . Для решения вопроса — применима ли модель несжимаемой жидкости при исследовании заданного течения — необходимо знать изменения давления и температуры и вызванное ими относительное изменение плотности. Изменение давления в потоке несжимаемой жидкости без обмена энергией с внешней средой и без потерь определим, используя известное из курса физики уравнение Бернулли (4.60)

$$p + \rho W^2/2 = \text{const}. \quad (1.26)$$

Из уравнения следует, что в заданных условиях полная энергия жидкости постоянна, а ее составляющие — потенциальная энергия давления и кинематическая энергия могут взаимопревращаться. Предположив, что в процессе скорость течения может только уменьшаться, приходим к выводу, что максимально возможное изменение давления в процессе течения будет равно скоростному напору  $\Delta p = \rho W^2/2$ .

Свяжем воедино характеристику процесса ( $\Delta p = \rho W^2/2$ ), характеристику жидкости  $\mathcal{K}$  (см. 1.23) и допустимую погрешность в пренебрежении сжимаемостью ( $\Delta\rho/\rho \ll 1$ ). Получим критерий, определяющий предел применения модели несжимаемой жидкости

$$\Delta\rho/\rho = \Delta p/\mathcal{K} \approx (\rho W^2/2 \mathcal{K}) \ll 1. \quad (1.27)$$

Итак, газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость, если скоростной напор существенно меньше модуля объемной упругости. Знак приблизительно равно в (1.27) отражает использование уравнения Бернулли для несжимаемого газа, что, однако, при решении задачи о пределе применения модели несжимаемой жидкости не вызывает ощутимой погрешности.

**Вопрос 1.12.** Какой газ имеет большую сжимаемость при изотропном процессе: водород, воздух или фреон 12?

Скорость звука  $a$ , м/с — скорость распространения малых возмущений давления в данной среде, рассчитывается по формуле, известной из курса физики, а также с учетом (1.24)

$$a = \sqrt{dp/d\rho} = \sqrt{\mathcal{K}/\rho}. \quad (1.28)$$

Для совершенного газа, с учетом адиабатического процесса, в

звуковой волне ( $\rho = \rho^k \text{ const}$ ;  $dp/dq = k\rho/q$ ) и уравнения состояния (1.1), получим из (1.28):

$$a = \sqrt{k p/q} = \sqrt{k R T} = \sqrt{k m R T/m}. \quad (1.29)$$

В несжимаемых средах  $q = \text{const}$ ,  $dq = 0$ ,  $\mathcal{K} = \infty$  и  $a = \infty$ , т. е. возмущения распространяются мгновенно. Все жидкости в большей или меньшей степени сжимаемы и звук в них распространяется с конечными скоростями.

Скорость звука в данном газе зависит только от его абсолютной температуры —  $a \sim \sqrt{T}$ . Скорость звука в различных газах при одинаковой температуре зависит от их природы  $a \sim \sqrt{k m R/m}$ . Показатель изэнтропы для различных газов изменяется в узких пределах (1.1 ... 1.67), поэтому основное влияние оказывает молекулярная масса газа.

Водород $m = 2$ кг/моль	Воздух $m = 28,97$ кг/моль	Фреон $m = 121$ кг/моль	
$a = 76,4\sqrt{T}$	$a = 20,1\sqrt{T}$	$a = 8,7\sqrt{T}$	(1.30)

**Задача 1.13.** Подсчитать скорость звука в водороде, воздухе и фреоне при  $T = 288$  и  $900$  К. Сравнить эти величины со скоростью звука в воде.

Число Маха — отношение скорости газа  $W$  к местной скорости звука  $a^*$

$$M = W/a. \quad (1.31)$$

Подставляя в (1.27) значение модуля упругости из (1.28) и используя (1.31), получим условие, когда газ можно считать несжимаемым

$$\Delta\rho/\rho = 0,5 M^2 \ll 1. \quad (1.32)$$

Число Маха в газовой динамике является важнейшим критерием сжимаемости движущегося газа. Газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость только при течениях с  $M \ll 1$  (обычно при  $M \leq 0,3 \dots 0,4$ ).

**Задача 1.14.** Доказать, что при  $H = 0,5$  км, скорости полета  $W = 108$  м/с и при  $H = 11 \dots 25$  км и  $W = 93$  м/с, воздух можно считать несжимаемым с погрешностью  $\Delta\rho/\rho \leq 6\%$ .

Молекулярные теплопроводность и диффузия. При существовании поперечных градиентов температуры  $dT/dy \neq 0$  и концентрации  $C$ , кг/м<sup>3</sup> избыточной примеси  $dC/dy \neq 0$  в жидкости наблюдается теплопроводность и диффузия. Удельные потоки тепла  $q$ , Дж/(м<sup>2</sup>·с) и избыточной примеси  $G$ , кг/(м<sup>2</sup>·с) определяются законами Фурье и Фика

$$q = -\lambda dT/dy, \quad G = -D dC/dy. \quad (1.33)$$

\* На практике часто используется число Маха полета  $M_{\text{полета}} = W_{\text{полета}}/a$ , что правомерно, так как в соответствии с принципом относительности движения  $|W_{\text{полета}}| = |W|$ .

Коэффициенты теплопроводности  $\lambda$ , Дж/(м·с·К), температуропроводности  $\chi$ , м<sup>2</sup>/с и диффузии  $D$ , м<sup>2</sup>/с для газов определяются теоретически в кинетической теории газов

$$\lambda = 0,499 \rho C_p l_{mv}; \quad \chi = \lambda / \rho C_p = 0,499 l_{mv}; \quad D = 0,499 l_{mv}. \quad (1.34)$$

Формулы (1.33) и (1.34) имеют одинаковую структуру с (1.11), (1.13) и (1.14). Это является результатом того, что механизм молекулярного переноса количества движения (трения), тепла (теплопроводности) и вещества (диффузия) в газах одинаков — тепловое хаотическое движение молекул.

Для капельных жидкостей величины этих коэффициентов определяются экспериментально.



## Глава 2

# ГИДРОСТАТИКА

Для равновесия жидкости, изучаемого в гидростатике, характерно постоянство формы объема, т. е. отсутствие смещения отдельных ее частиц. Вследствие этого касательные напряжения отсутствуют и на элемент жидкости действуют только массовые силы и нормальные к поверхности силы гидравлического давления.

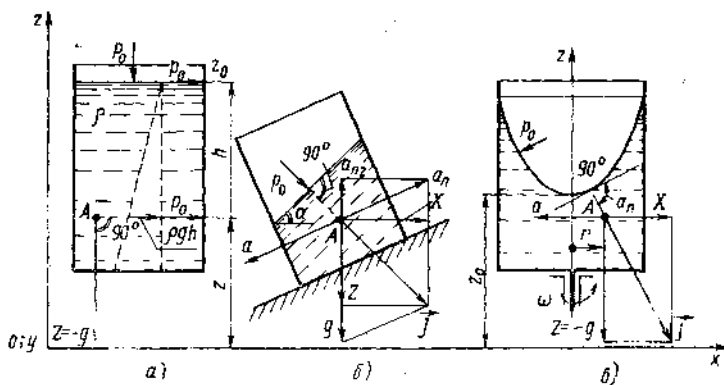


Рис. 2.1. Виды равновесия жидкости:  
а—абсолютное; б и в—относительное

Различают *абсолютное равновесие* жидкости, т. е. равновесие относительно сосуда, движущегося равномерно и прямолинейно или покоящегося относительно земли (рис. 2.1,а), и *относительное равновесие* — равновесие относительно сосуда, движущегося прямолинейно с постоянным ускорением  $a$ , м/с<sup>2</sup> относительно земли (рис. 2.1,б) или относительно сосуда, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , 1/с относительно своей оси (рис. 2.1,в).

Свободные поверхности, отделяющие жидкость от атмосферы и являющиеся одновременно *поверхностями уровня*, т. е. поверхностями равного давления ( $p = \text{const}$ ), в рассматриваемых случаях имеют различный вид (см. рис. 2.1).

Общим условием равновесия жидкости, независимо от его вида, является равенство нулю равнодействующей всех сил, приложен-

ных к любому элементу жидкости и, следовательно, равенство нулю суммы моментов этих сил относительно произвольной оси.

## 2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Дифференциальное уравнение равновесия или уравнение Эйлера позволяет после интегрирования получить распределение давления  $p = p(x, y, z)$  в покоящейся жидкости при заданном распределении напряжения массовой силы  $\vec{J}_m = \vec{J}(x, y, z)$ , плотности  $\rho = \rho(x, y, z)$  и давления  $p_0$  на свободную поверхность жидкости.

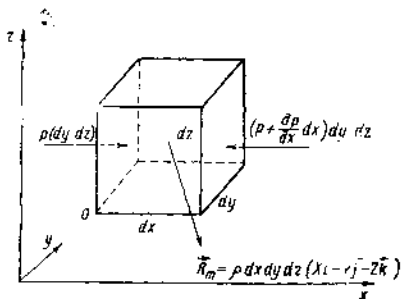


Рис. 2.2. Равновесие элемента жидкости

Пусть на мысленно выделенный элементарный параллелепипед с ребрами  $dx, dy, dz$  (рис. 2.2) действует известная массовая сила  $\vec{R}_m$ , напряжение которой  $\vec{J}_m = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ , а на грани, сходящиеся в точке  $O(x, y, z)$  — искомое давление  $p(x, y, z)$ . На противоположных гранях давление соответственно будет  $p + (\partial p/\partial x)dx$ ;  $p + (\partial p/\partial y)dy$ ;  $p + (\partial p/\partial z)dz$ . На рис. 2.2 приведены только силы давления, параллельные оси  $x$ . Залишем уравнение равновесия элемента в проекции на ось  $x$  как равенство нулю суммы проекций всех сил на эту ось

$$X\rho dx dy dz + \{p - [p + (\partial p/\partial x)dx]\} dy dz = 0.$$

Производя очевидные упрощения и повторяя аналогичные выкладки для осей  $y$  и  $z$ , получим дифференциальные уравнения равновесия жидкости в проекциях на оси координат

$$\begin{aligned} X - (1/\rho)(\partial p/\partial x) &= 0; & Y - (1/\rho)(\partial p/\partial y) &= 0; \\ Z - (1/\rho)(\partial p/\partial z) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

**Задача 2.1.** Получите уравнение равновесия в векторной форме. Ответ  $\vec{J} = -(1/\rho) \text{grad } p$ .

Умножим уравнения (2.1) на  $dx, dy, dz$  соответственно, сложим и учитывая, что  $(\partial p/\partial x)dx + (\partial p/\partial y)dy + (\partial p/\partial z)dz = dp$ , т. е. представляет собой полный дифференциал давления  $p(x, y, z)$ , получим эквивалентное уравнение равновесия, не содержащее частных производных:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2.2)$$

Правая часть (2.2) как и левая является полным дифференциалом некоторой функции координат. Если  $\rho = \text{const}$ , то  $Xdx + Ydy + Zdz = dU$  и

$$dp = \rho dU. \quad (2.3)$$

Здесь  $U(x, y, z)$  — силовая функция, частные производные которой по координатным осям в данном случае равны соответствующим проекциям на оси напряжения массовой силы

$$\partial U/\partial x = X; \quad \partial U/\partial y = Y; \quad \partial U/\partial z = Z. \quad (2.4)$$

Сила, удовлетворяющая условиям (2.3) и (2.4), имеет потенциал. Итак, равновесие жидкости возможно только лишь под действием массовых сил, имеющих потенциал.

## 2.2. УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ УРОВНЯ

Дифференциальное уравнение поверхности уровня получим, используя условие  $p = \text{const}$ , т. е. подставив  $dp = 0$  в уравнения (2.2) и (2.3):

$$\left. \begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = 0, \\ \text{и } dU = 0; \quad U = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Для поверхности уровня, проходящей через точки  $x_1; y_1; z_1$ , уравнение (2.5) примет вид

$$X(x - x_1) + Y(y - y_1) + Z(z - z_1) = 0. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.3) следует, что для неоднородной по плотности жидкости ее плотность должна зависеть от силовой функции  $\rho = \varphi(U)$  и уравнение равновесия (2.3) примет вид:

$$dp = \varphi(U) dU = d[\varphi(U)]. \quad (2.7)$$

Интегрируя (2.7), получим

$$p = \varphi(U) + C. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.5) и (2.8) показывают, что на поверхности уровня постоянно не только давление, но и силовая функция и плотность. Неоднородная капельная жидкость при равновесии располагается слоями одинаковой плотности: большим значениям плотности соответствуют большие давления. Это свойство используется для разделения неоднородных по плотности жидких смесей в центрифугах и отстойниках.

Дифференциальное уравнение поверхности уровня (2.5) является, кроме того, условием перпендикулярности двух векторов — напряжения массовой силы  $\vec{j} = Xi + Yj + Zk$  и вектора  $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ , располагающегося произвольно на поверхности уровня. Отсюда следует, что поверхность уровня всегда нормальна к напряжению суммарной массовой силы, действующей на жидкость при равновесии (см. рис. 2.1).

## 2.3. АБСОЛЮТНОЕ РАВНОВЕСИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. ЗАКОН ПАСКАЛЯ

Определим гидростатическое давление  $p$  в произвольной точке  $A(x, y, z)$  в капельной жидкости  $\rho = \text{const}$  при ее абсолютном рав-

новесии относительно сосуда небольшого размера \*, если давление на свободной поверхности  $p_0$  (см. рис. 2.1, а).

Выберем на произвольной высоте *горизонтальную плоскость сравнения (нивелирную плоскость) хору*, от которой вверх по радиусу земли будем отсчитывать координаты  $z$ . В данном случае в каждой точке жидкости из массовых сил действует только напряжение силы тяжести с проекциями  $X=Y=0$  и  $Z=-g$  и дифференциальное уравнение равновесия (2.2) принимает вид

$$dp = -\rho g dz. \quad (2.9)$$

**Задача 2.2.** Опишите физический смысл уравнения (2.9).

Проинтегрируем (2.9), найдем  $p = -\rho g z + c$ . Постоянную  $c$  определим из граничных условий:  $z = z_0$ ,  $p = p_0$  и  $c = p_0 + \rho g z_0$ . Учтем, что  $z_0 - z$  есть глубина погружения  $h$  точки  $A$  и получим *основное уравнение гидростатики для несжимаемой жидкости*

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + \rho g (z_0 - z) = p_0 + \rho g h, \\ p/\rho g + z &= p_0/\rho g + z_0 = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

где  $\rho g z$  — давление столба жидкости высотой  $z$  при плотности  $\rho$  на основании площадью в квадратный метр, Па;  $z$  — геометрическая или нивелирная высота, м;  $p + \rho g z$  — гидростатическое давление, Па;  $(p/\rho g) + z$  — гидростатическая высота, м.

**Задача 2.3.** Запишите уравнение (2.10) так, чтобы его члены выражали удельную энергию жидкости (Дж/кг). Разберите энергетический смысл уравнения (2.10). Приведите примеры практического использования этой энергии жидкости.

**Вопрос 2.4.** Как изменятся гидростатический напор и давление в точке  $A$ , если нивелирную плоскость опустить на 5 м? Почему положение нивелирной плоскости можно выбирать произвольно?

Уравнение (2.10) позволяет сделать следующие выводы.

1. Давление  $p$  в любой точке покоящейся жидкости складывается из давления на свободную поверхность  $p_0$  и давления  $\rho g h$  столба вышележащей жидкости. Этот вывод представляет содержание первого основного закона гидростатики — *закона Паскаля: давление, приложенное к покоящейся жидкости, передается во все ее точки одинаково.*

2. Давление в жидкости при  $\rho = \text{const}$  с увеличением глубины погружения  $h = z_0 - z$  возрастает линейно и тем быстрее, чем больше плотность жидкости (см. рис. 2.1, а).

3. Поверхности уровня ( $p = \text{const}$ ) параллельны свободной поверхности  $z_0 = \text{const}$ .

**Задача 2.5.** Докажите, что усилие пресса  $R = 10^3 R_1$  (рис. 2.3).

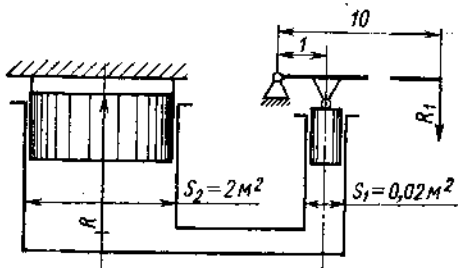


Рис. 2.3. Схема гидравлического пресса

\* В этом случае ускорение силы тяжести постоянно для всего пространства, занятого жидкостью ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ), и силы тяжести имеют потенциал.

Задача 2.6. Определите давления абсолютное, избыточное и вакуум, если показания пьезометров с № 1 по № 6 равны 0,4; 0,55; 0,25; 0,05; 0,2; 0,1 м ртутного столба (рис. 2.4) соответственно.

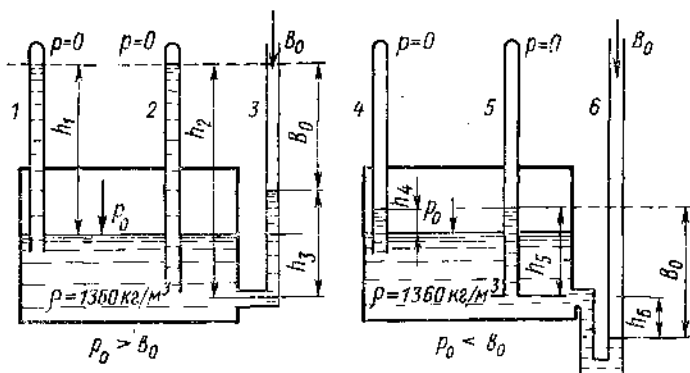


Рис. 2.4. Измерение давления

		Абсолютное давление						
		$B_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$
Ответ $p \cdot 10^{-4}$ Па	4		5,33	7,33	7,33	0,67	2,67	2,67
		Избыточное давление			Вакуум			
	—		1,33	3,33	3,33	3,33	1,33	1,33

## 2.4. СИЛА ДАВЛЕНИЯ НА ПЛОСКУЮ СТЕНКУ

Определим силу  $R$  давления капельной жидкости на площадь  $S$  плоской стенки, расположенной под углом  $\alpha$  к свободной поверхности (рис. 2.5). Ось  $x$  совместим с линией пересечения свободной поверхности и стенки. Для того, чтобы на чертеже изобразить площадь  $S$  в двух проекциях, ось  $x$  и стенка повернуты около оси  $y$  на  $90^\circ$ . Обозначим центр тяжести площади  $S$  буквой  $C$ , центр давления или точку приложения равнодействующей сил давления —  $D$ , площадь произвольной элементарной площадки —  $dS$ . В соответствии с уравнением (2.10) сила давления на элементарную площадку равна  $dR = pdS = (p_0 + \rho gh)dS$ , где  $h = y \sin \alpha$  — глубина погружения  $dS$ . Сила  $R$  давления на площадь  $S$  получим в результате интегрирования  $R = \int_S dR = p_0 S + \rho g \sin \alpha \int_S y dS$ . Учтем, что  $\int_S y dS$  есть статический момент площади  $S$  относительно оси  $ox$ , равный произведению площади  $S$  на координату центра тяжести  $y_C$ , тогда

$$R = p_0 S + \rho g y_C \sin \alpha S = p_0 S + \rho g h_C S = p_C S, \quad (2.11)$$

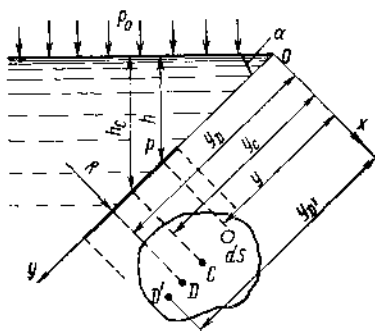


Рис. 2.5. Определение силы давления жидкости на плоскую площадку

где  $p_c = p_0 + \rho g h_c$  — давление жидкости в центре тяжести площади  $S$ . Сила  $R$  складывается из силы  $p_0 S$ , равномерно распределенной по площади, с равнодействующей в центре тяжести, и силы избыточного давления  $R_{изб} = \rho g h_c S$ , неравномерно распределенной, с равнодействующей в точке  $D'$ , расположенной всегда ниже точек  $C$  и  $D$ . Сила  $R$  не зависит ни от угла наклона стенки  $\alpha$ , ни от формы сосуда, содержащего жидкость. Составив уравнения моментов сил относительно оси  $ox$ , можно получить формулы для расчета ординат точек  $D'$  и  $D$

$$y_{D'} = y_C + J_C / y_C S \quad (2.12)$$

$$y_D = (R_{изб} y_{D'} + p_0 S y_C) / R, \quad (2.13)$$

где  $J_C$  — момент инерции площади  $S$  относительно оси, проходящей через центр тяжести параллельно оси  $ox$ . Для определения  $x_{D'}$  и  $x_D$  необходимо составить уравнение моментов относительно оси  $y$ .

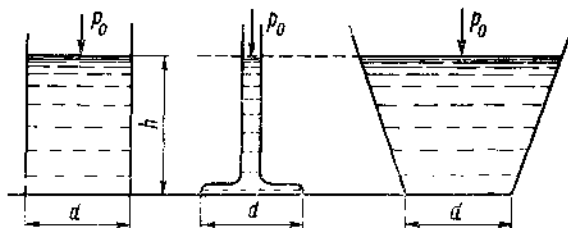


Рис. 2.6. Иллюстрация гидростатического парадокса

**Задача 2.7.** Докажите, что силы давления жидкости одинаковой плотности на днища трех сосудов одинаковы (рис. 2.6).

## 2.5. ЗАКОН АРХИМЕДА

В покоящейся жидкости мысленно выделим произвольный объем жидкости  $V$ . Он находится в равновесии, следовательно, поддерживающая его сила равна и противоположна силе тяжести  $\vec{R}_п = -\vec{R}_т = -\rho_{ж} g \vec{V}$ . Очевидно, что любое тело того же объема будет испытывать со стороны жидкости ту же поддерживающую силу. Это рассуждение доказывает закон Архимеда — тело, погруженное в жидкость, испытывает поддерживающую силу, равную силе тяжести вытесненной им жидкости (рис. 2.7).

Равнодействующая  $R$  сил, приложенных к телу, равна разности этих сил

$$R = R_{\text{п}} - R_{\text{т}} = gV(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}). \quad (2.14)$$

**Задача 2.8.** Укажите условия, при которых тело, погруженное в жидкость, будет всплывать, тонуть и находиться в равновесии.

**Задача 2.9.** Укажите причину возникновения поддерживающей силы.

**Задача 2.10.** Определите поддерживающую силу куба  $V=1 \text{ м}^3$ ,  $\rho_{\text{т}}=500 \text{ кг/м}^3$ , одной гранью плотно прилегающего ко дну водоема глубиной  $h=6 \text{ м}$  при  $B_0=101330 \text{ Па}$ . Не представляет ли этот пример опровержение закона Архимеда? Ответ. Жидкость прижимает куб ко дну с силой  $150330 \text{ Н}$ .

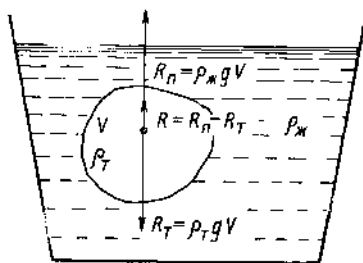


Рис. 2.7. Равновесие тела, погруженного в жидкость

## 2.6. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ РАВНОУСКОРЕННОМ ДВИЖЕНИИ СОСУДА

Пусть оси координат скользят вместе с сосудом по наклонной плоскости с ускорением  $a$  (см. рис. 2.1,б). Напряжение массовой силы в данном случае складывается из напряжений силы тяжести ( $-g$ ) и силы инерции от ускорения в переносном движении  $a_{\text{п}}$ , направленной в сторону противоположную ускорению  $a$ . Из рис. 2.1,б следует, что  $X = j_x = a_{\text{п}x}$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = j_z = a_{\text{п}z} - g$ . Подставляя эти значения в уравнение (2.2) и интегрируя, найдем

$$p = \rho(a_{\text{п}x}x + a_{\text{п}z}z - gz) + C.$$

В соответствии с граничными условиями для произвольной точки свободной поверхности  $x = x_0$ ;  $y = y_0$ ;  $z = z_0$ ;  $p = p_0$  найдем  $C = p_0 - \rho \times (a_{\text{п}x}x_0 + a_{\text{п}z}z_0 - gz_0)$  уравнение для определения давления в произвольной точке  $x$ ,  $y$ ,  $z$  примет вид

$$p = p_0 + \rho[a_{\text{п}x}(x - x_0) + a_{\text{п}z}(z - z_0) - g(z - z_0)]. \quad (2.15)$$

Свободная поверхность перпендикулярна напряжению суммарной массовой силы и угол наклона ее к горизонту определяется из (2.15) при  $p = p_0$

$$\text{tg } \alpha = \frac{z - z_0}{x - x_0} = -\frac{a_{\text{п}x}}{a_{\text{п}z} - g} = -\frac{X}{Z}. \quad (2.16)$$

**Задача 2.11.** Докажите, что при ускорении ракеты  $a=0$  давление керосина перед насосом (рис. 2.8)  $p=1,24 \cdot 10^5$ ; при  $a=10g$   $p=3,65 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Сохранится ли равновесие керосина при переменной величине вертикального ускорения?

**Задача 2.12.** Докажите, что при горизонтальном полете самолета с ускорением  $a=-0,5g$  (рис. 2.9) давление керосина перед насосом  $p_1=10^5$ , у стенки  $p_2=1,16 \cdot 10^5 \text{ Па}$  и угол  $\alpha=26^\circ 30'$ . Сохранится ли равновесие керосина при переменной величине горизонтального ускорения?

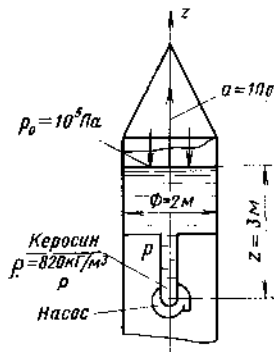


Рис. 2.8. Иллюстрация к задаче 2.11

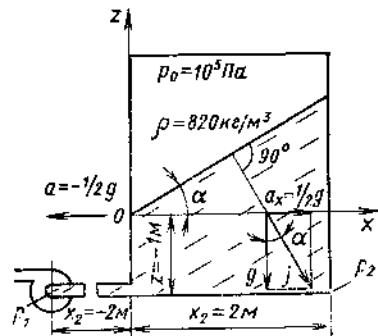


Рис. 2.9. Иллюстрация к задаче 2.12

## 2.7. РАВНОВЕСИЕ КАПЕЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СОСУДЕ

Равновесие жидкости реализуется лишь при постоянной угловой скорости вращения  $\omega = \text{const}$  (см. рис. 2.1, в). В этом случае напряжение суммарной массовой силы складывается из напряжения силы тяжести ( $-g$ ) и центробежной силы  $a_{\text{ц}} = \omega^2 r$ , направленной противоположно центростремительному ускорению ( $-a$ ), т. е.  $\vec{J} = \vec{a}_{\text{ц}} + \vec{g}$ . В силу симметрии этот случай можно рассматривать как плоский:  $X = a_{\text{ц}} = \omega^2 r$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = -g$ . Подставляя эти значения в уравнение (2.2) и интегрируя, получим  $p = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z + C$ . Используя граничные условия  $r = 0$ ,  $z = z_0$ ,  $p = p_0$  найдем  $C = p_0 + \rho g z_0$  и формулу для расчета давления жидкости в произвольной точке  $(r, z)$

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) + \rho \omega^2 r^2 / 2. \quad (2.17)$$

Уравнение свободной поверхности получим, приняв в (2.17)  $p = p_0$ :

$$z = z_0 + \omega^2 r^2 / 2g. \quad (2.18)$$

Это уравнение параболы. Следовательно свободная поверхность — параболоид вращения.

## 2.8. РАВНОВЕСИЕ ГАЗОВ. МЕЖДУНАРОДНАЯ СТАНДАРТНАЯ АТМОСФЕРА

В пространстве, занятом газом, могут изменяться давление, плотность и температура. Поэтому интегрирование дифференциального уравнения равновесия (2.2) возможно только при использовании уравнений состояния  $p = R_0 T$  и поля температур  $T = T(x, y, z)$ . Параметры воздуха и других газов в окружающей среде изменяются не только в зависимости от высоты над уровнем океана, но и от времени года, географической широты и погоды. Между



тем мощность различных тепловых двигателей, тяга реактивных двигателей, характеристики летательных аппаратов и т. д. существенно зависят от состава и параметров окружающего воздуха. Для того, чтобы обеспечить возможность сравнения характеристик двигателей (летательных аппаратов), испытанных при различных атмосферных условиях, а также возможность сопоставления их характеристик с расчетными, была принята Международная стандартная атмосфера (МСА) — единый условный закон изменения давления, температуры и плотности воздуха по высоте, отсчитываемой от уровня океана (приложение 1).

При всех расчетах атмосферные условия принимаются соответствующими МСА. Все экспериментальные характеристики двигателей, летательных аппаратов и агрегатов, полученные при различных атмосферных условиях, приводятся к условиям МСА, т. е. пересчитываются по формулам приведения так, что характеристики становятся такими, какими бы они были при испытании данного объекта при стандартных условиях. Только после этого имеет смысл сравнение характеристик объектов с расчетными и между собой.

На уровне океана в МСА приняты так называемые нормальные атмосферные условия:  $H=0$ ,  $p_0=101330$  Па = 760 мм рт. ст.,  $T_0=288,2$  К,  $\rho \approx 1,23$  кг/м<sup>3</sup>.

Атмосферу условно принято делить по высоте на следующие зоны в зависимости от осредненного состава газа и закона изменения температуры по высоте:

- 1) тропосфера  $H=0 \dots 11$  км,  $T=T_0-6,5 \cdot H$ , К;
- 2) стратосфера  $H=11 \dots 25$  км,  $T \approx 216,7$  К = const;
- 3) химосфера  $H=25 \dots 80$  км (изменение  $T$  см. приложение 1). До высоты 80 км состав воздуха изменяется незначительно;
- 4) ионосфера  $H=80 \dots 400$  км,  $T \approx 185+7H$ . Содержит ионизированный электропроводящий газ;
- 5) мезосфера  $H=400 \dots 1000$  км,  $T \approx 1800$  К = const содержит ионизированный газ с преобладанием в верхних слоях ионов гелия и водорода;
- 6) экзосфера  $H > 1000$  км — зона переходная к космическому пространству. Как уже указывалось, верхние слои атмосферы уже нельзя считать сплошной средой.

При расчете МСА начало координат располагается на уровне мирового океана ( $H=0$ ). Ось  $z$  заменяется осью высот  $H$ , которая направляется вверх. При равновесии в атмосфере действует только сила тяжести, следовательно,  $X=Y=0$ ;  $Z=-g$  и дифференциальное уравнение (2.2) принимает вид

$$dp + \rho g dH = 0. \quad (2.19)$$

Для тропосферы  $T=T_0-\beta H$  и  $\rho = \rho_0 p T_0 / p_0 T = \rho_0 p / [p_0 (1 - \beta H / T_0)]$ . Подставляя значение  $\rho$  в (2.19) и интегрируя, получаем формулы

Беркенса для расчета давления и плотности участков МСА с линейным распределением температур

$$\left. \begin{aligned} p/p_0 &= (1 - \beta H/T_0)^{T_0 Q_0 g / \beta p_0}; \\ Q/Q_0 &= (1 - \beta H/T_0)^{(T_0 Q_0 g / \beta p_0) - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Для участков атмосферы с  $T = \text{const}$  —  $Q/Q_0 = p/p_0$  и интегрирование уравнения (2.19) приводит к формуле Галлея

$$p/p_0 = Q/Q_0 = e^{-Q_0 g H / p_0}. \quad (2.21)$$

Если в задаче задается высота  $H$ , то этим по МСА однозначно задаются параметры воздуха  $p$ ,  $Q$ ,  $T$ . Если же задаются давление или плотность воздуха, то из МСА однозначно определяются соответствующие высота  $H$  и остальные параметры воздуха.

**Задача 2.13.** Определить подъемную силу  $R_y$  дирижабля объемом  $V = 500 \text{ м}^3$  на высоте  $H = 0$  и  $H = 10 \text{ км}$  при заполнении его гелием и водородом при  $p = 10^5 \text{ Па}$ ;  $T = 290 \text{ К}$ . Силой тяжести конструкции дирижабля пренебречь. Ответ: Для гелия  $R_{y_0} = 5200$ ;  $R_{y_{10}} = 1220 \text{ Н}$ . Для водорода  $R_{y_0} = 5617$ ;  $R_{y_{10}} = 1620 \text{ Н}$ .

**Задача 2.14.** Какова будет подъемная сила этого дирижабля на Луне? Ответ: На Луне нет атмосферы и  $g_{\text{л}} = -9,81/6 \text{ м/с}^2$ . Поэтому на дирижабль будет действовать не подъемная сила, а сила тяжести.

При заполнении гелием  $R = -135 \text{ Н}$ , при заполнении водородом  $R = -67,5 \text{ Н}$ .

Движение твердого тела может быть определено, если в любой момент времени известны вектора скорости трех его точек, не лежащих на одной прямой.

Движение жидкости определяется только в том случае, если в любой момент времени известны вектора скоростей всех ее частиц в рассматриваемом пространстве, т. е. если известно пространственно-временное поле скоростей. Определение этого поля и является предметом кинематики жидкости.

Вопрос 3.1. Чем объясняется такая существенная разница в определении движения твердого тела и жидкости?

### 3.1. МЕТОДЫ ЛАГРАНЖА И ЭЙЛЕРА ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

В методе Лагранжа изучается движение каждой отдельной жидкой частицы или жидкого объема (см. п. 1.3). Каждая частица в начальный момент времени  $t_0$  помечается ее координатами  $x_0, y_0, z_0$  или  $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ . Движение считается определенным, если для каждой частицы известны уравнения, описывающие ее путь во времени, т. е. параметрические уравнения траекторий всех частиц в векторной или координатной форме

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(\vec{r}_0, t); \\ x &= x(x_0, y_0, z_0, t); \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t); \\ z &= z(x_0, y_0, z_0, t), \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где  $\vec{r}$ ;  $x, y, z$  — текущие радиус-вектор и координаты помеченной частицы;  $\vec{r}_0, x_0, y_0, z_0, t$  — переменные Лагранжа.

Векторы скорости  $\vec{W}$  и ускорения  $\vec{J}$  частиц и их проекции на оси координат в любой точке траектории определяются как соответствующие производные по времени

$$\left. \begin{aligned} \vec{W} &= d\vec{r}/dt; \quad u = dx/dt; \quad v = dy/dt; \quad w = dz/dt; \\ \vec{J} &= d\vec{W}/dt = d^2\vec{r}/dt^2, \quad J_x = du/dt = d^2x/dt^2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Задача 3.2. Напишите выражения для проекций скорости  $v$  и  $w$  и ускорений  $J_y$  и  $J_z$ .

Обычно в гидрогазодинамических исследованиях требуется определить значения параметров потока в заданных точках пространства, а не судьбы помеченных частиц.

Метод Эйлера. В методе Эйлера изучается изменение скорости жидкости и других параметров, исходящее во времени в точках  $x, y, z$  контрольного объема. Движение жидкости считается определенным, если известно пространственно-временное поле скоростей в векторной или координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \vec{W} &= \vec{W}(\vec{r}, t); \quad W = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ u &= u(x, y, z, t); \quad v = v(x, y, z, t); \\ w &= w(x, y, z, t), \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где  $\vec{r}, x, y, z, t$  — переменные Эйлера.

Строго говоря, все реальные течения жидкостей являются пространственными и неустановившимися, т. е. течениями, в которых параметры жидкости зависят от всех трех пространственных координат и от времени и описываются уравнениями (0.1). Расчеты таких течений чрезвычайно сложны. Однако, многие практически важные течения, с достаточной для практики точностью, могут быть представлены и рассчитаны в виде следующих упрощенных моделей.

1. Установившееся или стационарное течение. Это течение, в котором параметры жидкости в каждой точке поля не изменяются во времени. В этом случае время исключается из числа независимых переменных и уравнения полей упрощаются

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z); \\ p &= p(x, y, z); \quad q = q(x, y, z); \quad T = T(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

2. Плоское (двухмерное) течение. Это течение, в котором частицы жидкости движутся параллельно некоторой фиксированной плоскости, например  $хоу$ , причем во всех плоскостях, параллельных этой плоскости, течение одинаково. Параметры жидкости не изменяются вдоль оси  $z$ , перпендикулярной этой плоскости.

Задача 3.3. Запишите уравнения полей параметров для плоского неустановившегося и установившегося течений.

3. Одномерное течение — течение, в котором параметры жидкости зависят от одной пространственной координаты, например  $x$ . Уравнения полей для одномерного установившегося течения имеют наиболее простой вид

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x); \\ p &= p(x); \quad q = q(x); \quad T = T(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Заметим, что газодинамический расчет сложного пространственного неустановившегося течения в ТРДФ (см. рис. 0.1) на практике производится с использованием модели установившегося одномерного течения.

В общем случае движения (3.3) скорость является функцией четырех независимых переменных, поэтому ускорение и его компо-

ненты определяются как полные или субстанциональные производные по времени.

Запишем выражение полной производной в виде оператора, применимого к любому параметру:

$$\frac{d...}{dt} = \frac{\partial...}{\partial t} + u \frac{\partial...}{\partial x} + v \frac{\partial...}{\partial y} + w \frac{\partial...}{\partial z} = \frac{\partial...}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla})... \quad (3.6)$$

Тогда выражение для ускорения жидкой частицы будет

$$\vec{J} = \frac{d\vec{W}}{dt} = \frac{\partial\vec{W}}{\partial t} + u \frac{\partial\vec{W}}{\partial x} + v \frac{\partial\vec{W}}{\partial y} + w \frac{\partial\vec{W}}{\partial z} = \frac{\partial\vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) \vec{W}, \quad (3.7)$$

а для его проекции на ось  $x$

$$J_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) u, \quad (3.8)$$

где  $\partial\vec{W}/\partial t$  — местная или локальная составляющая полной производной — характеризует изменение скорости в данной точке пространства во времени. При неустановившемся течении  $\partial\vec{W}/\partial t$  отлична от нуля, за исключением особых моментов, когда параметр во времени проходит через максимум или минимум. При установившемся течении  $(\partial\vec{W}/\partial t) = 0$ ;

$u \frac{\partial...}{\partial x} + v \frac{\partial...}{\partial y} + w \frac{\partial...}{\partial z} = (\vec{W} \cdot \vec{\nabla})...$  — оператор конвективной составляющей. Конвективная составляющая характеризует изменение параметра в пространстве в данный момент времени. Может отличаться от нуля как для нестационарного, так и для стационарного течения

$$\vec{\Delta} = \frac{\partial...}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial...}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial...}{\partial z} \vec{k} \text{ — оператор Гамильтона.}$$

Задача 3.4. Запишите выражение для  $J_y$  и  $J_z$ .

Линия тока. Это линия в пространстве, в каждой точке которой, в данный момент времени, вектора скорости частиц касательны (рис. 3.1,а). Из условия параллельности вектора скорости  $\vec{W}$  и вектора элемента линии тока  $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  следует, что

$$\vec{W} d\vec{l} = (w dy - v dz) \vec{i} + (u dz - w dx) \vec{j} + (v dx - u dy) \vec{k} = 0.$$

Из условия равенства нулю проекций этого нуль-вектора получим дифференциальное уравнение линии тока

$$dx/u = dy/v = dz/w. \quad (3.9)$$

Для построения линии тока, проходящей через точку  $A_1$  (рис. 3.1,б), следует отложить соответствующие одному и тому же моменту времени вектор скорости  $\vec{W}_1$  частицы  $A_1$ , вектор  $\vec{W}_2$  частицы  $A_2$ , находящейся на векторе  $\vec{W}_1$  вблизи  $A_1$  и т. д. Уменьшая длину отрезков полученной ломаной линии и увеличивая их число до бесконечности, получим в пределе линию тока. В установившемся

течении положение линий тока в пространстве не изменяется и они совпадают с траекториями частиц. В неустановившемся течении положение линий тока может непрерывно изменяться и не совпадать с траекториями.

Элементарная струйка. Трубка тока. В движущейся жидкости выделим элементарную площадку  $dS$  (рис. 3.1, б). Через все точки площадки проведем линии тока. Полученный объемный пучок линий тока называется элементарной стружкой, а его боковая поверхность — трубкой тока.

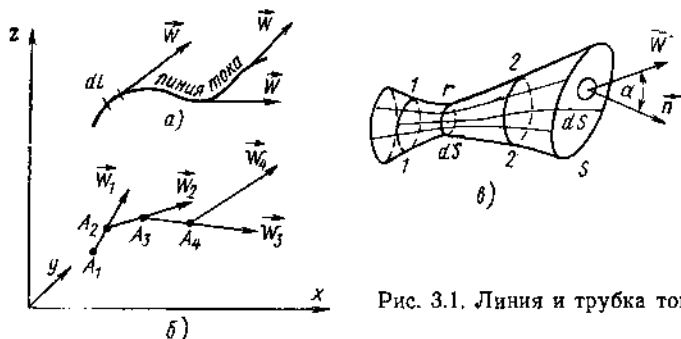


Рис. 3.1. Линия и трубка тока

**Задача 3.5.** Докажите, что поверхность трубки тока удовлетворяет условию непротекания, т. е. непроницаема для жидкости.

Параметры жидкости могут изменяться только вдоль оси элементарной струйки и не изменяются поперек струйки. Последнее объясняется тем, что сечения элементарной струйки могут быть выбраны столь малыми, что изменением параметров в них всегда можно пренебречь. Однако, при этом, поперечные градиенты скорости  $\partial \vec{W} / \partial r$ , температуры  $\partial T / \partial r$  и концентрации избыточного компонента  $\partial c / \partial r$  могут иметь любые конечные значения, т. е. в элементарной стружке может иметь место трение, теплопроводность и диффузия. Совокупность элементарных струек называется потоком жидкости.

### 3.2. РАСХОД ЖИДКОСТИ. СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ

Объемным расходом жидкости  $Q$ , м<sup>3</sup>/с называется объем жидкости, протекающий через данную поверхность в секунду. Из курса векторного анализа следует, что объемный расход через произвольную поверхность  $S$  (см. рис. 3.1, б) равен потоку вектора скорости

$$Q = \int_S (\vec{W} \cdot \vec{n}) dS = \int_S W \cos \alpha dS = \int_S (u dy dz + v dx dz + w dx dy), \quad (3.10)$$

где  $\alpha$  — угол между вектором скорости  $\vec{W}$  и ортом внешней нормали  $\vec{n}$  к элементарной площадке  $dS$ .

Живым сечением  $S_{ж}$  называется сечение потока, каждая элементарная площадка которого нормальна к соответствующему вектору скорости. В этом случае (3.10) упрощается

$$Q = \int_{S_{ж}} W dS. \quad (3.11)$$

Массовым расходом жидкости  $G$ , кг/с называется масса жидкости, протекающая через данное сечение в секунду. Если плотность в различных точках поверхности одинакова, то массовый расход равен объемному, умноженному на плотность:

$$G = Q\rho. \quad (3.12)$$

Поперечным сечением потока называется сечение площадью  $S$ , перпендикулярное оси потока.

Среднерасходной скоростью  $W_{ср}$  называется постоянная для всего поперечного сечения потока скорость, при которой расход равен действительному, т. е.

$$G = \rho \int_S W \cos \alpha dS = \rho W_{ср} S. \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) является определяющим для среднерасходной скорости

$$W_{ср} = G/\rho S = Q/S = (1/S) \int_S W \cos \alpha dS. \quad (3.14)$$

В элементарной струйке скорость  $W$  в поперечном сечении постоянна, т. е. равна среднерасходной, и, если угол между линиями тока невелик, так, что  $\cos \alpha \approx 1$ , то расход рассчитывается по формуле  $G = \rho W S$ .

Вектор  $\rho \vec{W} = |G/S|$ , кг/(м<sup>2</sup>·с) называется плотностью тока и равен массе жидкости, протекающей через квадратный метр сечения в секунду.

Задача 3.6. На основании рис. 3.1,а и формулы (3.13) сделайте заключение об изменении плотности тока сжимаемой и несжимаемой жидкости в зависимости от площади сечения канала при  $\frac{\partial \dots}{\partial t} = 0$ .

### 3.3. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Уравнение неразрывности (сплошности) выражает закон сохранения массы при учете сплошности движущейся жидкости и является одним из основных в гидрогазодинамике.

Для жидкого объема закон утверждает неизменность его массы во времени ( $dm/dt = 0$ ).

Для контрольного объема  $V$  с замкнутой контрольной поверхностью  $S$  (рис. 3.2), через который протекает жидкость, заключаем, что разность между массой жидкости, вытекающей из объема и втекающей в него, равна изменению массы жидкости в нем. В неизменном контрольном объеме изменение массы может произойти

только за счет изменения плотности жидкости при неустановившемся течении, т. е.

$$\oint_S \vec{n} \cdot (\rho \vec{W}) dS = - \int_V (\partial \rho / \partial t) dV. \quad (3.15)$$

Формула Остроградского — Гаусса для произвольного вектора  $\vec{a}$

$$\oint_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_V \left[ \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right] dV \quad (3.16)$$

позволяет заменить в (3.15) интеграл по поверхности интегралом по объему и получить

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{W}) \right] dV = 0. \quad (3.17)$$

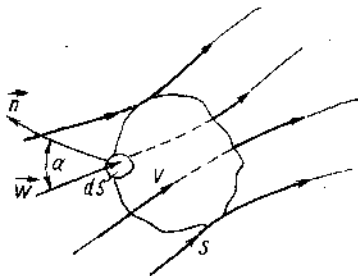


Рис. 3.2. Контрольный объем

Приравняв подинтегральную функцию (3.17) нулю, так как она непрерывна, а интеграл по произвольному объему равен нулю, получим дифференциальное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \operatorname{div}(\rho \vec{W}) = - \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]. \quad (3.18)$$

Дивергенция (расхождение) вектора плотности тока  $[\operatorname{div}(\rho \vec{W})]$  представляет разность между массой жидкости, вытекающей из элементарного контрольного объема и втекающей в него, отнесенную к единице времени и объема. Она равна локальной производной от плотности.

Задача 3.7. Определите размерность  $\operatorname{div}(\rho \vec{W})$ .

Задача 3.8. Объясните значение знака минус в (3.18).

Задача 3.9. Используя (3.18) и (3.8) получите дифференциальное уравнение неразрывности в форме  $\dot{\rho} / \rho = - \operatorname{div}(\vec{W})$ .

Задача 3.10. Получите уравнение (3.16), рассмотрев протекание жидкости через элементарный контрольный объем с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Для различных течений уравнение неразрывности принимает следующие формы:

для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$ ,  $d\rho/dt = 0$ ,

$$\operatorname{div}(\vec{W}) = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0 \quad (3.19)$$

для установившегося течения  $\partial \rho / \partial t = 0$  и

$$\operatorname{div}(\rho \vec{W}) = \partial(\rho u) / \partial x + \partial(\rho v) / \partial y + \partial(\rho w) / \partial z = 0, \quad (3.20)$$

т. е. расходы жидкости, вытекающей из контрольного объема  $G_2$  и втекающей в него  $G_1$ , равны. Следовательно, при установившемся течении в канале расход жидкости через любое поперечное се-



чение 1—1, 2—2, ... i—i одинаков и с учетом (3.13) можно записать:

$$G_1 = G_2 = G_i = \rho_1 W_{1cp} S_1 = \rho_2 W_{2cp} S_2 = \rho_i W_{icp} S_i = \text{const.}$$

Для элементарной струйки при установившемся течении и  $W_{icp} = W_i$

$$G_1 = G_2 = G_i = \rho_i W_i S_i = \rho_2 W_2 S_2 = \rho_i W_i S_i = \text{const.} \quad (3.21)$$

Для несжимаемой жидкости не только массовый расход во всех сечениях одинаков, но и объемный расход

$$Q_1 = Q_2 = Q_i = W_1 S_1 = W_2 S_2 = W_i S_i. \quad (3.22)$$

**Задача 3.11.** Укажите, чем определяется изменение скорости течения в канале для несжимаемой и сжимаемой жидкости?

**Сопла и диффузоры.** Каналы, в которых жидкость ускоряется ( $W_2 > W_1$ ), называются соплами или конфузорами, а течения в них — конфузорными.

Каналы, в которых жидкость тормозится ( $W_2 < W_1$ ), называются диффузорами, а течения в них — диффузорными.

Для несжимаемой жидкости сопла — сужающиеся каналы ( $S_2 < S_1$ ), а диффузоры — расширяющиеся ( $S_2 > S_1$ ).

Для сжимаемой жидкости соплами могут служить и сужающиеся и расширяющиеся каналы, в зависимости от условий течения; то же самое относится и к диффузорам.

**Задача 3.12.** Запишите всеми возможными способами условие несжимаемости при течении.

**Задача 3.13.** Опишите свойства жидкости и характер ее движения для трех случаев: а)  $\text{div}(\vec{W}) = 0$ ; б)  $\text{div}(\rho \vec{W}) = 0$ ; в)  $\text{div}(\rho \vec{W}) = -2 \text{ кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$ .

**Задача 3.14.** Докажите, что расход воздуха через канал между двумя лопатками  $t = 0,02 \text{ м}$  высота (по нормали к чертежу)  $h = 0,05 \text{ м}$ ,  $W_1 = 300 \text{ м/с}$ ,  $\rho_1 = 6 \text{ кг/м}^3$  и  $\alpha = 30^\circ$  равен  $G = 0,9 \text{ кг/с}$  (рис. 3.3).

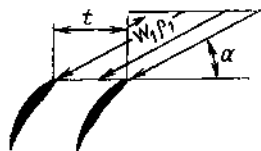


Рис. 3.3. Течение между лопатками

### 3.4. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

Для выяснения кинематических особенностей движения жидкости необходимо общее движение с «абсолютной» скоростью  $\vec{W} = W(\vec{r}, t)$  разложить на простейшие.

Как известно, скорость произвольной точки твердого тела  $\vec{W}$  всегда может быть представлена как векторная сумма скорости  $\vec{W}_0$  поступательного движения полюса O и скорости вращения  $(\omega \times \vec{r}_0)$  вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс:

$$\vec{W} = \vec{W}_0 + (\omega \times \vec{r}_0). \quad (3.23)$$

Движение жидкой частицы является более сложным и определяется следующей теоремой.

**Теорема Коши — Гельмгольца.** Скорость движения  $\vec{W}$  любой точки жидкой частицы в данное мгновение можно рассмат-

ривать как результат сложения векторов скоростей более простых движений\*:

1) скорости квазитвердого движения, представляющей сумму скорости  $\vec{W}_0$  поступательного движения вместе с произвольным полюсом  $O$ , находящимся в самой частице, и скорости вращения частицы  $(\vec{\omega} \times \vec{r}_0)$  около собственной оси, т. е. оси, проходящей через полюс  $O$  (3.23);

2) скорости  $\vec{W}_D$  деформационного движения, изменяющего форму и размеры частицы:

$$\vec{W} = \vec{W}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_0) + \vec{W}_D. \quad (3.24)$$

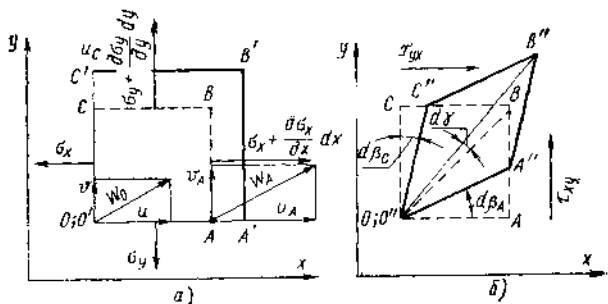


Рис. 3.4. Деформация элемента жидкости

Наличие или отсутствие деформационного и вращательного движения жидких частиц определяет качественно отличные модели движения жидкости.

На рис. 3.4 совмещены в полюсе  $O$  две проекции на плоскость  $xy$  элементарного жидкого параллелепипеда с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  в начальный момент движения  $t$  и в момент  $t + dt$  после перемещения в пространстве, деформаций и вращения. Для наглядности на рис. 3.4,а представлен результат лишь линейной деформации удлинения ребер, а на рис. 3.4,б — только деформации сдвига ребер и вращение элемента. Пусть проекции скорости полюса  $O$  в начальный момент времени  $u$  и  $v$ . Проекции скоростей точек  $A$  и  $C$  в общем случае будут

$$u_A = u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx, \quad v_A = v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx,$$

$$u_C = u + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy \quad \text{и} \quad v_C = v + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy.$$

Скорости относительной линейной деформации. Точка  $A$  движется относительно полюса  $O$  вдоль оси  $x$  со скоростью  $(\partial u / \partial x) dx$ . Это вызывает линейную деформацию удлинения или укорочения ребра  $OA$ , равную  $AA' = (\partial u / \partial x) dx dt$ . Аналогичное рассмотрение линейных деформаций вдоль осей  $y$  и  $z$  позволяет

\* Доказательство теоремы Коши—Гельмгольца, Стокса, второй теоремы Гельмгольца и теоремы Томсона можно найти в учебника по аэродинамике; см., например, Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978, 736 с.

рассчитать величины линейных деформаций, отнесенных к длине ребер, в секунду, т. е. скоростей линейных деформаций  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  вдоль соответствующих осей координат:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= AA'/dxdt = \partial u/\partial x; \quad \epsilon_y = \partial v/\partial y; \\ \epsilon_z &= \partial w/\partial z.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Объемная деформация состоит в изменении объема  $dV = dx \times dy dz$  параллелепипеда на величину  $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$  за счет удаления или сближения противоположных граней. Учтем, что  $AA' = (\partial u/\partial x) dx dt$  и подсчитаем составляющую объемной деформации за счет изменения длины ребра  $dx$  по очевидной формуле, а для ребер  $dy$  и  $dz$  — по аналогии

$$\left. \begin{aligned}\delta V_x &= AA' dy dz = (\partial u/\partial x) dV dt; \\ \delta V_y &= (\partial v/\partial y) dV dt, \quad \delta V_z = (\partial w/\partial z) dV dt.\end{aligned}\right\} \quad (3.26)$$

Скорость относительной объемной деформации  $e$  представляет изменение объема частицы, отнесенное к ее первоначальному объему и времени деформации:

$$e = \delta V/(dV dt) = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = \text{div } \vec{W} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (3.27)$$

Для несжимаемой жидкости  $e = \text{div } \vec{W} = 0$ .

Задача 3.15. В точке  $x, y, z$  потока  $\rho = \text{const}$ ,  $\partial u/\partial x = 0$ ;  $\partial w/\partial z = -1,2 \text{ с}^{-1}$ . Определите  $\partial v/\partial y$  и опишите деформацию частицы.

Задача 3.16. В точке  $x, y, z$   $\epsilon_x = 0,2$ ;  $\epsilon_y = 0,4$ ;  $\epsilon_z = 0,2$ . Определите свойства жидкости и величину объемной деформации.

Скорость относительной деформации сдвига и угол поворота частицы (рис. 3.4, б). Движение точки  $A$  параллельно оси  $y$  со скоростью  $v + (\partial v/\partial x) dx$  можно представить как движение вместе с полюсом  $O$  со скоростью  $v$  и относительно полюса со скоростью  $(\partial v/\partial x) dx$ . В результате относительного движения ребро  $OA$  за время  $dt$  повернется на бесконечно малый угол  $d\beta_A \approx \text{tg } d\beta_A = AA''/dx = (\partial v/\partial x) dx dt/dx = (\partial v/\partial x) dt$ . Аналогично ребро  $OC$  повернется на угол  $d\beta_C = CC''/dx = (\partial u/\partial y) dt$ . Общая относительная деформация сдвига частицы или деформация скашивания прямого угла  $AOC$  в  $A''O''C''$  происходит в одинаковой степени под действием тангенциального напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$  и равна  $d\beta_A + d\beta_C = (\partial v/\partial x + \partial u/\partial y) dt$ . Обозначив скорость суммарной относительной деформации сдвига, вызванной  $\tau_{xy}$ , через  $\theta_{xy} = (d\beta_C + d\beta_A)/dt$ , а вызванной  $\tau_{yx}$  — через  $\theta_{yx} = (d\beta_C + d\beta_A)/dt$ , приходим к заключению, что они равны  $\theta_{xy} = \theta_{yx}$ . Рассуждая аналогично найдем скорости относительных деформаций сдвига в плоскостях  $xz$  и  $yz$ :

$$\begin{aligned}\theta_{xy} &= \theta_{yx} = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y; \quad \theta_{xz} = \theta_{zx} = \\ &= \partial w/\partial x + \partial u/\partial z; \quad \theta_{yz} = \theta_{zy} = \partial w/\partial y + \partial v/\partial z.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Итак, получены девять скоростей относительных деформаций (3.25) и (3.28), из которых шесть тангенциальных попарно равны

$$\theta_{xy} = \theta_{yx}; \quad \theta_{xz} = \theta_{zx}; \quad \theta_{yz} = \theta_{zy}. \quad (3.29)$$

Вращение частицы около собственной оси. Определим угол  $d\gamma_z$  поворота частицы в плоскости  $xoy$  около собственной оси, проходящей через точку  $O$  параллельно оси  $z$ . Совместим (см. рис. 3.4, б) параллелограммы по диагоналям  $OB$  и  $OB''$  и запишем очевидное равенство

$$d\beta_c + d\gamma_z = d\beta_A - d\gamma_z, \quad (3.30)$$

отсюда 
$$d\gamma_z = 0,5(d\beta_A - d\beta_c) = 0,5(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) dt. \quad (3.31)$$

По аналогии для вращения около осей, параллельных осям  $x$  и  $y$ , получим

$$d\gamma_x = 0,5(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z) dt; \quad d\gamma_y = 0,5(\partial u/\partial z - \partial w/\partial x) dt. \quad (3.32)$$

### 3.5. ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Вихревым называется движение, сопровождаемое вращением частиц жидкости около собственных осей. Проекция угловой скорости вращения частицы на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  найдем как  $\omega_x = d\gamma_x/dt$ ;  $\omega_y = d\gamma_y/dt$  и  $\omega_z = d\gamma_z/dt$  в соответствии с (3.31) и (3.32)

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0,5(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y); \quad \omega_y = 0,5(\partial u/\partial z - \partial w/\partial x); \\ \omega_z &= 0,5(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Интенсивность вихревого движения частиц жидкости характеризует вектор *угловой скорости*

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}; \quad \omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad (3.34)$$

а также ротор вектора скорости или *вихрь скорости*

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{W} = \vec{\nabla} \times \vec{W} &= \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \\ &+ \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = 2\vec{\omega}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Вектор угловой скорости и ротор вектора скорости направляют перпендикулярно плоскости вращения частицы, т. е. вдоль оси вращения так, чтобы со стороны острия вращения частицы было бы направлено против часовой стрелки.

Движение, в котором отсутствует вращение частиц жидкости около собственных осей, называется *безвихревым* или *потенциальным*.

**Задача 3.17.** Используя рис. 1.5, определите величины и направление угловых скоростей вращения частиц жидкости и величины вихря скорости в сечениях  $x_1$  и  $x_2$  при  $y=0$ ; 0,5δ; 1,2δ. Укажите на рис. 1.5 области вихревого и безвихревого течений.

Ответ:  $\omega_z = 0,5 \text{ rot } \vec{u} = -(1,5 \cdot 10^3, 5,0 \cdot 10^3; 0; 7,5 \cdot 10^3; 3,1 \cdot 10^3; 0)$ .

Вихревая линия, вихревой шнур и вихревая трубка. Эти понятия используются для геометрической характеристики поля векторов угловых скоростей вращения частиц жидкости и установления связи между этими частицами. Эти понятия аналогичны понятиям «линия тока», «элементарная струйка» и

«трубка тока». Поэтому иллюстрацией к их определению может служить рис. 3.1, если на нем вектор  $\vec{W}$  мысленно заменить вектором угловой скорости  $\vec{\omega}$ .

Вихревая линия — это линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектора угловых скоростей касательны, т. е. это в общем случае пространственная криволинейная ось вращения всех частиц жидкости, находящихся на ней в данный момент. Аналогично уравнению линии тока получим уравнение вихревой линии

$$[\vec{\omega} d\vec{l}] = 0; \quad dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z. \quad (3.36)$$

Вихревой шнур представляет собой объемный пучок вихревых линий, проведенных через все точки выбранной площадки.

Вихревой трубкой называется поверхность вихревого шнура. При бесконечно малом контуре вихревая трубка называется элементарной.

Интенсивность или напряжение вихревого шнура. Интенсивность вращения твердого тела определяется величиной угловой скорости  $\vec{\omega}$ , которая постоянна для всех его точек. В потоках жидкости, в вихревых шнурах конечных размеров частицы жидкости могут вращаться с различными по величине и направлению угловыми скоростями. Поэтому интенсивность  $\Gamma$  ( $\text{м}^2/\text{с}$ ) вихревого шнура оценивается потоком вектора вихря скорости или удвоенным потоком вектора угловой скорости через площадку данного поперечного сечения его [см. (3.35)]:

$$\Gamma = \int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{W} dS = 2 \int_S \vec{n} \cdot \vec{\omega} dS. \quad (3.37)$$

Существенным недостатком рассмотренной оценки интенсивности вихревого шнура является невозможность экспериментального измерения векторов  $\vec{\omega}$  и  $\text{rot } \vec{W}$  современными приборами.

Циркуляцией скорости  $\Gamma_l$  по замкнутому контуру  $l$  в векторном поле скоростей (рис. 3.5) называется интеграл по этому контуру от скалярного произведения вектора скорости  $\vec{W}$  на соответствующий вектор элемента контура  $d\vec{l}$ :

$$\Gamma_l = \oint_l \vec{W} d\vec{l} = \oint_l W \cos \alpha dl = \oint_l (u dx + v dy + w dz), \quad (3.38)$$

здесь  $\alpha$  — угол между вектором скорости и касательной к контуру в данной точке. Для определения знака циркуляции выбирают положительное направление обхода контура, например, против часовой стрелки. Циркуляция скорости по замкнутому контуру  $l$  (см.

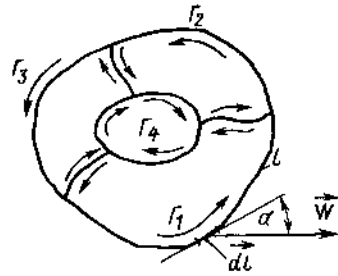


Рис. 3.5. Циркуляция скорости

рис. 3.5) равна сумме циркуляций по произвольным контурам  $l_1, l_2, l_3, \dots$  размещенным внутри контура  $l$ , т. е.  $\Gamma_l = \Gamma_{l_1} + \Gamma_{l_2} + \Gamma_{l_3} + \dots$ . Это объясняется тем, что при подсчете циркуляций для отдельных контуров, общие участки проходятся два раза с противоположными знаками, как это показано стрелками на рис. 3.5. Циркуляция скорости дает возможность оценить интенсивность вихревого шнура с помощью легко измеряемого на практике вектора скорости.

Теорема Стокса утверждает, что интенсивность вихревого шнура равна циркуляции скорости по замкнутому контуру, опоясывающему вихревую трубку один раз по ее поверхности так, что его можно стянуть в точку не выходя за пределы жидкости

$$\Gamma = \oint_l \vec{W} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{W} dS = 2 \int_S \vec{n} \operatorname{rot} S. \quad (3.39)$$

Следствия теоремы Стокса. 1. Если контур охватывает несколько вихревых трубок или областей, то циркуляция скорости по этому контуру равна алгебраической сумме циркуляций по контурам, охватывающим каждую вихревую область отдельно. 2. Если внутри рассматриваемой области течение безвихревое, то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру в этой области равна нулю. Однако, если циркуляция по некоторому замкнутому контуру равна нулю, это еще не значит, что течение безвихревое: интенсивности вихревых трубок величины алгебраические, поэтому они могут дать в сумме ноль и при вихревом движении.

**Задача 3.18.** Докажите, что вращение жидкости по закону  $ur = \text{const}$  во всей области, исключая ось вращения, является потенциальным движением (для этого достаточно доказать, что циркуляция скорости по произвольному элементарному контуру высотой  $dr$ , лежащему между радиусами, равна нулю).

**Задача 3.19.** Решите задачу 3.17, определяя циркуляцию скорости по элементарным контурам в соответствующих точках.

Теорема Томсона или закон сохранения циркуляции скорости утверждает, что если: 1) силы, действующие в жидкости имеют потенциал; 2) идеальная жидкость баротропна\*; 3) поле скоростей непрерывно, то циркуляция скорости по любому замкнутому жидкому контуру остается постоянной во все время движения жидкости

$$d\Gamma/dt = 0, \quad (3.40)$$

т. е. при выполнении условий теоремы, вихри не могут ни возник-

\* Баротропными называются жидкости, в которых плотность есть функция только одного давления  $\rho = \Phi(p)$ , например, при течении несжимаемой жидкости  $\Phi(p) = \text{const}$ , при изотермическом течении  $\Phi(p) = Cp$ , при течении, сопровождаемом политропическим процессом  $\Phi = C\rho^n$ , где  $n$  — показатель политропы. Для баротропной жидкости характерно, что термодинамический процесс во всей области течения одинаков.

Бароклинные называются жидкости, в которых плотность не является функцией только давления. Например, при местном нагревании жидкости  $\rho = \Phi(T)$ .

нуть вновь, если их не было, ни исчезнуть, если они имелись. Это следствие теоремы Томсона называется *теоремой Лагранжа*.

В действительности вихревое движение постоянно возникает и рассеивается. Но это всегда связано с нарушением какого-либо из условий теоремы Томсона. Например, водовороты за кормой корабля, вихревое движение в пограничном слое, вихри за крылом самолета возникают и рассеиваются под действием сил трения — сил, не имеющих потенциала. Вихри за ударными волнами появляются вследствие нарушения непрерывности поля скоростей. Возникновение вихрей у нагретых поверхностей объясняется нарушением баротропности.

Теорема Томсона имеет большое значение для понимания многих закономерностей практически важных течений. Большинство течений развивается из состояния покоя или равномерного и прямолинейного течения, при которых вихри отсутствуют. В первом приближении, если влияние трения не велико, в соответствии с теоремой Томсона, вихри будут отсутствовать и в дальнейшем, несмотря на то, что в большинстве случаев, частицы жидкости, например, обтекая тела, начинают двигаться по криволинейным траекториям.

Теорема Гельмгольца о сохранении вихревых линий. Если принять условие теоремы Томсона, то можно утверждать, что: 1) интенсивность вихревой трубки во все время движения остается постоянной, 2) интенсивность вихревой трубки постоянна вдоль всей ее длины, т. е. циркуляция скорости по любому контуру, охватывающему трубку, постоянна.

Если величина вихря скорости по сечениям вихревой трубки не изменяется, то основываясь на теореме Гельмгольца и формуле (3.39), получим

$$S_1 \operatorname{rot} \vec{W}_1 = S_l \operatorname{rot} \vec{W}_l = \text{const}; S_1 \omega_1 = S_l \omega_l = 0,5 \text{ const.} \quad (3.41)$$

Следствия теоремы Гельмгольца: 1) чем меньше площадь сечения вихревой трубки, тем больше интенсивность вихревой трубки. Однако, сечение вихревой трубки нигде не может быть равным нулю, так как в этом случае интенсивность вихревой трубки была бы равна бесконечности, что физически не выполнимо; 2) вихревые трубки не могут заканчиваться внутри жидкости — они либо замыкаются на себя, как кольца табачного дыма, либо опираются на свободную поверхность жидкости или твердого тела (водовороты, смерчи), или, наконец, уходят в бесконечность. Тот хорошо известный факт, что водовороты не всегда доходят до дна, а исчезают в толще жидкости, или, вихревые шнуры от крыла самолета сохраняются лишь на конечном расстоянии, а не уходят в бесконечность, объясняется влиянием вязкости, приводящей к диффузии завихренности через поверхность вихревой трубки и затуханию ее в окружающей среде.

### 3.6. БЕЗВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Единственным условием безвихревого движения является отсутствие вращения жидких частиц относительно собственных осей. При этом частицы могут двигаться по любым траекториям и деформироваться. Математическое выражение этого условия получим, положив в уравнениях (3.33)  $\omega_z = \omega_y = \omega_x = 0$  или

$$\begin{aligned} du/dy = \partial v/\partial x; \quad dv/dz = \partial w/\partial x; \\ \partial w/\partial y = \partial v/\partial z. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Потенциал скорости. На основании (3.42) заключаем, что скорость в случае безвихревого течения имеет потенциал, т. е. функцию координат  $\varphi(x, y, z)$ , частные производные которой по любому направлению  $n$  и, следовательно, по координатным осям равны соответствующим проекциям вектора скорости

$$\begin{aligned} \partial\varphi/\partial n = W_n; \quad d\varphi/dx = u; \quad \partial\varphi/\partial y = v; \\ \partial\varphi/\partial z = w. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Потенциал скорости полностью определяет поле скоростей

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2 = (\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2 \quad \text{и} \quad \text{grad } \varphi = \vec{W}.$$

Поэтому безвихревое течение жидкости называют также потенциальным. Справедливость равенств (3.43) доказывается подстановкой значений  $u, v$  и  $w$  в (3.42), в результате чего получаются тождества вида  $\partial^2\varphi/\partial y\partial x = \partial^2\varphi/\partial x\partial y$ .

Эквипотенциальные поверхности и линии. Это поверхности для пространственного и линии для плоского движения жидкости, для которых потенциал скорости имеет постоянное значение  $\varphi = C$ ,  $d\varphi = 0$ . Умножая равенства (3.43) соответственно на  $dx, dy$  и  $dz$ , складывая и приравнявая  $d\varphi$  нулю, получим уравнения эквипотенциальных поверхностей в пространстве  $x, y, z$  и линий в плоскости  $x, y$ :

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= (\partial\varphi/\partial x) dx + (\partial\varphi/\partial y) dy + (\partial\varphi/\partial z) dz = \\ &= u dx + v dy + w dz = 0; \\ d\varphi &= (\partial\varphi/\partial x) dx + (\partial\varphi/\partial y) dy = u dx + v dy = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Сопоставляя (3.44) и (3.9) заключаем, что эквипотенциальные линии и линии тока ортогональны.

Уравнение Лапласа для потенциала скорости при пространственном и плоском течении несжимаемой жидкости получим, подставляя значения  $u, v, w$  по (3.43) в уравнение неразрывности (3.19):

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\varphi &= \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0; \\ \nabla^2\varphi &= \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Определение поля скоростей для потенциального течения несжимаемой жидкости сводится к решению уравнения Лапласа (3.45). Граничным условием при обтекании твердых тел является условие непротекания, т. е. равенство нулю нормальной составляющей скорости на поверхности тела  $W_{nw} = (\partial\varphi/\partial n)_w = 0$ .



### 3.7. БЕЗВИХРЕВОЕ ПЛОСКОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Использование этой модели позволяет аналитически получить искомое поле скоростей  $\vec{W} = \vec{W}(x, y)$  для многих практически важных и сложных видов течения жидкости. Достаточно сказать, что именно эта модель была использована Н. Е. Жуковским при создании теории подъемной силы крыла.

**Функция тока.** Это функция координат  $\psi(x, y)$ , частные производные которой имеют следующий вид

$$\partial\psi/\partial x = -v; \quad \partial\psi/\partial y = u. \quad (3.46)$$

Отсюда следует, что  $W^2 = u^2 + v^2 = (\partial\psi/\partial y)^2 + (\partial\psi/\partial x)^2$  и функция тока, так же как потенциал скорости, определяет поле скоростей рассматриваемых течений и удовлетворяет уравнению неразрывности несжимаемой жидкости (3.19).

Уравнение линии тока  $\psi = \text{const}$ ,  $d\psi = 0$ . Умножая равенства (3.46) на  $dx$  и  $dy$ , складывая и приравнивая сумму нулю, получим уравнение

$$(\partial\psi/\partial y) dy + (\partial\psi/\partial x) dx = d\psi = udy - vdx = 0, \quad (3.47)$$

которое в соответствии с (3.9) представляет собой уравнение семейства линий тока, ортогональных эквипотенциальным линиям (рис. 3.6).

**Физический смысл разности двух значений функций тока  $(\psi_2 - \psi_1)$ .** Объемный расход жидкости  $dQ$  через произвольную площадку  $AB$  высотой  $\Delta Z = 1$  м, расположенную между двумя линиями тока  $\psi$  и  $\psi + \Delta\psi$  (см. рис. 3.6), есть сумма двух расходов:  $dQ = udy + (-vdx)$ . В соответствии с (3.47)

$$dQ = d\psi \quad \text{и} \quad Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1. \quad (3.48)$$

Итак, разность  $\psi_2 - \psi_1$  есть объемный расход жидкости через площадку высотой  $\Delta Z = 1$  м, расположенную между линиями тока  $\psi_1$  и  $\psi_2$ .

**Уравнение Лапласа для функции тока.** Для принятой модели течения функция тока является гармонической функцией. Используя определение функции тока (3.46) и условие потенциальности течения (3.42), получим уравнение Лапласа для функции тока

$$\nabla^2\psi = \partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = 0. \quad (3.49)$$

Интеграл этого уравнения представляет семейство линий тока  $\psi(x, y) = C$ . Конкретное значение постоянной интегрирования соответствует определенной линии тока. Граничным условием является совпадение одной из линий тока с непроницаемой для жидкости поверхностью обтекаемого твердого тела (при внешней задаче) или с поверхностью канала (при внутренней задаче). Эта линия тока  $\psi_w(x, y) = C_w$  называется *нулевой*.

Связь между потенциалом скорости  $\varphi(x, y)$  и функцией тока  $\psi(x, y)$ . Сопоставляя формулы (3.43) и (3.46), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v, \quad (3.50)$$

т. е.  $\varphi$  и  $\psi$  с точностью до произвольной постоянной однозначно связаны между собой и полностью определяют поле скоростей.

Итак, непосредственное определение поля скоростей заключается в решении уравнения Лапласа (3.45) или (3.49) для определения  $\varphi(x, y)$  или  $\psi(x, y)$ , удовлетворяющих граничным условиям данной задачи\*.

Однако в большинстве случаев это является невыполнимой задачей. Поэтому используется косвенный способ решения задач. Выбирается произвольный потенциал скорости  $\varphi(x, y)$ , который удовлетворяет уравнению Лапласа, и строится картина линий тока. Если некоторые из линий тока совпадают с твердыми поверхностями канала (при решении внутренних задач) или обтекаемого тела (при решении внешних задач), то выбранная функция удовлетворяет граничным условиям задачи и является ее решением. В этом случае поле скоростей определяется по формулам (3.43). Если же не будут найдены линии тока, совпадающие с твердыми поверхностями, то выбранная  $\varphi(x, y)$  не является решением задачи. Простое угадывание решений достаточно сложных задач не выполнимо. В этом случае используются метод наложения полей и метод конформных отображений.

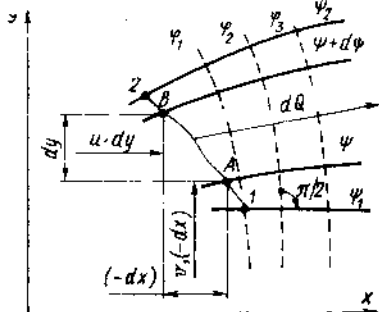


Рис. 3.6. Линии тока ( $\psi=C$ ) и эквипотенциальные линии ( $\varphi=C$ )

Если же не будут найдены линии тока, совпадающие с твердыми поверхностями, то выбранная  $\varphi(x, y)$  не является решением задачи. Простое угадывание решений достаточно сложных задач не выполнимо. В этом случае используются метод наложения полей и метод конформных отображений.

### 3.8. МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ ИЛИ СУПЕРПОЗИЦИИ ПОЛЕЙ ТЕЧЕНИЙ

В силу линейности уравнения Лапласа его решение для сложного сечения может быть получено наложением ряда простейших полей, для которых известны потенциалы скоростей  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  или функции тока  $\psi_1, \psi_2, \dots$ . Потенциал скорости  $\varphi$  и функция тока  $\psi$  синтезируемого или результирующего поля определяются алгебраическим, а вектор скорости—геометрическим суммированием исходных значений:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots; \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots; \quad \vec{W} = \vec{W}_1 + \vec{W}_2 + \dots \quad (3.51)$$

Задача 3.20. Используя уравнения Лапласа для результирующего и исходных потоков, докажите справедливость (3.51).

\* Следует иметь в виду, что функция тока  $\psi$  существует в любом неразрывном течении, а потенциал скорости  $\varphi$ —только в безвихревом.

**Примеры простейших течений.** Рассмотрим некоторые простейшие течения принятой модели [см. п. 3.7]. Поля скоростей заданы. Задача состоит в определении потенциалов скорости и функций тока с тем, чтобы в дальнейшем использовать эти течения для синтеза более сложных.

1. **Плоскопараллельный поток.** Пусть вектор скорости  $W = \text{const}$  и линии тока составляют с осью  $x$  угол  $\alpha$ . Тогда  $u =$

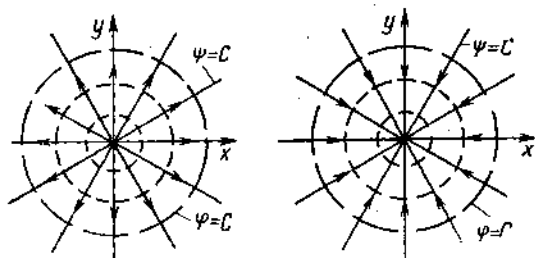


Рис. 3.7. Источник и сток

$= W \cos \alpha = \text{const}$  и  $v = W \sin \alpha = \text{const}$ . Интегрируя уравнения (3.44) и (3.47), получим выражения для потенциала скорости и функции тока

$$\varphi = ux + vy, \quad \psi = uy - vx. \quad (3.52)$$

При  $\varphi = C$  и  $\psi = C$  выражения (3.52) превращаются соответственно в уравнения эквипотенциальных линий и линий тока

$$y = C/v - (v/u)x; \quad y = (v/u)x + C/u. \quad (3.53)$$

Если поток параллелен оси  $x$ , то  $W = u$ ,  $v = 0$ , и из (3.52) соответственно получим

$$\varphi = Wx; \quad \psi = Wy; \quad x = c/W; \quad y = c_1/W. \quad (3.54)$$

**Задача 3.21.** Определить уравнения линий тока и величины векторов скорости исходных потоков № 1 и № 2 и результирующего № 3, если заданы потенциалы скорости  $\varphi_1 = 4x + 2y$  и  $\varphi_2 = -2x - 4y$ . Изобразить течения в плоскости  $xoy$ .

**Ответ.** Линии тока 1)  $y = 0,5x + c/4$ ; 2)  $y = 2x - c/2$ ; 3)  $y = -x + c/2$ ;

Скорости 1)  $u_1 = 4$ ;  $v_1 = 2$ ;  $W_1 \approx 4,5$ ; 2)  $u_2 = -2$ ;

$v_2 = -4$ ;  $W_2 \approx 4,5$ ; 3)  $u = 2$ ;  $v_3 = -2$ ;  $W_3 \approx 2,8$ .

2. **Плоский точечный источник и сток.** Пусть ось  $z$  представляет совокупность бесчисленного множества точечных источников. В плоскости  $xoy$  эта совокупность проектируется в виде плоского точечного источника, расположенного в начале координат (рис. 3.7). Жидкость растекается из этого источника вдоль линий тока — прямых лучей  $\psi = \text{const}$  — во все стороны плоскости. Эквипотенциальные линии представляют окружности с центром в начале координат. *Мощностью источника* называется секундный расход жидкости, приходящийся на один метр оси  $z$  —  $Q$ ,  $\text{м}^3/(\text{м} \cdot \text{с})$ . Скорость жидкости в любой точке окружности радиуса  $r$  равна ра-

диальной ( $W = W_r$ ) и определяется по уравнению расхода (3.22) и (3.48), а ее компоненты — из простых геометрических соотношений

$$\left. \begin{aligned} W &= W_r = Q/(2\pi r) = dQ/(rd\theta) = d\psi/(rd\theta); \\ u &= W \cos \theta = (Q/2\pi)[x/(x^2 + y^2)]; \quad v = W \sin \theta = \\ &= (Q/2\pi)[y/(x^2 + y^2)], \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

где  $rd\theta$  — элемент дуги между двумя линиями тока, расход жидкости между которыми  $dQ = d\psi$ .

Используя уравнение (3.55), определим для источника и стока потенциал скорости и функцию тока с точностью до постоянной

$$\left. \begin{aligned} d\psi/dr &= W_r = W; \quad \varphi = (Q/2\pi) \ln r = (Q/2\pi) \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \\ d\psi &= (Q/2\pi) d\theta; \quad \psi = (Q/2\pi) \theta = (Q/2\pi) \operatorname{arctg}(y/x). \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Течение в сток направлено обратно — от периферии в начало координат. Мощность стока принимается отрицательной ( $Q < 0$ ). На основании формулы (3.55) заключаем, что скорость обратно пропорциональна радиусу и в начале координат обращается в бесконечность. В реальных течениях бесконечно большие скорости недостижимы. Поэтому источник и сток называются гидродинамическими особенностями, через которые можно провести бесчисленное множество линий тока.

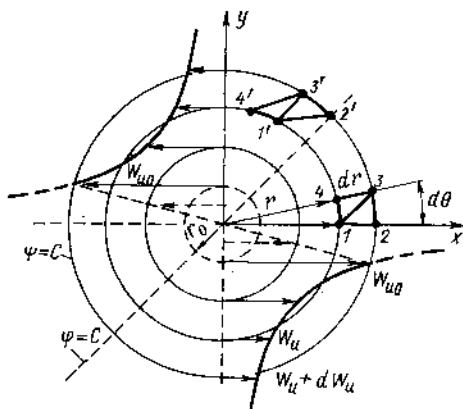


Рис. 3.8. Потенциальный вихрь

3. Потенциальный вихрь. Течение индуцируется вихревой нитью, совпадающей с осью  $z$ . На плоскость  $xy$  эта нить проектируется в начало координат как точечный вихрь. Линиями тока  $\psi = C$  являются концентрические окружности с центром в начале координат (рис. 3.8); эквипотенциальными линиями  $\varphi = C$  — лучи, исходящие из начала координат. Запишем выражение циркуляции скорости для окружностей — линий тока:

$$\Gamma = 2\pi r W_u = 2\pi r d\psi/dl = 2\pi r d\psi/(rd\theta) = \text{const}, \quad (3.57)$$

где  $W_u$  — окружная скорость частицы на окружности радиуса  $r$ . Радиальная составляющая скорости  $W_r = 0$ . В соответствии с теоремой Стокса циркуляция скорости по линиям тока любых радиусов будет одинакова, так как все они охватывают лишь один точечный вихрь, тогда

$$W_u = \Gamma/2\pi r = \text{const}/r = W_u r_1/r, \quad (3.58)$$

т. е. окружная скорость частиц обратно пропорциональна расстоянию от точечного вихря, при  $r \rightarrow 0$   $W_u \rightarrow \infty$ . В реальных условиях

бесконечно большие скорости недостижимы, поэтому точечный вихрь, так же как источник и сток, является гидродинамической особенностью.

Докажем, что циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, не охватывающему точечный вихрь, например, по элементарному контуру 1, 2, 3, 4, равна нулю

$$\begin{aligned} d\Gamma_{1,2,3,4} &= (W_u + dW_u)(r + dr)d\theta - W_u r d\theta = \\ &= d\theta d(W_u r) = d\theta d(\text{const}) = 0. \end{aligned}$$

Контур 1, 2, 3, 4 выбран произвольно, поэтому на основании первого следствия теоремы Стокса заключаем, что вся область течения, за исключением точечного вихря, потенциальна. В этой области все жидкие частицы движутся поступательно по криволинейным траекториям, деформируются, но не вращаются около собственных осей. Если мысленно провести на поверхности элемента линию, например 1—3, то во время движения эта линия будет параллельна своему начальному положению, как стрелка компаса, вращаемого по окружности.

Определим потенциал скорости и функцию тока с точностью до постоянной, интегрируя уравнения (3.57) и (3.48):

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.59)$$

В этих формулах циркуляция скорости  $\Gamma$  характеризует интенсивность точечного вихря.

В реальных случаях потенциального вращения жидкости вместо точечного вихря имеет место ядро вихря с конечным радиусом  $r_0$ . В ядре вихря жидкость вращается по закону вращения твердого тела  $\omega = W_u/r = \text{const}$  и максимальная скорость имеет конечное значение  $W_{u_0} = \omega r_0$  (пунктир на рис. 3.8).

### 3.9. СИНТЕЗИРОВАНИЕ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИЗ ПРОСТЕЙШИХ

Для того, чтобы синтезировать циркуляционное обтекание тела любого контура заданным плоским потоком, следует так подобрать распределение особенностей (источников, стоков, вихрей) внутри этого контура, чтобы они деформировали заданный поток так же, как исследуемое тело. При этом необходимо выполнить следующие условия:

алгебраическая сумма расходов источников и стоков должна равняться нулю;

одна из линий тока (нулевая) должна совпадать с контуром тела;

общая напряженность присоединенных вихрей должна равняться скорости циркуляции по любому контуру, охватывающему тело.

**Пример 1.** Диполь. На рис. 3.9 даны линии тока течения, полученного наложением источника  $A$  и стока  $B$  одинаковой мощности  $Q$ . Вследствие смещения

источника и стока от начала координат, их потенциалы скорости и функции тока в соответствии с формулами (3.56) примут вид

$$\varphi_u = (Q/2\pi) \ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2}; \quad \psi_u = (Q/2\pi) \operatorname{arctg} [y/(x+\varepsilon)];$$

$$\varphi_C = -(Q/2\pi) \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}; \quad \psi_C = -(Q/2\pi) \operatorname{arctg} [y/(x-\varepsilon)].$$

Для результирующего течения  $\varphi = \varphi_u + \varphi_C$  и  $\psi = \psi_u + \psi_C$ . Если источник и сток сближать, сохраняя постоянной мощность, то при их совпадении ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) течение прекратится — сток поглотит источник.

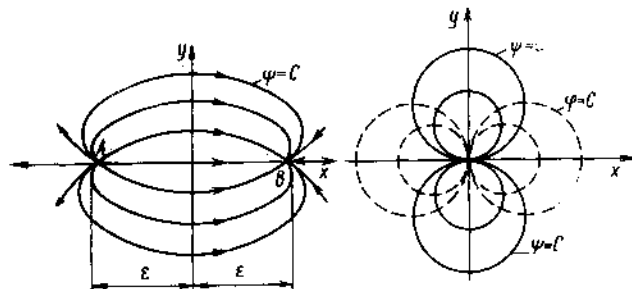


Рис. 3.9. Взаимодействующие источник  $A$ , сток  $B$  и диполь

Диполем (см. рис. 3.9) называется течение, возникающее при одновременном стягивании источника и стока в начало координат ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) и увеличении их мощности ( $Q \rightarrow \infty$ ), но так, что момент диполя  $M = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} 2Q \cdot \varepsilon$  сохраняет постоянное значение:

$$\varphi_{\text{дип}} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} (\varphi_u + \varphi_C) = \frac{M}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2}}{2\varepsilon},$$

$$\psi_{\text{дип}} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} (\psi_u + \psi_C) = \frac{M}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{x+\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Рассматривая в этих уравнениях  $2\varepsilon$  как приращение аргумента, а числитель — как приращение соответствующих функций, получим

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (\ln \sqrt{x^2 + y^2}); \quad \psi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right).$$

Выполняя дифференцирование, получим потенциал скорости и функцию тока результирующего течения — диполя

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r};$$

$$\psi_{\text{дип}} = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \quad (3.60)$$

где  $\theta$  — угол между радиусом-вектором точки и осью  $x$ . Семейство линий тока  $\psi = C$ ,  $x^2 + y^2 = Cy$  представляют окружности с центрами на оси  $y$ , проходящие через начало координат; эквипотенциальные линии  $\varphi = C$ ,  $x^2 + y^2 = Cx$  — окружности с центрами на оси  $x$ , проходящие через начало координат. Вследствие

равенства мощности источника и стока результирующий поток жидкости через замкнутый контур, охватывающий диполь, равен нулю. Это свойство обеспечивает широкое применение диполя для синтезирования еще более сложных течений жидкости около твердых тел.

**Задача 3.22.** Докажите, что  $\Phi_{\text{дип}}$  и  $\Psi_{\text{дип}}$  (3.60) удовлетворяют уравнению Лапласа.

**Пример 2.** Поперечное обтекание бесконечно длинного кругового цилиндра, радиус которого  $r_0$ . Рассмотрим это течение как плоское и покажем, что оно

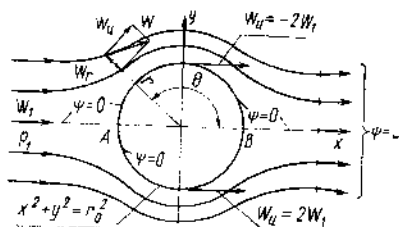


Рис. 3.10. Поперечное обтекание цилиндра идеальной жидкостью

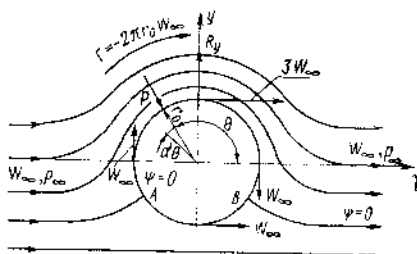


Рис. 3.11. Циркуляционное обтекание цилиндра

может быть представлено как результат наложения плоскопараллельного потока ( $W_1$ ;  $\varphi_1$ ;  $\psi_1$ ) и диполя  $M=2\pi r_0^2 W_1$ ;  $\varphi_2$ ;  $\psi_2$ . Определим потенциал скорости  $\varphi$  и функцию тока  $\psi$  синтезируемого течения с использованием формул (3.54), (3.60) и значения  $M$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = W_1 \left[ x + r_0^2 x / (x^2 + y^2) \right] = W_1 \left( r + r_0^2 / r \right) \cos \theta, \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2 = W_1 \left[ y - r_0^2 y / (x^2 + y^2) \right] = W_1 \left( r - r_0^2 / r \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Выделим из семейства линий тока  $\psi=C$  нулевую  $\psi=0$ :  $y[1-r_0^2/(x^2+y^2)]=0$ . Нулевая линия тока представляет совокупность окружности радиуса  $r_0$ , воспроизводящей контур обтекаемого цилиндра, и прямой  $y=0$ , совпадающей с осью  $x$  (рис. 3.10), т. е. удовлетворяет граничным условиям задачи. Радиальную  $W_r$  и окружную  $W_u$  скорости найдем по определению

$$\begin{aligned} W_r &= \partial\varphi/\partial r = W_1 \left( 1 - r_0^2 / r^2 \right) \cos \theta; \\ W_u &= \partial\varphi/\partial t = (\partial\varphi/r d\theta) = -W_1 \left( 1 + r_0^2 / r^2 \right) \sin \theta; \end{aligned}$$

$W_r > 0$ , если направлена в сторону увеличения  $r$ , и  $W_u > 0$ , если соответствует положительному направлению вращения (против часовой стрелки). На бесконечном удалении от цилиндра ( $r \rightarrow \infty$ ) как вдоль ось  $x$  ( $\theta=0$  и  $\theta=\pi$ ), так и вдоль оси  $y$  ( $\theta=\pi/2$  и  $\theta=3\pi/2$ ) и при любом  $\theta$  имеет место плоскопараллельное течение невозмущенного потока со скоростью  $W_\infty=W_1$ . Поэтому «скорость на бесконечности от тела  $W_\infty$ » и «скорость невозмущенного потока  $W_1$ » являются синонимами. На стенке цилиндра при  $r=r_0$ ;  $W_r=0$  и

$$W = W_u = -2W_1 \sin \theta. \quad (3.62)$$

Формула (3.62) описывает распределение скоростей по поверхности цилиндра. В точках  $A$  и  $B$  при  $\theta=\pi$  и  $\theta=0$  скорость равна нулю. Точка  $A$  называется *передней критической точкой*. В этой точке поток раздвигается. Точка  $B$ , в которой потоки вновь соединяются, называется *задней критической точкой*.

**Задача 3.23.** Для случая обтекания бесконечного цилиндра (см. рис. 3.10) требуется:

1. Доказать, что при  $r=r_0$  и углах  $\theta=90$  и  $270^\circ$  окружная скорость  $W_u = \mp 2W_1$ , при  $\theta=30^\circ$   $W_u = -W_1$  и радиальная  $W_r=0$ .

2. Объяснить причину увеличения скорости при  $\theta=90$  и  $270^\circ$ .

3. Доказать, что уравнение линии тока, проходящей через точки  $x=0$ ,  $y=2r_0$  имеет вид  $y-r_0^2y/(x^2+y^2)=3r_0/2$ , а расход жидкости между этой линией тока и нулевой линией тока  $Q=3W_1r_0/2$ .

4. Указать положения критических точек  $A$  и  $B$  в случае, когда поток будет направлен под углом  $30^\circ$  к оси  $x$ .

**Пример 3.** Циркуляционное обтекание цилиндра (рис. 3.11). Циркуляционное обтекание бесконечного цилиндра получим наложением полей соответствующего бесциркуляционного обтекания цилиндра ( $\varphi_1, \psi_1$ ) и присоединенного потенциального вихря с циркуляцией  $\Gamma$ . В соответствии с формулами (3.61) и (3.59), получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = W_\infty (r + r_0^2/r) \cos \theta + \Gamma \theta / 2\pi; \\ \psi &= \psi_1 + \psi_2 = W_\infty (r - r_0^2/r) \sin \theta + \Gamma \ln r / 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Уравнения эквипотенциальных линий и линий тока получим, положив в (3.63)  $\varphi = \text{const}$  и  $\psi = \text{const}$ .

Частные производные потенциала скорости определяют радиальную и окружную составляющие скорости

$$\left. \begin{aligned} W_r &= \partial \varphi / \partial r = W_\infty (1 - r_0^2/r^2) \cos \theta; \\ W_u &= \partial \varphi / r \partial \theta = -W_\infty (1 + r_0^2/r^2) \sin \theta + \Gamma / 2\pi r. \end{aligned} \right\} \quad (3.64)$$

На поверхности цилиндра  $r=r_0$ ,  $W_r=0$  и распределение скорости имеет вид:

$$W = W_u = -2W_\infty \sin \theta + \Gamma / 2\pi r_0. \quad (3.65)$$

**Задача 3.24.** Для условий рис. 3.11 и циркуляции  $\Gamma = -2\pi r_0 W_\infty$  доказать, что: 1) скорость жидкости на поверхности цилиндра ( $r=r_0$ ) при различных углах  $\theta$  имеет следующие значения:

$\theta^\circ$	0	90	180	270	330	360
$W_u$	$-W_\infty$	$-3W_\infty$	$-W_\infty$	0	$+W_\infty$	$-W_\infty$

2) вектор скорости в точке  $r=2r_0$  и  $\theta=30^\circ$  равен  $W \approx 1,3 \cdot W_\infty$  и составляет с осью  $x$  угол  $-30^\circ$ .

**Вопрос 3.25.** При каком значении циркуляции скорости  $\Gamma$ , критические точки  $A$  и  $B$  совпадут в точках  $x=0$ ,  $y=-r_0$ ? Ответ.  $\Gamma = -4\pi r_0 W_\infty$ .

### 3.10. О МЕТОДЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

При теоретическом исследовании обтекания тел сложной формы, например, авиационных крыловых профилей, возникают большие трудности в отыскании простейших течений с известными потенциалами скорости и функциями тока, которые могли бы синтезировать эти сложные течения. В этих случаях с успехом применяется метод конформных отображений сложных профилей на другой контур, потенциал скорости которого известен. Обычно в качестве известного течения используют циркуляционное обтекание цилиндра. Метод конформных отображений основывается на теории функций комплексного переменного, поэтому все вычисления ведутся в комплексных переменных.

**Формулировка задачи.** Пусть в физической плоскости  $z$  комплексного переменного  $z=x+iy$  задан произвольный крыловой профиль  $l$ , обтекаемый плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого на бесконечности  $W_\infty$  составляет угол  $\theta$  с осью  $x$  (рис. 3.12).



Требуется определить поле скоростей во всей области течения, внешней по отношению к контуру  $l$ .

Пусть уже решена сложная, но чисто геометрическая задача конформного отображения — найдена однозначная аналитическая функция комплексного переменного:

$$\zeta = F(z) \text{ или } z = f(\zeta), \quad (3.66)$$

конформно отображающая область внешнюю, относительно исследуемого контура  $l$  на плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  на область, внешнюю относительно круга  $l^*$ , во вспомога-

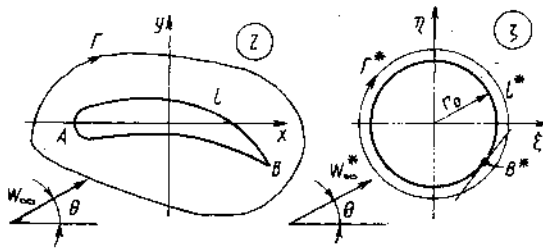


Рис. 3.12. Конформное отображение течений

ной плоскости комплексного переменного  $\zeta = \xi + i\eta$ , а также осуществляющая обратное отображение. Для того, чтобы конформное отображение было единственным, функции (3.66), в соответствии с теоремой Римана, выбираются так, чтобы точкам  $z = \infty$  в физической плоскости соответствовали точки  $\zeta = \infty$  во вспомогательной плоскости и чтобы в этих точках производная  $dz/d\zeta$  была положительна, т. е.

$$(dz/d\zeta)_{\infty} = m_{\infty} > 0. \quad (3.67)$$

В этом случае, каждой точке  $z = x + iy$  крылового профиля  $l$  в плоскости  $z$  будет соответствовать одна определенная точка  $\zeta = \xi + i\eta$  окружности  $l^*$  во вспомогательной плоскости и наоборот. При конформном отображении контуры изменяются так, что их бесконечно малые элементы остаются геометрически подобными и углы между касательными в точке пересечения двух кривых не изменяются и в данном случае равны  $\pi$ . Исключение составляет особая точка  $B$ , для которой конформность отображения нарушается и острый угол отображается в угол равный  $\pi$  (точка  $B^*$ ).

Метод конформных отображений используется для решения гидродинамических задач потому, что вместе с контуром тела, при использовании той же самой функции (3.66), отображается и поле скоростей течения около него на поле скоростей циркуляционного обтекания цилиндра во вспомогательной плоскости  $\zeta$  и наоборот.

Применение функций комплексного переменного при конформном отображении течений. Формулы (3.50) в теории функций комплексного переменного называются условиями Коши — Римана, которые необходимы и достаточны,

чтобы выражения  $\varphi + i\psi$  и  $\varphi^* + i\psi^*$  являлись аналитическими функциями  $\chi(z)$  и  $\chi^*(\zeta)$  комплексных переменных  $z = x + iy$  и  $\zeta = \xi + i\eta$ , т. е.

$$\chi(z) = \chi(x + iy) = \varphi + i\psi; \quad \chi^*(\zeta) = \chi^*(\xi + i\eta) = \varphi^* + i\psi^*, \quad (3.68)$$

где  $\varphi, \psi$  — потенциал скорости и функция тока течения около профиля в плоскости  $z$ , соответственно;  $\varphi^*, \psi^*$  — известные потенциал скорости и функция тока циркуляционного обтекания цилиндра (3.63), соответственно;  $\chi(z)$  — комплексный потенциал течения около профиля в физической плоскости  $z$ .

Комплексный потенциал циркуляционного обтекания кругового цилиндра во вспомогательной плоскости  $\chi^*(\zeta)$  получим, подставив в (3.68) значения  $\varphi^*$  и  $\psi^*$  из (3.63) и производя преобразования:

$$\chi^*(\zeta) = \overline{W}_\infty^* \zeta + W_\infty^* \frac{r_0}{\xi} + \frac{\Gamma^*}{2\pi i} \ln \zeta, \quad (3.69)$$

где  $\overline{W}_\infty^*$  — сопряженная скорость на бесконечности в плоскости  $\zeta$ ;  $\Gamma^*$  — циркуляция скорости вокруг контура  $l^*$ :

Комплексный потенциал течения около исследуемого профиля  $\chi(z)$  неизвестен и задача сводится к его отысканию с последующим определением  $\varphi$  и  $\psi$ .

Соотношение между комплексными потенциалами течений при конформном отображении установим, используя отображающую функцию (3.66):

$$\chi(z) = \chi[f(\zeta)] = \chi^*(\zeta) = \varphi + i\psi = \varphi^* + i\psi^*. \quad (3.70)$$

Символ комплексного потенциала  $\chi$  сам по себе не подразумевает какой-либо определенной функции, а лишь указывает, что он относится к определенному течению, рассматриваемому в данной комплексной плоскости.

Равенство  $\psi = \psi^*$  в соответственных точках течений  $z$  и  $\zeta$  показывает, что на обоих контурах  $\psi$  и  $\psi_\zeta^*$  имеют одно и то же постоянное значение, т. е. контуры  $l$  и  $l^*$  являются нулевыми линиями тока.

Соотношение между скоростями невозмущенных потоков при конформном отображении найдем, продифференцировав (3.70) по  $\zeta$ , учтя (3.67), и что сопряженная скорость на бесконечности равна производной от комплексного потенциала по комплексной переменной:

$$\overline{W}_\infty^* = [d\chi^*(\zeta)/d\zeta]_\infty = [d\chi(z)/d\zeta]_\infty = [d\chi(z)/dz \cdot dz/d\zeta]_\infty = \overline{W}_\infty m_\infty. \quad (3.71)$$

При отображении направление комплексных и сопряженных скоростей невозмущенных потоков не изменяется ( $m_\infty > 0$ ), а их величины изменяются в  $m_\infty$  раз.

Циркуляция скорости вокруг контуров  $l$  и  $l^*$  при конформном отображении сохраняет неизменное значение. Действительно, используя (3.71), (3.66), (3.67) и (3.70) и учтя, что циркуляция равна действительной части (д. ч.)  $\oint_l \overline{W} dz$  и д. ч.  $\oint_{l^*} \overline{W}^* d\zeta$ , получим

$$\begin{aligned} \Gamma &= \text{д. ч.} \oint_l \frac{d\chi(z)}{dz} dz = \text{д. ч.} \oint_{l^*} \frac{d\chi(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = \\ &= \text{д. ч.} \oint_{l^*} \frac{d\chi^*(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = \Gamma^*. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Итак, при конформном отображении сохраняются неизменными направление невозмущенного потока и циркуляция скорости и в  $m_\infty (dz/d\zeta)_\infty$  раз изменяется абсолютная величина скорости.

Порядок определения комплексного потенциала обтекания заданного профиля:

1) заданный профиль конформно отображается на вспомогательную плоскость  $\zeta$ :

а) определяется радиус окружности  $r_0$  и расположение окружности на плоскости  $\zeta$ . Для этого используются геометрическое описание профиля в плоскости  $z = x + iy$  и функция (3.66);

б) определяется масштаб конформного отображения скорости в соответствии с (3.66) и (3.71)  $W_\infty^*/W_\infty = (dz/d\zeta)_\infty = m_\infty$  и учитывается (3.72). Все эти данные подставляются в (3.69) и находится явный вид комплексного потенциала циркуляционного обтекания круга

$$\chi^*(\zeta) = m_\infty \bar{W}_\infty \zeta + m_\infty W_\infty r_0^2 / \zeta + (\Gamma/2\pi i) \ln \zeta; \quad (3.73)$$

2) определяется искомым комплексный потенциал течения около профиля  $l$  в физической плоскости  $z$ . Для этого учитывается, что  $\chi(z) = \chi^*(\zeta)$ , и в (3.73) подставляется функция  $\zeta = F(z)$ :

$$\chi(z) = m_\infty \bar{W}_\infty F(z) + m_\infty W_\infty r_0^2 / F(z) + (\Gamma/2\pi i) \ln F(z). \quad (3.74)$$

Определение  $\varphi$  и  $\psi$  сводится к выделению действительной и мнимой частей (3.74).

Как видим, гидродинамическая задача отыскания комплексного потенциала обтекания заданного профиля заданным потоком не представляет труда, если известны отображающая функция (3.66) и циркуляция скорости  $\Gamma$ .

Функция  $z = 0,5 (\zeta + r_0^2/\zeta)$ , отображающая круг на профиль крыла, была найдена Н. Е. Жуковским в 1910 г. и названа его именем. Применяя эту функцию Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин получили серию теоретических крыловых профилей. Профили, отличающиеся от теоретических, при отображении дают искаженный круг и метод конформного отображения применим лишь для приближенного исследования их обтекания. Циркуляция  $\Gamma$  для круга может иметь произвольное значение и поэтому должна быть задана такой, какая действительно возникает при обтекании профиля  $l$ . При безотрывном обтекании авиационных профилей, имеющих заднюю острую кромку, циркуляция может иметь только одно определенное значение, обусловленное формой профиля и его расположением относительно заданного невозмущенного потока. Определение циркуляции скорости около профиля будет рассмотрено в п. 18.1.

# Глава 4

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

Получим и рассмотрим уравнения движения, энергии и второго закона термодинамики для общего случая неустановившегося пространственного движения сжимаемой вязкой жидкости.

### 4.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Уравнение движения жидкости и моментов количества движения были получены в 1755 г. академиком Российской Академии Наук Эйлером (1707—1783 гг.). Эти уравнения лежат в основе возникшей тогда новой науки—гидродинамики со строгими математическими методами решения ее задач.

Интегральное уравнение движения для жидкого объема получим как обобщение второго закона Ньютона о движении материальной точки

$$d(m\vec{W})/dt = \vec{R}, \quad (4.1)$$

где  $m$ —масса материальной точки, кг;  $\vec{W}$  — скорость движения материальной точки, м/с;  $m\vec{W}$  — количество движения материальной точки, кгм/с;  $\vec{R}$  — равнодействующая сил, действующих на материальную точку, Н.

Задача 4.1. Дайте формулировку второго закона Ньютона и проанализируйте его физический смысл.

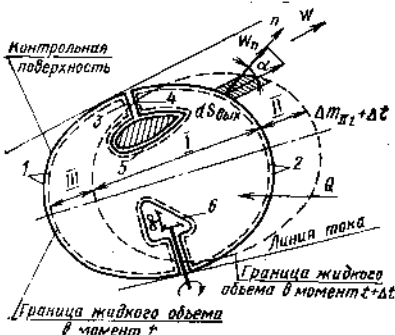


Рис. 4.1. Контрольный и жидкий объемы

Выберем в потоке контрольный объем  $V$ , заполненный в момент времени  $t$  жидким объемом (рис. 4.1) так, что контрольная поверхность (сплошная линия) и граница жидкого объема или жидкая поверхность (пунктирная линия) в момент времени  $t$  совпадают. Внутри объема  $V$  могут находиться твердые тела—неподвижные или подвижные (лопасти турбомашин), производящие обмен теплом и механической энергией между жидкостью

и внешней средой. В этом случае к внешним участкам контрольной поверхности и жидкой поверхности, обозначенными цифрами 1 и 2, добавляются внутренние участки 3, 4, 5, 6, вырезающие части объема, занятые не жидкими частицами, а твердыми телами. Расход жидкости через эти дополнительные участки контрольной поверхности равен нулю, так как твердые тела непроницаемы для жидкости, а количество жидкости, вытекающей из контрольного объема через поверхность 3, равно количеству жидкости, втекающей в него через поверхность 4 (эти поверхности расположены сколь угодно близко друг к другу и одинаковы по площади). Итак, выделенный объем содержит только жидкие частицы.

Уравнение (4.1) справедливо для любой частицы, находящейся в объеме и имеющей плотность  $\rho_i$ , объем  $dV_i$ , скорость  $\vec{W}_i$ , т. е.

$$d(\rho_i dV_i \vec{W}_i)/dt = \Delta \vec{R}_i, \quad (4.2)$$

где  $\Delta \vec{R}_i$  — равнодействующая внешних сил, действующих на частицу  $i$ .

Интегральное уравнение движения для всего жидкого объема  $V$  получим суммируя уравнения типа (4.2) по всем жидким частицам, заключенным внутри жидкой поверхности в момент времени  $t$ :

$$\int_V \frac{d}{dt} (\rho \vec{W} dV) = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{W} dV = \vec{R}_2, \quad (4.3)$$

где  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{W} dV$  — полная производная по времени от вектора сум-

марного количества движения жидкого объема;  $\vec{R}_2$  — вектор равнодействующей всех внешних сил, действующих на жидкий объем в момент времени  $t$ .

При суммировании, силы взаимодействия между жидкими частицами, согласно третьему закону Ньютона, уравниваются. Поэтому, равнодействующая  $\vec{R}_2$  в соответствии с (1.6) и (1.8) равна сумме внешних элементарных массовых —  $\vec{R}_m$  и поверхностных —  $R_{S(1...6)}$  сил

$$\vec{R}_2 = \sum \Delta \vec{R}_i = \vec{R}_m + \vec{R}_{S(1...6)} = \int_V \vec{J} \rho dV + \oint_{S(1...6)} \vec{r} dS.$$

Поверхностные силы должны суммироваться по жидкой поверхности. Однако поскольку в момент суммирования  $t$  жидкая поверхность совпадает с контрольной, то в дальнейшем удобнее считать, что суммирование ведется по контрольной поверхности  $S_{(1...6)}$ , включающей все участки 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Сила реакции жидкости  $\vec{R}$  — поверхностная сила, с которой жидкость действует на обтекаемые ею тела. По абсолютной величине она равна и обратна по знаку равнодействующей, с которой твердые тела (подвижные и неподвижные) действуют на жидкость. В данном случае (см. рис. 4.1) взаимодействие происходит

на внутренних участках контрольной поверхности  $S_5 + S_6 = S_{(5;6)}$ , а силы, действующие на  $S_3$  и  $S_4$ , взаимно уравновешиваются и сила реакции жидкости будет

$$\vec{R} = -\vec{R}_{S_{(5;6)}} = - \int_{S_{(5;6)}} \vec{r} dS = - \left( \int_{S_{(5;6)}} \sigma \vec{n} dS + \int_{S_{(5;6)}} \vec{\tau} dS \right), \quad (4.4)$$

где  $\vec{n}$  — орт нормали к площадке  $dS$ ;  $S_{(5;6)}$  — поверхность твердых тел, обтекаемая жидкостью.

Равнодействующая поверхностных сил, действующих на всю контрольную поверхность  $S_{(1...6)}$  определяется по формуле

$$\vec{R}_{S_{(1...6)}} = \vec{R}_{S_{(1;2)}} + \vec{R}_{S_{(5;6)}} = \vec{R}_{S_{(1;2)}} - \vec{R}, \quad (4.5)$$

где  $\vec{R}_{S_{(1;2)}}$  — равнодействующая поверхностных сил, действующих на части контрольной поверхности 1 и 2, через которые происходит обмен жидкостью между выделенным контрольным объемом и окружающей средой.

С учетом силы реакции жидкости интегральное уравнение движения жидкого объема (4.3) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{W} dV = \vec{R}_z = \vec{R}_m + \vec{R}_{S_{(1;2)}} + R_{S_{(5;6)}} = \vec{R}_m + R_{S_{(1;2)}} - \vec{R}. \quad (4.6)$$

Итак, на основании интегрального уравнения движения (4.3) или (4.6) можно утверждать, что *производная по времени суммарного количества движения жидкого объема равна сумме всех внешних сил, действующих на этот объем*. Это уравнение является самым общим динамическим уравнением гидрогазодинамики. Оно применимо для объема любой величины и для любого (даже разрывного) движения, при котором параметры состояния жидкости и характеристики движения претерпевают разрыв внутри объема. Это уравнение является исходным для расчета сил, действующих в потоках жидкости.

Расчетная форма интегрального уравнения движения для контрольного объема. Преобразуем полную производную по времени суммарного количества движения к форме, удобной для решения практических задач. Пусть в момент времени  $t$  жидкий объем занимает контрольный объем  $III+I$  (см. рис. 4.1). Обозначим суммарное количество движения жидкого объема в этом положении через  $\vec{K}_t = \vec{K}_{III} + \vec{K}_{I,t}$ . За время  $\Delta t$  жидкий объем переместится и займет положение  $I+II$ . При этом, под действием сил, его суммарное количество движения изменится и будет  $\vec{K}_{t+\Delta t} = \vec{K}_{II} + \vec{K}_{I,t+\Delta t}$ . Тогда, по определению, производная по времени суммарного количества движения жидкого объема будет  $\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{W} dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{K}_{t+\Delta t} - \vec{K}_t}{\Delta t}$ . Подставляя в это выраже-

ние значение суммарных количеств движения и группируя члены с одинаковыми числовыми индексами, получим

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{W} dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{K}_{II+\Delta t} - \vec{K}_{II}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{K}_{III+\Delta t} - \vec{K}_{III}}{\Delta t}. \quad (4.7)$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  часть жидкого объема  $I_{II+\Delta t}$  стремится к контрольному объему  $III+I$  и первый член правой части (4.7) будет частной производной суммарного количества движения жидкости в контрольном объеме по времени

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{K}_{II+\Delta t} - \vec{K}_{II}}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{W} dV. \quad (4.8)$$

При установившемся течении эта величина равна нулю. Учтем, что контрольная поверхность  $S_{(1...6)}$  состоит из поверхности  $S_{\text{ВЫХ}}$ , через которую жидкость вытекает из контрольного объема, и  $S_{\text{ВХ}}$  — через которую она втекает в него, а элементарная масса жидкости, отмеченная на рис. 4.1 штриховкой —  $dG_{\text{ВЫХ}} \Delta t = \rho W_n dS_{\text{ВЫХ}} \Delta t$ , получим, что второй член правой части (4.7)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{K}_{III+\Delta t} - \vec{K}_{III}}{\Delta t} = \int_{S_{\text{ВЫХ}}} \rho W_n \vec{W} dS - \int_{S_{\text{ВХ}}} \rho W_n \vec{W} dS \quad (4.9)$$

представляет разность между секундными количествами движения жидкости, вытекающей из контрольного объема и втекающей в него. Величина  $\int_S \rho W_n \vec{W} dS$  называется также потоком количества движения жидкости, протекающей в секунду через данную поверхность. Подставляя (4.8) и (4.9) в (4.7), а результат в (4.3), получим расчетную формулу интегрального уравнения движения для контрольного объема:

$$\vec{R}_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{W} dV + \int_{S_{\text{ВЫХ}}} \rho W_n \vec{W} dS - \int_{S_{\text{ВХ}}} \rho W_n \vec{W} dS, \quad (4.10)$$

где  $\vec{R}_2$  определяется формулой (4.6).

Первая теорема Эйлера на основании (4.10) устанавливает, что *равнодействующая внешних сил  $\vec{R}_2$ , действующих в данный момент на жидкость в контрольном объеме, равна изменению во времени суммарного количества движения жидкости в этом объеме (частная производная по времени) плюс разность потоков количества движения жидкости на выходе из контрольного объема и на входе в него\**.

\* Уравнению (4.10) можно придать форму  $\vec{R}_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{W} dV + \oint_{S(1;2)} \rho W_n \vec{W} dS$ .

Следовательно, количество движения, втекающее в контрольный объем, принято отрицательным, а вытекающее — положительным.

Интегральное уравнение движения для контрольного объема в проекциях на ось  $x$  получим, подставив значение  $R_x$  из (4.6) в (4.10) и спроектировав его на ось  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} R_{2x} &= \int_V X \rho dV + \left( \int_S \vec{\tau} dS \right)_x + \left( \int_S \vec{n} s dS \right)_x - R_x \\ R_{2x} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV + \int_{S_{\text{вых}}} \rho W_{n2} u dS - \int_{S_{\text{вх}}} \rho W_{n1} u dS, \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

где символ  $S$  у интеграла обозначает площадь контрольной поверхности, не соприкасающуюся с твердыми поверхностями, а  $R_x$  — проекция на ось  $x$  сил действия жидкости на твердые поверхности, соприкасающиеся с контрольной поверхностью.

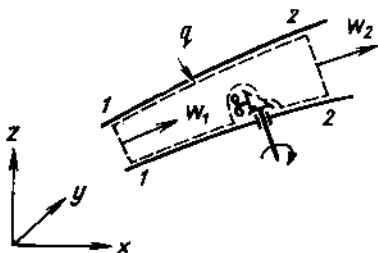


Рис. 4.2. Контрольный объем для элементарной струйки

Интегральные уравнения движения для произвольного контрольного объема элементарной струйки при установившемся течении в проекциях на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 4.2). Подставив в уравнение (4.11)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u dV = 0; \quad \int_{S_{\text{вых}}} \rho_2 W_{n2} u_2 dS = G_2 u_2, \quad \int_{S_{\text{вх}}} \rho_1 W_{n1} u_1 dS = G_1 u_1$$

и  $G_2 = G_1 = G$ ,

получим уравнение движения в проекциях на ось  $x$  и по аналогии для осей  $y$  и  $z$

$$\left. \begin{aligned} R_{2x} &= G(u_2 - u_1); \quad R_{2y} = G(v_2 - v_1); \\ R_{2z} &= G(w_2 - w_1), \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

т. е. проекция равнодействующей всех внешних сил, приложенных к струйке жидкости на любом ее участке, равна проекции на ту же ось разности потоков количества движения на выходе из участка и на входе в него или равна произведению расхода на приращение проекций скорости.

**Задача 4.3.** Используя (4.12) укажите необходимые и достаточные условия движений жидкости ускоренного, замедленного и без ускорения.

Одной из важнейших задач гидрогазодинамики является определение сил взаимодействия между жидкостью и обтекаемыми телами, т. е. сил  $\vec{R}$ . Эта задача может решаться двумя способами. Первый основывается на (4.4) и требует вычисления интегралов по поверхности тел от нормальных и тангенциальных напряжений, что во многих случаях представляет непреодолимые трудности. Второй способ основывается на применении уравнения движения



(4.10) или (4.12). При установившемся движении и известных или отсутствующих массовых силах искомая сила определяется только по состоянию потока на входном и выходном участках контрольной поверхности без определения распределения нормальных и касательных напряжений по телу. Эта важнейшая особенность уравнения движения, как видим, позволяет при правильном выборе контрольной поверхности решать задачи, недоступные для первого способа.

Поскольку в расчете используются силы и параметры течения только на внешней части контрольной поверхности, то внутренние ее части не рассматриваются — они были выделены лишь для обоснования метода. Внешние участки контрольной поверхности следует выбирать так, чтобы они были перпендикулярны к линиям тока или параллельны им и располагались в областях, где поперечный градиент скорости равен нулю. При таком выборе контрольной поверхности силы трения на нее не действуют —  $\int_S \vec{\tau} dS = 0$ ,

нормальное напряжение равно гидростатическому давлению —  $\int_S \vec{\tau} dS = \int_S \sigma \vec{n} dS = \int_S p \vec{n} dS$ , расход жидкости через нее легко подсчитывается или равен нулю и расчет существенно упрощается.

Уравнение движения является основным не только в гидрогазодинамике, но и в теории лопаточных машин, и в теории реактивных двигателей.

## 4.2. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

**Пример 1.** Расчет простейшего эжектора. В струйном водяном насосе или эжекторе (рис. 4.3) высоконапорный или эжектирующий поток подается из сопла с площадью сечения  $S_1 = 10^{-3} \text{ м}^2$  при давлении  $p_1 = p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$  со скоростью  $u_1 = 30 \text{ м/с}$  и эжектирует или подсасывает низконапорный или эжектируемый поток со скоростью  $u_2 = 10 \text{ м/с}$  через кольцевое сечение площадью  $S_2 = 10^{-2} \text{ м}^2$ . В цилиндрической камере смешения 1—3 с площадью сечения  $S_3 = S_1 + S_2 = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$  оба потока полностью перемешиваются до постоянной по сечению 3 скорости  $u_3$  и давления  $p_3$ . Пренебрегая трением воды о стенки камеры смешения 1—3 определить величины  $u_3$  и  $p_3$ .

Торцевой участок 1—1 контрольной поверхности совместим со срезом высоконапорного сопла, а 3—3 с сечением канала, в котором заканчивается смешение потоков. Цилиндрический участок 1—3 расположен сколь угодно близко к внутренним стенкам камеры смешения.

Скорость  $u_3$  определим из условия равенства объемных расходов воды в сечениях 1—1 и 3—3

$$u_3 = (u_1 S_1 + u_2 S_2) / S_3 = (30 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-2}) / 1,1 \cdot 10^{-2} = 11,8 \text{ м/с.}$$

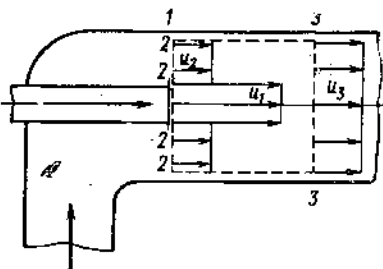


Рис. 4.3. Схема эжектора

Высоконапорный поток при смешении передает часть количества движения низконапорному. Для определения давления  $p_3$  используем уравнение движения (4.11). По условию напряжение трения на контрольную поверхность не действует ( $\int_S \vec{u} dS)_x = 0$ , проекция массовых сил на ось  $x$  равна нулю  $\int_V X \rho dV = 0$ , так

как ось  $x$  горизонтальна, а течение происходит в поле сил тяжести, когда  $X = Y = 0$ , а  $Z = -g$ . Силы давления на цилиндрическую поверхность 1-3 уравновешиваются. Поэтому проекции на ось  $x$ , отличные от нуля, дают только силы давления на сечение 1-1  $-p_1(S_1 + S_2) = -p_1 S_3$  и на сечение 3-3  $(-p_3 S_3)$ . В правой части (4.11) член  $\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = 0$  вследствие стационарности течения, а про-

екции потоков количества движения принимают простой вид

$$\int_{S_{\text{вых}}} \rho W_{\text{п}} u dS = \rho u_3^2 S_3, \quad \int_{S_{\text{вх}}} \rho W_{\text{п}} u dS = \rho u_1^2 S_1 + \rho u_2^2 S_2.$$

Подставляя все эти значения в (4.11), получим

$$(p_1 - p_3) S_3 = \rho u_3^2 S_3 - \rho u_1^2 S_1 - \rho u_2^2 S_2$$

или

$$p_3 = p_1 + \rho (u_1^2 S_1 + u_2^2 S_2 - u_3^2 S_3) / S_3$$

$$\text{откуда } p_3 = 2 \cdot 10^5 + \frac{10^3 (30^2 \cdot 10^{-3} + 10^2 \cdot 10^{-2} - 11,8^2 \cdot 1,1 \cdot 10^{-2})}{1,1 \cdot 10^{-2}} = 2,33 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Увеличение статического давления в камере смешения соответствует уменьшению количества движения жидкости, что объясняется уменьшением кинетической энергии жидкости за счет выравнивания поля скоростей.

**Пример 2.** Определение сил действия жидкости на стенки расширяющегося, сужающегося и цилиндрического каналов. Определим проекцию  $R_x$  на ось  $x$  силы, с которой жидкость действует на стенки расширяющегося канала (дозвукового диффузора) и тел, скрепленных с его стенками (рис. 4.4). Примем, что течение, установившееся в виде элементарной струйки; параметры потока в сечениях 1-1 и 2-2 соответственно  $W_1, p_1, \rho_1$  и  $W_2, p_2, \rho_2$ ; площади сечений  $S_1$  и  $S_2$ ; давление неподвижной окружающей среды  $p_n$ .

Сила  $R_x$  имеет составляющие внутреннюю  $R_{x\text{вн}}$  и легко определяемую наружную  $R_{x\text{н}}$ . При  $p_n = \text{const}$  и отсутствии трения

$$\left. \begin{aligned} R_{x\text{н}} &= (S_2 - S_1) p_n; \\ R_x &= R_{x\text{вн}} + R_{x\text{н}} = R_{x\text{вн}} + (S_2 - S_1) p_n. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

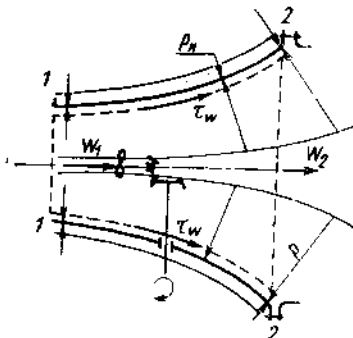


Рис. 4.4. Расширяющийся канал

Сила  $R_{x\text{вн}}$ , к определению которой сводится задача, представляет сумму проекций на ось  $x$  сил трения и давления, с которыми жидкость действует на внутренние поверхности стенок канала 1-2 и на твердые тела, размещенные на участке 1-2. Расчет ее по (4.4) неосуществим, так как не известно распределение напряжения трения и давления по поверхностям. Поэтому, для определения силы  $R_{x\text{вн}}$  используем интегральные уравнения движения (4.11) и (4.12). Торцевые участки контрольной поверхности 1-1 и 2-2 совместим с входным и выходным сечениями канала, а боковой — с внутренней поверхностью стенок 1-2 (см. рис. 4.4). Выделение твердых тел, находящихся в потоке, на рисунке не показано, но подразумевается. При выбранных контрольной поверхности и оси  $x$  первый и второй члены (4.11) равны нулю, так как

массовая сила тяжести жидкости в контрольном объеме перпендикулярна к оси  $x$ , а на участках контрольной поверхности  $1-1$  и  $2-2$ , перпендикулярных к линиям тока,  $\tau = 0$ , а  $\sigma = p$  и  $\left(\int_S \vec{n} \sigma dS\right)_x = \left(\int_S \vec{n} p dS\right)_x = p_1 S_1 - p_2 S_2$ .

Правая часть (4.11) может быть представлена в виде правой части (4.12), т. е.  $R_{\Sigma x} = p_1 S_1 - p_2 S_2 - R_{x \text{ вн}} = G(W_2 - W_1)$  или

$$R_{x \text{ вн}} = -[(p_2 S_2 - p_1 S_1) + G(W_2 - W_1)] = (p_1 S_1 + G W_1) - (p_2 S_2 + G W_2). \quad (4.14)$$

Величина  $pS + GW = \Phi$  называется полным импульсом жидкости в данном сечении и

$$R_{x \text{ вн}} = \Phi_1 - \Phi_2. \quad (4.15)$$

Подставляя это значение  $R_{x \text{ вн}}$  в (4.13), получим

$$R_x = \Phi_1 - \Phi_2 + (S_2 - S_1) p_x. \quad (4.16)$$

Сила  $R_x$  воспринимается узлами крепления конструкции. Осевая сила действия жидкости на стенки сужающихся и цилиндрических каналов рассчитывается по тем же формулам (4.13)–(4.16). Знаки  $R_{x \text{ вн}}$  и  $R_x$  определяются величинами положительных и отрицательных сил их составляющих и, в зависимости от условий, могут быть любыми для любых каналов с машинами внутри. Знак и величина  $R_{x \text{ вн}}$  определяются по (4.13).

Знак силы  $R_{x \text{ вн}}$ . В соответствии с (4.15)  $R_{x \text{ вн}} > 0$ , при уменьшении полного импульса жидкости  $\Phi_2 < \Phi_1$  и  $R_{x \text{ вн}} < 0$ , при его увеличении  $\Phi_2 > \Phi_1$ . Уменьшение полного импульса всегда обусловлено действием на жидкость твердых поверхностей с тормозящей силой, а увеличение — с ускоряющей силой (сходящей по направлению со скоростью). Скорость потока в обоих случаях может изменяться любым образом, так как ее изменение определяется направлением суммарной силы  $R_{\Sigma x}$ , а не силой ( $-R_{x \text{ вн}}$ ). Сила  $R_{x \text{ вн}} < 0$  для летательного аппарата является положительной составляющей силы реактивной тяги, а  $R_{x \text{ вн}} > 0$  — отрицательной.

Короткие расширяющиеся каналы без тел внутри применяются как дозвуковые диффузоры, например в ВРД, и как сверхзвуковые части реактивных сопел. В этом случае сила трения не велика и ею в первом приближении пренебрегают. Тогда из рис. 4.4 следует, что  $R_{x \text{ вн}}$ , слагающаяся только из проекции элементарных сил давления на внутренние поверхности стенок, отрицательна, т. е. является положительной составляющей силы тяги.

**Задача 4.4.** Определить направление  $R_{x \text{ вн}}$  и изменение полного импульса жидкости для сужающегося канала и изобразить схему нагружения стенок. Укажите разницу между силами  $R_{\Sigma x}$ ,  $R_x$ ,  $R_{x \text{ вн}}$ ,  $R_{x \text{ вл}}$ , изобразив их составляющие. Каково правило знаков для этих сил?

Для цилиндрической трубки при отсутствии между сечениями  $1-1$  и  $2-2$  твердых тел и пренебрегая трением, получим, что  $R_{x \text{ вн}} = 0$ , так как силы давления перпендикулярны к оси и уравнения движения (4.15) и (4.16) свидетельствуют о неизменности полных импульсов.

$$\Phi_2 = \Phi_1 \text{ или } G W_1 + p_1 S = G W_2 + p_2 S, \quad (4.17)$$

но  $G = \rho_1 W_1 S_1 = \rho_2 W_2 S_2$  или  $\rho_1 W_1 = \rho_2 W_2$  и

$$\left. \begin{aligned} p_1 - p_2 &= \rho_1 W_1 (W_2 - W_1) = \rho_2 W_2 (W_2 - W_1) = \rho_1 W_1 W_2 - \rho_2 W_1 W_2 \\ \text{или } p_1 - p_2 &= \rho_2 W_2^2 - \rho_1 W_1^2. \end{aligned} \right\} (4.18)$$

Для несжимаемой жидкости  $\rho_2 = \rho_1$ ;  $W_2 = W_1$  и  $p_2 = p_1$ , т. е. при  $R_{x \text{ вн}} = 0$  течение жидкости вдоль цилиндрической струйки не изменяется.

Для сжимаемой жидкости в цилиндрической струйке параметры могут изменяться и при  $R_{x \text{ вн}} = 0$  и  $\Phi_2 = \Phi_1$ . Для этого необходимо лишь изменить плотности  $\rho_2 \neq \rho_1$ , например за счет подвода или отвода тепла.

**Задача 4.5.** Пренебрегая трением определить для форсажной камеры  $X-\Phi$  (см. рис. 0.1)  $R_{x \text{ вл}}$ ,  $\Phi_f/\Phi_x$  и  $p_x - p_f$ , если  $S_x = S_f = 0,5 \text{ м}^2$ ,  $\rho_x = 1,2 \text{ кг/м}^3$ ,  $W_x = 100 \text{ м/с}$ ,  $W_f = 400 \text{ м/с}$ . Как подсчитать ускоряющую газ силу?

Ответ.  $p_x - p_f = 3,6 \cdot 10^4 \text{ Па}$ .

**Задача 4.6.** Определить величину  $R_{x \text{ вн}}$ , действующую на стенки горизонтальной трубы 1—2 сечением  $S=0,2 \text{ м}^2$  при течения по ней воды, если  $p_1 = 10^6 \text{ Па}$ ,  $p_2 = 9,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Что это за сила и как она направлена? Нарисуйте изменение  $W$ ,  $\rho$ ,  $\rho$  вдоль оси трубы.  
 Ответ.  $R_{x \text{ вн}} = 2 \cdot 10^3 \text{ Н}$ .

**Пример 3.** Сила, действующая на стенки криволинейного канала. Для определения равнодействующей сил, с которыми жидкость дей-

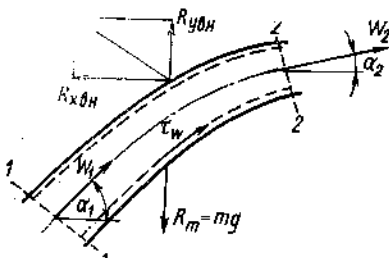


Рис. 4.5. Криволинейный канал

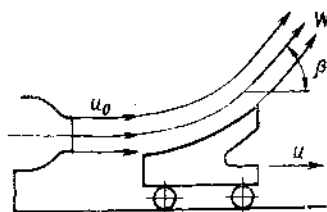


Рис. 4.6. Действие струи на лопатку

ствует на патрубок 1—2, выберем контрольную поверхность 1—2—2—1. Участки контрольной поверхности 1—1 и 2—2 пусть будут нормальны к векторам  $\vec{W}_1$  и  $\vec{W}_2$  (рис. 4.5). Применим (4.11) и (4.12) для осей  $x$  и  $y$ , получим

$$R_{x \text{ вн}} = Gu_1 - Gu_2 + p_1 S_1 \cos \alpha_1 - p_2 S_2 \cos \alpha_2 = \Phi_1 \cos \alpha_1 - \Phi_2 \cos \alpha_2;$$

$$R_{y \text{ вн}} = mg + Gv_1 - Gv_2 + p_1 S_1 \sin \alpha_1 - p_2 S_2 \sin \alpha_2 =$$

$$= mg + \Phi_1 \sin \alpha_1 - \Phi_2 \sin \alpha_2,$$

где  $mg$  — сила тяжести жидкости с массой  $m$ , заключенной в контрольном объеме;  $g = -9,81 \text{ м/с}^2$ .

Для определения суммарной силы, действующей на патрубок, необходимо к  $R_{\text{вн}}$  прибавить силу давления  $R_{\text{в}}$ , приложенную к его наружной поверхности  $\vec{R} = \vec{R}_{\text{вн}} + \vec{R}_{\text{в}}$ , аналогично  $R_x = R_{x \text{ вн}} + R_{x \text{ в}}$  и  $R_y = R_{y \text{ вн}} + R_{y \text{ в}}$ .

**Задача 4.7.** Плоская струя идеальной жидкости плотности  $\rho$  истекает из неподвижного сопла высотой  $h$  со скоростью  $u_0$  и обтекает криволинейную лопатку, приводя ее в движение с постоянной скоростью  $u$  (рис. 4.6). Определить горизонтальную  $R_x$  и вертикальную  $R_y$  составляющие силы, возникающие в результате действия струи на лопатку (без учета силы внешнего давления).

Ответ:  $R_x = \rho_0 h (u_0 - u)^2 (1 - \cos \beta)$ ;  $R_y = mg - \rho_0 h (u_0 - u)^2 \sin \beta$ , где  $m$  — масса жидкости в контрольном объеме над лопаткой.

### 4.3. СИЛА ТЯГИ РЕАКТИВНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ\*

В проточной части воздушно-реактивного двигателя (см. рис. 0.1) тепло подводится к воздуху и количество движения его возрастает, что приводит к возникновению реактивной силы — результирующей сил давления и трения, приложенных со стороны газового потока к поверхностям двигателя. Только часть реактивной силы двигателя — эффективная сила тяги силовой установки  $R_{\text{эф}}$  — идет на совершение полезной работы по преодолению лобового со-

\* Впервые вывод формулы силы тяги ВРД дал основоположник теории ВРД акад. Б. С. Стечкин (см. «Техника воздушного флота», 1929, № 2, с. 96—103).

противления и инерции самого летательного аппарата; остальная часть затрачивается на преодоление сопротивления самой силовой установки.

Итак, эффективная сила тяги силовой установки является результирующей всех сил давления и трения, действующих на ее поверхности со стороны газовых потоков — протекающего через двигатель и обтекающего силовую установку снаружи.

Величина внешнего сопротивления силовой установки зависит от ее компоновки и условий полета и, в малой степени, от режима работы и тяги двигателя.

Сила тяги реактивного двигателя  $R$  является важнейшим его параметром, который необходимо уметь надежно и просто рассчитывать при проектировании, исследованиях и сравнении двигателей.

Силу тяги двигателя  $R$  весьма трудно выделить из общей суммы элементарных сил давления и трения, действующих на установку. Поэтому условия ее определения установлены ОСТ 1 00192—75 (стр. 42, 260). Реактивная тяга (тяги) — «Результирующая всех газодинамических сил (давления и трения), приложенных к внутренней и наружной поверхностям двигателя в предположении, что внешнее обтекание двигателя идеальное».

Основная формула тяги ВРД. Получим на основании этого определения формулу для расчета тяги ВРД. Уточним условия ее расчета.

Определение силы тяги простым суммированием элементарных сил давления и трения по поверхности двигателя неосуществимо из-за сложной формы поверхности и трудностей расчета распределения сил по ней. Поэтому, применим для расчета уравнение количества движения в полных импульсах (4.15), позволяющее определить силу тяги для ВРД любого типа без анализа внутренних процессов, только по состоянию потока на границах контрольной поверхности, которую для упрощения расчета необходимо правильно выбрать.

Остановим двигатель и направим на него окружающую среду со скоростью полета  $W_n$  и параметрами  $\rho_n$ ,  $q_n$ ,  $T_n$  (см. рис. 0.1). Контрольную поверхность  $H'-C'-C'-H'$  выберем цилиндрической, соосной с двигателем, с торцевыми поверхностями  $H'-H'$  и  $C'-C'$ , нормальными к оси двигателя и имеющими такие большие одинаковые площади  $S$ , что цилиндрическая поверхность  $H'-C'$  лежит вне возмущений, вносимых двигателем в поток. В этом случае силы внешнего давления на поверхность  $H'-C'$ , нормальные оси двигателя, взаимно уравновешиваются, касательные напряжения отсутствуют, так как поперечный градиент скорости в окрестностях  $H'-C'$  равен нулю, а также отсутствует обмен количеством движения через эту поверхность между выделенным контрольным объемом и внешней средой. Торцевую поверхность  $H'-H'$  расположим перед двигателем на расстоянии, недоступном для возмущений, вносимых двигателем. Эти возмущения обычно заключаются в том, что струйка невозмущенного потока площадью поперечного сечения  $S_n$  под тормаживается на входе в двигатель в жид-

ком контуре Н—І; скорость ее уменьшается, давление и плотность соответственно увеличиваются. На жидкую поверхность Н—І действует только сила давления, дающая проекцию на ось  $x$ . При таком выборе поверхности Н'—Н' через нее будет протекать невозмущенный поток с параметрами  $W_H, \rho_H, \rho_H$ . Расход воздуха, поступающего в двигатель, обозначим  $G_B$ , а протекающего через контрольную поверхность вне двигателя —  $G$ . Торцевую поверхность  $C'—C'$  совместим со срезом реактивного сопла. Это удобно тем, что в этом сечении имеется четкое разделение потоков: потока газа, истекающего из сопла с расходом  $G_T = G_B + G_{\text{зг}} = \rho_c W_c S_c$ , имеющего постоянную (среднюю) скорость  $W_c > W_H$  и давление  $p_c$ , в общем случае отличное от  $p_H$  ( $p_c \neq p_H$ ) и  $T_c > T_H$ , и внешнего потока воздуха, обтекающего двигатель.

Результирующая сил давления и трения, которая действует на внешний поток со стороны жидкого контура Н—І и внешней поверхности двигателя, вызывает изменение количества движения. Поэтому параметры воздуха в сечении  $C'—C'$  вне площади среза сопла  $S_c$  отличаются от параметров невозмущенного потока  $W_H$  и  $p_H$ .

Идеализация течения при расчете силы тяги ВРД. Условно принимается, что результирующая сил давления и трения по поверхности Н—І—С внешнего потока равна нулю и давление по ней постоянно  $p = p_H$ . Следовательно, количество движения внешнего воздуха не изменяется и параметры его в сечении  $C'—C'$  на площади  $S—S_c$  (вне сопла) сохраняют в точности значение параметров невозмущенного потока  $p_H, \rho_H, W_H$  и неизменный расход  $G$ . В действительности, при принятых условиях, расходы не равны:  $(S - S_H) \rho_H W_H \neq (S - S_c) \rho_H W_H$ , так как  $S_H \neq S_c$ . Однако разница в расходах может быть сделана сколь угодно малой при условии  $\frac{S_c - S_H}{S} \rightarrow 0$ .

Сила воздействия газов на двигатель, в принятых условиях, называется силой тяги ВРД  $R$  и равна разности полных импульсов газа на входе и выходе из всего контрольного объема Н'—C'—C'—H' (см. рис. 0.1). В соответствии с (4.15)

$$R = \Phi_{H'-H'} - \Phi_{C'-C'} = [(G_B + G) W_H + p_H S] - [(G_B + G_{\text{зг}}) W_c + G W_H + p_c S_c + p_H (S - S_c)].$$

Упрощая, получим формулу силы тяги ВРД

$$\left. \begin{aligned} R &= -[G_B (W_c - W_H) + G_{\text{зг}} W_c + S_c (p_c - p_H)] \\ \text{или } R &= -[G_T W_c - C_B W_H + S_c (p_c - p_H)]. \end{aligned} \right\} (4.19)$$

Знак минус показывает, что  $R$  направлена противоположно вектору скорости невозмущенного потока, т. е. в направлении скорости полета.

Такое направление силы тяги считается положительным. Поэтому в дальнейшем знак минус опускается.

Сила тяги ВРД складывается из двух членов — из изменения секундного количества движения массы газа, протекающего через

двигатель —  $(G_r W_c - G_b W_n)$  и статической составляющей  $[S_c(p_c - p_n)]$ , учитывающей разницу в давлении выхлопных газов и давлении окружающей среды.

Характерно, что  $R$  не зависит от величины площади входа в двигатель  $S_1$  и от скорости и давления воздуха в этом сечении, а только от  $G_b$  и скорости полета.

Из общепринятой и наиболее универсальной формулы (4.19) легко получить формулы расчета силы тяги для частных случаев.

Сила тяги ВРД при расчетном режиме работы сопла ( $p_c = p_n$ )

$$R = G_n(W_c - W_n) + G_{br}W_c. \quad (4.20)$$

Сила тяги ВРД, работающего на старте ( $W_n = 0$ )

$$R = (G_n + G_{br})W_c + S_c(p_c - p_n). \quad (4.21)$$

Сила тяги ВРД при пренебрежении расходом топлива, так как он мал по сравнению с расходом воздуха  $G_{br} \leq 0,06G_n$ :

$$R = G_n(W_c - W_n) + S_c(p_c - p_n) \quad (4.22)$$

Сила тяги ракетных двигателей (ЖРД, РДТТ), в которых атмосферный воздух не используется и количество движения рабочего тела изменяется от 0 до  $G_r W_c$ , определяется по формуле

$$R = G_r W_c + S_c(p_c - p_n), \quad (4.23)$$

где  $G_r$  — расход газа.

Внешнее сопротивление силовой установки определяется обычно экспериментально или теоретически при расчете обтекания ее внешним потоком.

При принятом определении силы тяги ВРД (4.19) эффективная тяга рассчитывается по формуле [25]

$$R_{эф} = R - \left[ \int_{S_{n-1}} (p - p_n) dS \right]_x - \left[ \int_{S_{1-c}} (p - p_n) dS \right]_x - X_{тр}, \quad (4.24)$$

где  $\left[ \int_{S_{n-1}} (p - p_n) dS \right]_x$  — дополнительное сопротивление входного

устройства (сопротивление по жидкой линии тока);  $\left[ \int_{S_{1-c}} (p - p_n) dS \right]_x$  — сопротивление сил давления, действующих на

гондолу силовой установки;  $X_{тр}$  — сопротивление трения, действующее на внешнюю поверхность гондолы. При  $p = p_n$  и идеальном обтекании ( $X_{тр} = 0$ ) приходим к формуле тяги.

Вопрос 4.8. Почему сила тяги ВРД зависит от скорости полета  $W_n$ , а сила тяги ракетного двигателя не зависит? Есть ли разница в расчете силы тяги ВРД в условиях старта и ЖРД в полете?

#### 4.4. УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ (ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА)

Уравнение моментов количества движения не является новым независимым уравнением гидрогазодинамики. Оно представляет новую форму уравнения движения, членами которого являются не

силы и не количества движения, а моменты сил и моменты количества движения. Это уравнение широко используется при исследовании вращательного движения жидкости, является основным в теории турбомашин.

Уравнение моментов количества движения для жидкого объема так же, как и для твердого тела, устанавливает, что момент равнодействующей внешних сил относительно произвольной оси равен полной производной по времени от суммарного момента количества движения относительно той же оси, т. е.

$$\sum \vec{R} \times \vec{r} = \frac{d}{dt} \left( \sum m \vec{W} \times \vec{r} \right), \quad (4.25)$$

где  $\vec{r}$  — радиусы векторы внешних сил и элементарных масс, имеющих скорости  $\vec{W}$ , м;  $m \vec{W} \times \vec{r}$  — момент количества движения элементарной массы  $m$ , кгм<sup>2</sup>/с.

Расчетная форма уравнения может быть получена с помощью предельного перехода ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) от рассмотрения движения жидкого объема к контрольному объему. Не повторяя выкладок (4.1), умножив векторно (4.10) на соответствующие радиусы-векторы, получим уравнение моментов количества движения для контрольного объема в векторной форме

$$\sum \vec{R} \times \vec{r} = \frac{d}{dt} \int_V (\rho \vec{W} \times \vec{r}) dV + \int_{S_{\text{вых}}} \rho W_n (\vec{W} \times \vec{r}) dS - \int_{S_{\text{вх}}} \rho W_n (\vec{W} \times \vec{r}) dS, \quad (4.26)$$

устанавливающее, что сумма моментов всех внешних сил, приложенных к жидкости в контрольном объеме относительно произвольной оси, равна частной производной по времени суммарного момента количества движения этой жидкости плюс разность суммарных секундных моментов количеств движения на выходе из контрольного объема и на входе в него относительно той же оси.

Уравнение моментов количества движения для

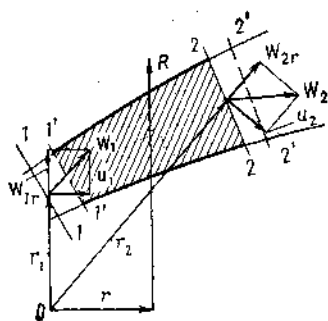


Рис. 4.7. Иллюстрация к выводу уравнения моментов количества движения

конечного участка 1—2 элементарной струйки при установившемся течении относительно оси  $z$ . Спроектируем равнодействующую всех внешних сил, действующих на жидкость в контрольном объеме 1—2 и скорости на входе в контрольный объем и на выходе из него на плоскость  $xy$ . Получим эквивалент плоского течения (рис. 4.7). Разложим скорости на радиальные —  $W_r$  и окружные —  $W_u$  составляющие. Моменты количества движения от радиальных составляющих равны нулю ( $r=0$ ) и уравнение (4.26) принимает



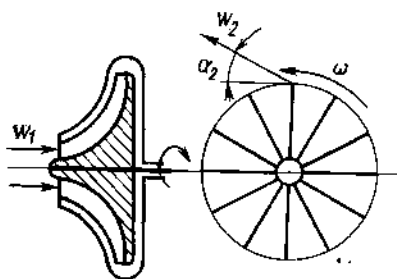


Рис. 4.8. Схема центробежного компрессора

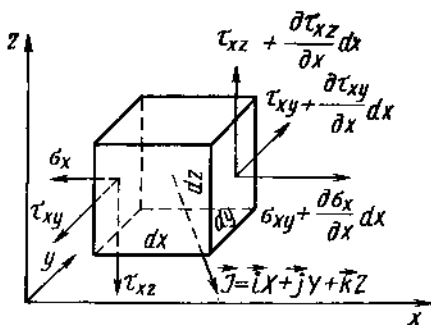


Рис. 4.9. Иллюстрация к выводу дифференциального уравнения движения

простейшую и наиболее часто употребляемую форму

$$M_z = Rr = G(W_{a2}r_2 - W_{a1}r_1). \quad (4.27)$$

В соответствии с (4.27), момент равнодействующей внешних сил относительно произвольной оси равен приращению момента секундного количества движения жидкости  $GW_{u}r$  на участке струйки 1—2, относительно той же оси.

**Задача 4.9.** Укажите условия, необходимые и достаточные для увеличения, уменьшения и постоянства момента секундного количества движения вдоль элементарной струйки относительно заданной оси.

**Вращение жидкости по инерции.** Если момент внешних сил относительно данной оси равен нулю ( $M_z = 0$ ), то момент секундного количества движения сохраняет постоянное значение и жидкость вращается по инерции

$$W_{a2}r_2 = W_{a1}r_1 = W_u r = \text{const}; \quad W_u = \text{const}/r. \quad (4.28)$$

Итак, вращение жидкости по инерции подчиняется закону потенциального вихря (см. п. 3.8, рис. 3.8).

**Задача 4.10.** Подсчитать механическую энергию (мощность), сообщаемую воздуху рабочим колесом центробежного компрессора (рис. 4.8), если дано: расход воздуха  $G = 25$  кг/с; вход — осевой ( $W_1$  параллельна оси);  $W_2 = 495$  м/с;  $\alpha_2 = 25^\circ$ . Ответ  $N = 5 \cdot 10^3$  кВт.

## 4.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В НАПРЯЖЕНИЯХ

Дифференциальные уравнения, удовлетворяющие любой точке пространства, позволяют определить искомые поля (0.1).

На рис. 4.9 представлены произвольно выбранный элементарный жидкий объем  $dV = dxdydz$  постоянной массы  $dm = \rho dV = \rho dxdydz$  и действующие на него напряжения массовых и поверхностных сил. Для примера нанесены только поверхностные напряжения, действующие на грани, нормальные к оси  $x$ . Первый индекс у тангенциального напряжения обозначает ось координат нормальную к грани, на которую оно действует; второй — ось на которую оно проек-

тируется. Индекс у нормального напряжения обозначает ось координат, на которую оно проектируется.

Составим уравнение движения элементарного жидкого объема в проекциях на ось  $x$ , используя проекцию на ось  $x$  уравнения (4.2):

$$d(u\rho dV)/dt = \rho dV du/dt = \Delta R_x. \quad (4.29)$$

Проекция на ось  $x$  равнодействующей  $\Delta R_x$  складывается из проекций массовой силы, сил нормальных и тангенциальных напряжений

$$\begin{aligned} \Delta R_x = & X\rho dV + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) dydz + \\ & + \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx} \right) dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx} \right) dx dy \right]. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки, подставляя  $\Delta R_x$  в (4.29), сокращая на  $dV = dx dy dz$ , выражая полную производную  $du/dt$  в соответствии с (3.6) и производя аналогичные выкладки для осей  $y$  и  $z$ , получим уравнения движения в напряжениях

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \\ &= \rho X + \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right); \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho Y + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right); \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \\ &= \rho Z + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Уравнения (4.30) содержат девять новых неизвестных: три нормальных и шесть тангенциальных. Выразим эти новые неизвестные через основные —  $u, v, w, p, \rho$ , используя обобщенный закон Ньютона о том, что напряжения в жидкости пропорциональны скоростям соответствующих относительных деформаций.

Касательные напряжения равны произведениям соответствующих скоростей относительных деформаций сдвига на коэффициент вязкости жидкости. В соответствии с равенством парных скоростей относительных деформаций сдвига (3.28) равны и парные тангенциальные напряжения, т. е.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Итак, новых неизвестных шесть, а не девять.

Нормальные напряжения вызывают деформацию жидкости не только в направлении их действия, но и в перпендикулярных, приводя к деформациям сдвига и объемной. Наглядной моделью такого явления может служить растяжение резинового стержня, уменьшающегося при этом в диаметре. Исследования показывают, что нормальные напряжения зависят от давления и линейных ( $\epsilon$ ) и объемных ( $e$ ) скоростей относительных деформаций элемента жидкости [1]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu\epsilon_x - \frac{2}{3}\mu e = -p + \sigma_x^* \\ \sigma_y &= -p + 2\mu\epsilon_y - \frac{2}{3}\mu e = -p + \sigma_y^* \\ \sigma_z &= -p + 2\mu\epsilon_z - \frac{2}{3}\mu e = -p + \sigma_z^* \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

где  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$ ,  $\sigma_z^*$  — слагаемые проекций нормальных напряжений, которые так же, как и тангенциальные напряжения (4.31), зависят от вязкости и выражаются через скорости линейных и объемных относительных деформаций и  $\mu$

$$\sigma_x^* = 2\mu\epsilon_x - \frac{2}{3}\mu e = 2\mu \frac{du}{dx} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right). \quad (4.33)$$

Задача 4.11. Напишите выражения  $\sigma_y''$  и  $\sigma_z''$  и выражения  $\sigma_x''$ ,  $\sigma_y''$ ,  $\sigma_z''$  для несжимаемой и для идеальной жидкостей.

Перепишем уравнения движения в напряжениях (4.30) с учетом (4.31) и (4.32) в Н/м<sup>2</sup>.

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right). \quad (4.34)$$

Задача 4.12. Запишите дифференциальные уравнения движения в напряжениях в проекциях на оси  $y$  и  $z$  и опишите физический смысл их. Установите, сколько неизвестных напряжений содержат три уравнения типа (4.34).

## 4.6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА (1845 г.)

Подставим в уравнения (4.30) значения тангенциальных (4.31) и нормальных (4.32) напряжений, примем, что  $\mu$  постоянно по всей области течения. После преобразований и замены  $\mu/\rho = \nu$  получим уравнения Навье-Стокса — дифференциальные уравнения неустановившегося пространственного движения сжимаемой вязкой жидкости

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right); \\ \frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right); \\ \frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right); \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big) + \frac{1}{3} \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \\
 & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \mathbf{v} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \right\} (4.35)$$

Используя символы полной производной (3.6), оператора Лапласа (3.45) и дивергенции (3.27), получим уравнения Навье-Стокса в более компактной форме

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \frac{1}{3} \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{W}; \\
 \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + \frac{1}{3} \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{W}; \\
 \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + \frac{1}{3} \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{W}.
 \end{aligned} \right\} (4.36)$$

Умножая уравнения (4.36) соответственно на  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  и складывая, получим вместо трех одно уравнение Навье-Стокса в векторной форме:

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{J} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{W} + \frac{1}{3} \mathbf{v} \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{W}). \quad (4.37)$$

На основании (4.37) заключаем, что вектор полного ускорения жидкой частицы равен векторной сумме ускорений, вызванных отдельными силами так, как будто бы каждая из этих сил действует на частицу в отдельности. На основании уравнений (4.35) и (4.37) можно сделать аналогичное заключение о проекциях ускорений на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Если (4.37) умножить на плотность  $\rho$ , то придем к выводу, что сила инерции частицы равна векторной сумме всех сил, действующих на нее.

Уравнения (4.35) ... (4.37) лежат в основе современной механики сжимаемой вязкой жидкости. Одним из основных граничных условий, применяемых при их интегрировании, является равенство нулю скорости жидкости на поверхности обтекаемых твердых тел (см. п. 1.5).

Интегрирование уравнений Навье-Стокса для общего случая движения сжимаемой вязкой жидкости встречает непреодолимые математические трудности. Поэтому большинство гидродинамических задач решается приближенно и тогда в уравнениях Навье-Стокса пренебрегают членами, влияние которых не велико по сравнению с остальными.

Уравнения Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости получим, положив в уравнениях (4.35) ... (4.37) последний член, выражающий скорость относительной объемной деформации, равным нулю  $\epsilon = \operatorname{div} \vec{W} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right); \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Точные решения этих уравнений получены лишь для немногих простейших течений.

**Задача 4.13.** Получите дифференциальные уравнения равновесия жидкости (2.1) из уравнений Навье-Стокса (4.35).

#### 4.7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Уравнения Эйлера\* — движения идеальной сжимаемой жидкости получим, положив в уравнении (4.36)  $v=0$ .

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.39)$$

Уравнение Громеки-Лемба (1881 г.). Выразим в уравнениях (4.39) в явном виде проекции ускорений поступательного и вращательного движений частицы. Для этого добавим к  $du/dt$ ,  $dv/dt$  и  $dw/dt$  с положительным и отрицательным знаками следующие выражения соответственно

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x}; \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y}; \quad v \frac{\partial v}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Производя перегруппировку членов, получим выражение для  $du/dt$ :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} + w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

здесь  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{W^2}{2} \right);$   
 $\left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 2\omega_y; \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -2\omega_z.$

Преобразуя аналогично  $dv/dt$  и  $dw/dt$  и подставляя их значения в (4.39), получим уравнения Громеки-Лемба

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{W^2}{2} \right) + 2(w\omega_y - v\omega_z); \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{W^2}{2} \right) + 2(u\omega_z - w\omega_x); \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{W^2}{2} \right) + 2(v\omega_x - u\omega_y). \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

\* Леонард Эйлер в своем трактате «Общие принципы движения жидкостей» (1755 г.) впервые вывел основную систему дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости, положив этим начало аналитической механике сплошной среды с широкими задачами и строгими методами их решения.

Суммы первого и второго членов правой части уравнений (4.40) представляют проекции ускорения поступательного движения частицы, а третьи члены — вращательного. Умножая уравнения (4.40) на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  соответственно и складывая, получим

$$\begin{aligned} & (Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \\ & = \left( \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) + d \left( \frac{W^2}{2} \right) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Интегралы Коши — Лагранжа и Бернулли. Уравнение (4.41) легко интегрируется, если три члена, заключенные в скобки, являются полными дифференциалами некоторых функций, а определитель равен нулю, т. е. когда:

1) массовыми силами являются только силы тяжести, имеющие потенциальную силовую функцию  $U(x, y, z, t)$ , частные производные которой по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны проекциям ускорения массовой силы тяжести  $\partial U/\partial x = X$ ,  $\partial U/\partial y = Y$  и  $\partial U/\partial z = Z$  и, следовательно,  $Xdx + Ydy + Zdz = dU$ . Если ось  $z$  направлена по радиусу земли, то  $X = Y = 0$ , а  $Z = -g$  и дифференциал силовой функции

$$dU = -gdz; \quad (4.42)$$

2) течение баротропно, т. е.  $\rho = \rho(p)$ . В этом случае существует функция  $P(x, y, z)$ , частные производные которой

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \text{ и отсюда} \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = dP = \frac{dp}{\rho}; \end{aligned} \quad (4.43)$$

3) течение потенциально:  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ . Это значит, что определитель для всей области течения равен нулю и существует потенциал скорости  $\varphi(x, y, z, t)$ , т. е.  $\partial \varphi/\partial x = u$ ;  $\partial \varphi/\partial y = v$ ;  $\partial \varphi/\partial z = w$ . Значение смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right); \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \text{ и } \left( \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dy + \frac{\partial w}{\partial t} dz \right) = d \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Подставляя (4.42) ... (4.44) в (4.40), получим уравнение, состоящее только из полных дифференциалов

$$gdz + \frac{dp}{\rho} + d \left( \frac{W^2}{2} \right) + d \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.45)$$

Интеграл уравнения (4.45) называется интегралом Коши — Лагранжа для потенциального баротропного в поле сил

тяжести течения идеальной сжимаемой жидкости. Интегрируя (4.45), получим

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = c(t). \quad (4.46)$$

Произвольная функция времени  $c(t)$  в интеграле Коши — Лагранжа (4.46) постоянна для всей области потенциального течения, является функцией только времени и определяется из начальных условий. Это значит, что сумма четырех членов левой части (4.46) постоянна во всей области потенциального течения и может изменяться только во времени. Уравнение (4.46) содержит четыре неизвестных:  $p = p(x, y, z, t)$ ;  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ ;  $W = W(x, y, z, t)$  и  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ . Для их определения необходимо к (4.46) добавить уравнения: Лапласа (3.45), определяющее  $\varphi$ , определения скорости через  $\varphi$ :  $W^2 = (\partial\varphi/\partial x)^2 + (\partial\varphi/\partial y)^2 + (\partial\varphi/\partial z)^2$  и баротропности  $\rho = \rho(p)$ .

Дифференциальное уравнение Бернулли\* для установившегося баротропного в поле сил тяжести течения идеальной сжимаемой жидкости получим из уравнения (4.45) при  $\partial\varphi/\partial t = 0$

$$gdz + dp/\rho + d(W^2/2) = 0. \quad (4.47)$$

Интеграл Бернулли, называемый также уравнением Бернулли, является результатом интегрирования (4.47)

$$gz + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{W^2}{2} = c. \quad (4.48)$$

Для потенциального течения константа уравнения Бернулли (4.48) постоянна для всей области течения.

Уравнение Бернулли (4.48) остается справедливым и для вихревого течения жидкости, когда определитель (4.41) равен нулю вследствие пропорциональности его строк: 1) первой и третьей ( $dx/u = dy/v = dz/w$ ), 2) второй и третьей ( $\omega_x/u = \omega_y/v = \omega_z/w$ ), 3) первой и второй ( $dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z$ ). Первое условие есть дифференциальное уравнение линий тока (3.9); второе — условие параллельности векторов скорости  $\vec{W}$  и угловой скорости  $\vec{\omega}$ , т. е. условие совпадений линий тока и вихревых линий, когда частицы движутся вдоль линий тока и вращаются вокруг них (винтовое движение; описано впервые проф. Казанского университета И. С. Громека в 1881 г. и носит его имя); третье — дифференциальное уравнение вихревых линий (3.36)].

Итак, константа  $c$  в интегралах Бернулли при вихревом течении идеальной жидкости сохраняет постоянное значение только

\* Даниил Бернулли (1700—1782 г.), академик Российской Академии наук. В 1783 г. была опубликована его книга «Гидродинамика или записки о силах и движении жидкости», в которой было приведено полученное им уравнение, связывающее изменение скорости, давления и высоты расположения движущейся жидкости. Это уравнение и называется его именем. С выходом в свет этой книги в науке появился термин «Гидродинамика».

для данной вихревой линии, а не для всего пространства, как при безвихревом течении. При переходе к другим линиям тока и вихревым линиям константа изменяет свое значение.

Уравнение Бернулли является одним из основных в гидрогазодинамике, так как определяет изменение основных параметров течения — давления, плотности, скорости и высоты положения жидкости.

#### 4.8. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Проинтегрируем дифференциальное уравнение Бернулли (4.47) для конечного участка струйки 1—2 (рис. 4.10) и получим

$$g(z_2 - z_1) + \int_1^2 dp/\rho + (W_2^2 - W_1^2)/2 = 0. \quad (4.49)$$

Работа проталкивания  $\int_1^2 dp/\rho$ , т. е. работа сил давления по перемещению килограмма жидкости из области 1 с давлением  $p_1$  в об-

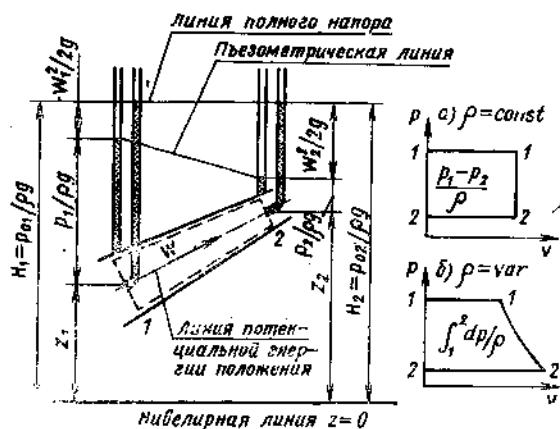


Рис. 4.10. Иллюстрация к уравнению Бернулли для идеальной жидкости

ласть 2 с давлением  $p_2$ , для несжимаемой и сжимаемой жидкостей представлена на диаграмме  $p\rho$  (см. рис. 4.10). Сила давления набегающего потока  $p_1 S_1$  совершает работу, подавая килограмм жидкости через сечение 1 в контрольный объем (линия 1—1). В процессе течения давление изменяется от  $p_1$  до  $p_2$  (в данном случае уменьшается). Под действием силы давления  $p_2 S_2$  килограмм жидкости выталкивается из контрольного объема 1—2 (линия 2—2). Для того, чтобы вычислить  $\int_1^2 dp/\rho$  и получить возможность использовать уравнение Бернулли (4.49), необходимо знать



зависимость  $q=q(p)$ , т. е. термодинамический процесс, происходящий в газе одновременно с течением по каналу 1—2.

**Задача 4.14.** Вычислить интеграл  $\int_1^2 dp/q$  для основных термодинамических процессов и объяснить каким образом в уравнении Бернулли учитывается влияние теплообмена между газом и внешней средой на изменение параметров газа при течении.

Ответ. 1. Изобарный процесс  $p = \text{const}$ ,

$$\int_1^2 dp/q = 0, \quad (4.50)$$

2. Изотермический процесс  $T = \text{const}$ ,

$$\int_1^2 dp/q = \frac{p_1}{q_1} \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (4.51)$$

3. Адиабатный процесс  $p = q^k \text{const}$ ,

$$\int_1^2 \frac{dp}{q} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{q_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = \frac{k}{k-1} RT_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]. \quad (4.52)$$

4. Политропный процесс  $p = q^n \text{const}$ ,

$$\int_1^2 \frac{dp}{q} = \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{q_1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] = \frac{n}{n-1} RT_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]. \quad (4.53)$$

5. Изохорный процесс  $q = \text{const}$ ,

$$\int_1^2 dp/q = \frac{p_2 - p_1}{q}. \quad (4.54)$$

Уравнение Бернулли для несжимаемой идеальной жидкости при течении без обмена механической работой с внешней средой получим, подставив значение  $\int_1^2 dp/q$  из (4.54) в (4.49) и производя элементарные преобразования:

$$gz_1 + \frac{p_1}{q} + \frac{W_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{q} + \frac{W_2^2}{2} = c_1 = c_2, \quad (4.55)$$

или 
$$qgz_1 + p_1 + \frac{qW_1^2}{2} = qgz_2 + p_2 + \frac{qW_2^2}{2} = p_{01} = p_{02} \quad (4.56)$$

или 
$$z_1 + \frac{p_1}{qg} + \frac{W_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{qg} + \frac{W_2^2}{2g} = H_1 = H_2, \quad (4.57)$$

где  $c$  — полная механическая энергия килограмма жидкости или *полный напор*, Дж/кг;

$p_0 = cq$  — полная механическая энергия массы жидкости объемом в кубический метр или *полный напор*, Дж/м<sup>3</sup> или Па;

$H = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{c}{g}$  — полная механическая энергия 1/г, кг жидкости или *полный напор в метрах столба данной жидкости.*

Все три величины имеют одинаковый физический смысл, поэтому в учебной и технической литературе можно встретиться с тем, что любой из них присваивается название *полного напора.*

Составляющие полной механической энергии жидкости наиболее наглядно изображаются и измеряются в метрах столба жидкости (см. рис. 4.10):  $gz$ ,  $\rho gz$ ,  $z$  — потенциальная энергия положения жидкости, отсчитанная от произвольной выбранной нивелированной плоскости, или геометрический напор, Дж/кг; Па; м;

$\frac{p}{\rho}$ ;  $p$ ;  $\frac{p}{\rho g}$  — потенциальная энергия давления\* жидкости или пьезометрический напор, Дж/кг; Па; м;

$gz + \frac{p}{\rho}$ ;  $\rho gz + p$ ;  $z + \frac{p}{\rho g}$  — потенциальная энергия жидкости или гидростатический напор\*\*, Дж/кг; Па; м;

$\frac{W^2}{2}$ ;  $\frac{\rho W^2}{2}$ ;  $\frac{W^2}{2g}$  — кинетическая энергия жидкости или скоростной (динамический) напор, Дж/кг; Па; м.

Пьезометрический напор  $p$  может измеряться от полного вакуума  $p=0$  или, например, от давления окружающей среды  $B_0$  (см. рис. 4.10). В первом случае в обеих частях равенства (4.56) должно подставляться абсолютное давление, во втором — избыточное. Таким образом, начало отсчета энергии произвольно, но должно быть одинаковым для обеих частей равенства. Для измерения кинетической энергии используется трубка полного давления, которая устанавливается в точке измерения открытым концом против вектора скорости жидкости (см. рис. 4.10). Струйка жидкости, подтекающая к открытому концу трубки, полностью затормаживается ( $W=0$ ) и весь скоростной напор превращается в давление, которое в сумме со статическим достигает *давления торможения  $p^*$  (Па) в данной точке, которое называется также полным*

$$\left. \begin{aligned} p^* &= p + \frac{\rho W^2}{2} \\ \text{или } p^*/\rho g &= p/\rho g + W^2/2g \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

\* Потенциальная энергия давления специфическая форма энергии, присущая только жидкости. Она равна произведению плотности жидкости на работу проталкивания при ее переводе из области  $p_1=0$  в область с давлением  $p$  (4.54). Под действием статического давления жидкость поднимается в манометре статического давления (см. рис. 4.10). При этом энергия давления превращается в потенциальную энергию положения  $p/\rho g$ . Потенциальная энергия давления может превращаться в кинетическую, расходоваться на совершение внешней работы или затрачиваться на преодоление сопротивлений.

\*\* Гидростатический напор в поперечном сечении сохраняет для всех точек постоянное значение, хотя составляющие его изменяются (см. рис. 4.10).

Уровень жидкости в трубке полного давления выше уровня жидкости в трубке статического давления на величину скоростной высоты  $W^2/2g$  (см. рис. 4.10). На примере трубки полного давления прослеживается цепочка превращения кинетической энергии в потенциальную энергию давления и энергии давления в потенциальную энергию положения.

**Задача 4.15.** Вода, как идеальная жидкость, при давлении  $p_{\infty} = 10^5$  Па со скоростью  $W = 50$  м/с обтекает шар. Определить давление  $p_{K1}$  в передней и  $p_{K2}$  в задней критических точках.  
 Ответ:  $p_{K1} = p_{K2} = 13,5 \cdot 10^5$  Па.

Энергетический смысл уравнения Бернулли (4.55) ... (4.57) заключается в утверждении закона сохранения полной механической энергии единицы массы несжимаемой жидкости: а) при потенциальном течении для любой точки пространства; б) при вихревом — только вдоль вихревой линии, линии тока и элементарной струйки. Этот закон иногда формируется в виде теоремы трех высот — *в приведенных условиях сумма трех высот — геометрической, пьезометрической и динамической сохраняют неизменное значение* [см. уравнение (4.57), рис. 4.10]. При этом составляющие полной энергии могут взаимопревращаться. Следует иметь в виду, что изменение кинетической энергии несжимаемой жидкости вдоль элементарной струйки ( $W_2^2 - W_1^2$ ) не может задаваться произвольно: в соответствии с уравнением неразрывности это изменение однозначно определяется изменением площади поперечного сечения канала  $W_2 = W_1 S_1 / S_2$ .

Течения в горизонтальной струйке имеют большое практическое значение, так как часто реализуются в системах двигателей и испытательных установок. Они описываются уравнениями Бернулли (4.47) и (4.56) с учетом (4.58) при условии  $z = \text{const}$ , т. е.

$$-dp/\rho = d(W^2/2); \quad (4.59)$$

$$p_1 + \frac{\rho W_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho W_2^2}{2} = p_1^* = p_2^* = \text{const}. \quad (4.60)$$

Итак, увеличение скорости несжимаемой жидкости в горизонтальной элементарной струйке всегда сопровождается уменьшением давления, а уменьшение скорости — увеличением давления вплоть до  $p^*$  при  $W = 0$ . Поэтому скоростной напор широко используется, например, для подачи воды в систему охлаждения двигателей быстроходных катеров, для разрушения горных пород с помощью водяной струи, а в случае сжимаемой жидкости — для сжатия воздуха, поступающего в ВРД в полете и т. д.

В связи с тем, что скорость несжимаемой жидкости может изменяться только вследствие изменения площади сечения, приходим к важному выводу о том, что картина линий тока при течении несжимаемой жидкости однозначно определяет не только изменение скорости, но и статического давления: при сгущении линий тока давление уменьшается, при расширении — увеличивается. Это правило широко используется при анализе движения жидкости и ее взаимодействия с телами.

Метод определения скорости несжимаемой жидкости по измерению статического и полного давлений основан на использовании формулы (4.58), из которой имеем

$$W = \sqrt{2 \frac{p^* - p}{\rho}} = \sqrt{2g\Delta h^*}, \quad (4.61)$$

где  $\Delta h^* = h^* - h = \frac{p^* - p}{\rho g} = W^2/2g$  — скоростная высота.

**Вопрос 4.16.** Во сколько раз необходимо увеличить разность между давлениями торможения и статическим, чтобы скорость увеличилась в два раза?

Максимальная скорость течения или истечения несжимаемой жидкости при заданном  $p^* = \text{const}$  теоретически может быть достигнута при истечении в полный вакуум  $p = 0$ . Из (4.61) имеем

$$W_{\max} = \sqrt{2 \frac{p^*}{\rho}} = \sqrt{2gh^*}. \quad (4.62)$$

В этом случае вся потенциальная энергия давления будет превращена в кинетическую. Получение больших скоростей истечения жидкости имеет существенное практическое значение. Например, топливо в камеры сгорания двигателей впрыскивается с большими скоростями, что обеспечивает необходимое качество смесеобразования.

**Вопрос 4.17.** Каково должно быть полное давление  $p^*$ , чтобы максимальная теоретическая скорость истечения воды и ртути равнялась 100 и 200 м/с? Какие высоты столбов воды и ртути соответствуют этим  $p^*$ ?

Предел применения уравнений неразрывности и Бернулли. На рис. 4.11 изображен канал, по которому течет жидкость при постоянстве  $S_1$ ,  $W_1$ ,  $\rho_1$ ,  $q_1$ ,  $p_1^* = p_2^*$  и при произвольной изменяемой площади сечения 2. Казалось бы, что  $\lim_{S_2 \rightarrow 0} W_2 =$

$= W_1 \frac{S_1}{S_2} = \infty$ . Однако по уравнению Бернулли (4.60) при  $W_2 = \infty$  дав-

ление  $p_2 = p_1 - \frac{\rho (W_2^2 - W_1^2)}{2}$  должно было бы принять значение минус бесконечность, что лишено смысла: абсолютное давление не может быть меньше нуля. Таким образом уравнения неразрывности и Бернулли справедливы лишь до тех пор, пока минимальное давление в канале остается большим нуля.

**Кавитация.** На практике оказывается, что в жидкости давление, равное нулю, недостижимо. Если давление  $p_2$  снижаясь достигнет давления паров этой жидкости, насыщающих пространство при данной температуре  $p_2 = p_t > 0$ , то начнется процесс образования пузырьков пара (кипение) и неразрывность течения капельной жидкости нарушится. Далее смесь капельной жидкости и пузырьков пара попадает в расширяющийся канал (см. рис. 4.11), давление возрастает и пузырьки пара начинают конденсироваться. *Кавитацией называется совокупность процессов образования пу-*

зырьков пара и их конденсации. Кавитация может возникать не только в трубопроводах, но и при внешнем обтекании тел в областях, где возрастают местные скорости и уменьшается давление. Кавитации подвержены быстроходные колеса насосов и турбин и гребные винты. Конденсация пузырьков пара происходит на твердых поверхностях очень быстро и завершается гидравлическим ударом, при котором развивается местное ударное давление на твердые поверхности, достигающее сотен и даже тысяч атмосфер. Поэтому кавитация сопровождается тряской, шумом, снижением

КПД насосов и турбин, эрозией твердых поверхностей, а иногда и выходом из строя агрегатов. Обычно работа гидравлических систем с кавитацией не допускается. Для предотвращения кавитации минимальное давление жидкости в системе должно быть больше давления паров, насыщающих пространство. Одним из эффективных способов предотвращения кавитации является снижение температуры жидкости, что, как известно, приводит к снижению давления паров, насыщающих пространство.

Например, вода при 373 К кипит при  $10^5$  Па, а при 293 К — при  $2,4 \cdot 10^5$  Па. При кавитации многокомпонентных жидкостей (керосины, бензины и т. д.) вначале вскипают легкие фракции, а затем тяжелые, так как  $p_{t \text{ лег. фр.}} > p_{t \text{ тяж. фр.}}$ . Конденсация происходит в обратном порядке. Для оценки возможности возникновения кавитации используется безразмерный критерий — число кавитации

$$\kappa = \frac{p - p_t}{\rho \frac{W^2}{2}} \quad (4.63)$$

Величина  $\kappa$  подсчитывается для сечения, расположенного на входе в тот агрегат, где может возникнуть кавитация. Значение числа кавитации для входного сечения, при котором возникает кавитация в агрегате, называется критическим —  $\kappa_{кр}$ . При  $\kappa > \kappa_{кр}$  гидравлическое сопротивление агрегата и его КПД не зависят от величины  $\kappa$ . При  $\kappa < \kappa_{кр}$  затраты полного напора на преодоление гидравлического сопротивления, вызванного кавитацией, возрастают с уменьшением  $\kappa$ . Явление кавитации используют в кавитационных регуляторах постоянного расхода. Пусть давление  $p_1$  в сечении 1 поддерживается постоянным (см. рис. 4.11), а давление  $p_3$  уменьшается за счет открытия крана. При этом  $p_2$  будет уменьшаться, а скорость  $W_2$  и расход жидкости  $G = W_2 \rho S_2$  увеличиваться до тех пор, пока при  $p_2 = p_t$  в сечении 2 не возникнет кавитация. При дальнейшем уменьшении  $p_3$  парообразование в сечении 2 интенсифициру-

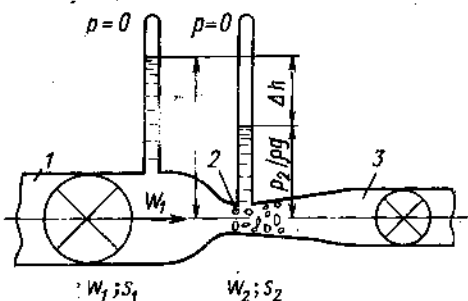


Рис. 4.11. Возникновение кавитации

ется и давление  $p_2$  будет оставаться равным  $p_1$ , а расход — автоматически поддерживаться постоянным.

Расходомер Вентури используется для определения скорости и расхода жидкости, для чего измеряются статические давления  $p_1$  и  $p_2$  в широком  $S_1$  и узком  $S_2$  сечениях (см. рис. 4.11). Выразим из уравнения Бернулли (4.60)  $W_2$ , а отношение  $W_1/W_2$  заменим отношением площадей  $S_2/S_1$  и получим расчетные формулы для скорости в узком сечении

$$W_2 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}} = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{1 - \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2}}, \quad (4.64)$$

где  $\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ .

При течении газа давления измеряются U-образными пьезометрами, заполненными жидкостью, плотность которой  $\rho_n$  отлична от плотности протекающего газа (или жидкости)  $\rho$ . В этом случае формула (4.64) будет иметь вид

$$W_2 = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}} = \sqrt{\frac{2g\rho_n \Delta h}{\rho \left[ 1 - \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}}$$

Формула (4.64) не учитывает гидравлические потери в трубке Вентури, которые в ней не велики.

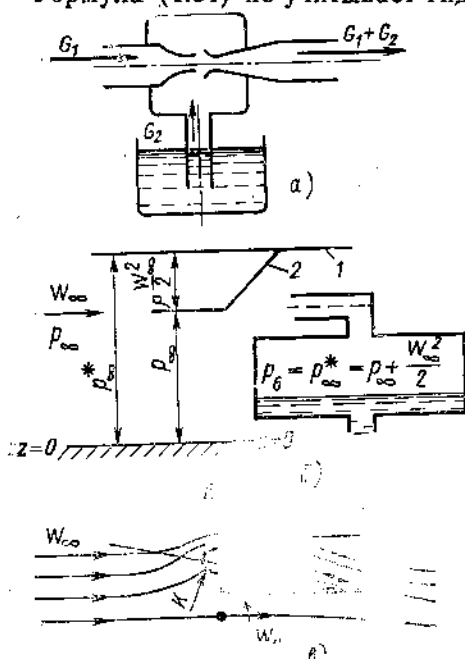


Рис. 4.12. Иллюстрация к задаче (4.18): а — струйный насос; б — скоростной наддув бака; в — обтекание профиля

Задача 4.18. Используя уравнение Бернулли объяснить: а) принцип работы струйного насоса, в котором высоконапорный поток  $G_1$  используется для подачи жидкости  $G_2$  из резервуара (рис. 4.12, а); б) принцип наддува топливного самолётного бака для предотвращения кавитации в топливной системе при полетах на большой высоте (рис. 4.12, б); в) причину появления подъемной силы крыла при заданной картине линий тока (рис. 4.12, в).

Сила взаимодействия бесконечно длинного цилиндра с идеальной несжимаемой жидкостью при установившемся поперечном обтекании (см. рис. 3.10). Единственной силой при рассматриваемых условиях может быть равнодействующая сил нормальных к поверхности давлений. Для определения распределения давления по поверхности цилиндра восполь-

зуюемся данными, полученными при кинематическом исследовании данного течения (см. п. 3.8). Запишем уравнение Бернулли (4.56) для элементарной струйки, практически совпадающей с нулевой линией тока. Сечение 1—1 выберем в невозмущенном потоке, где скорость  $W_1$  и давление  $p_1$ , а текущее сечение — на поверхности цилиндра. В этом сечении скорость  $W$  определяется по формуле (3.62), а давление  $p$  является искомым. Пренебрегая изменением  $z$ , получим

$$p - p_1 = \rho \frac{W_1^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta). \quad (4.65)$$

В гидрогазодинамике принято выражать изменение давления на поверхности тела числом скоростных напоров или безразмерным коэффициентом давления  $\bar{p}$

$$\bar{p} = \frac{p - p_1}{\rho \frac{W_1^2}{2}} = 1 - 4 \sin^2 \theta. \quad (4.66)$$

На рис. 4.13 приведено распределение по поверхности цилиндра относительной окружной скорости  $W_u/W_1$  и коэффициента давления  $\bar{p}$ . В критических точках  $A$  и  $B$  скорость жидкости равна нулю и давление равно давлению торможения в невозмущенном потоке ( $\bar{p} = 1$ ). По мере уменьшения угла  $\theta$  скорость увеличивается, а давление уменьшается. При  $150^\circ$  и  $30^\circ$  ( $210^\circ$  и  $330^\circ$ ) скорость и давление идеальной жидкости на поверхности цилиндра становятся такими же, как в невозмущенном потоке. При  $\theta = 90^\circ$  и  $270^\circ$  давление снижается на три скоростных напора по сравнению с давлением невозмущенного потока и за счет этого скорость возрастает в два раза.

Парадокс Даламбера — Эйлера. В силу полной симметрии распределения давления по поверхности цилиндра равнодействующая сил давления равна нулю. Полученный вывод называется парадоксом Даламбера — Эйлера: при беззвучном безотрывном обтекании тел идеальной жидкостью сила лобового сопротивления равна нулю: сила трения отсутствует, а вторая составляющая — сила сопротивления давления, действующая на переднюю часть шара, уравновешивается силой давления на кор-

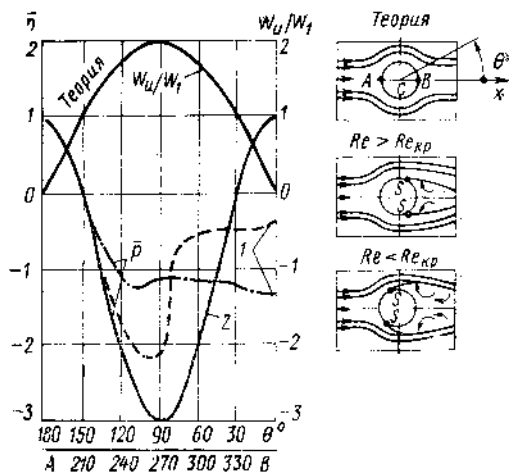


Рис. 4.13. Распределение скорости и коэффициента давления по поверхности цилиндра:

1—опыт; 2—теория

мовую часть. Парадокс состоит в несоответствии этого вывода с экспериментальными данными — при обтекании тел реальными жидкостями всегда возникает сила лобового сопротивления (см. п. 18.2).

#### 4.9. СИЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ И ЦИЛИНДРОМ ПРИ ЦИРКУЛЯЦИОННОМ ОБТЕКАНИИ ЕГО. ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ

Трение между поверхностью цилиндра и идеальной жидкостью отсутствует. Поэтому сила взаимодействия является равнодействующей сил давления жидкости на поверхность цилиндра. Формулы (3.64), (3.65) и рис. 3.11, полученные при кинематическом исследовании течения (п. 3.9), показывают, что при циркуляционном обтекании цилиндра сохраняется симметрия линий тока относительно оси  $y$ , перпендикулярной к вектору скорости невозмущенного потока  $W_\infty$ . В результате этого симметрично и распределение давлений относительно оси  $y$  и сила лобового сопротивления  $R_x=0$ , что соответствует парадоксу Даламбера — Эйлера. Симметрия линий тока относительно оси  $x$  при циркуляционном обтекании отсутствует. Руководствуясь картиной линий тока и уравнением Бернулли (4.59) заключаем, что сила давления на верхнюю поверхность цилиндра будет меньше, чем на нижнюю. Равнодействующая этих сил направлена вдоль оси  $y$  перпендикулярно к вектору скорости невозмущенного потока, т. е. является подъемной силой  $R_y$ .

Рассчитаем эту силу как сумму элементарных сил давления, действующих на поверхность цилиндра длиной в один метр, Н/м:

$$R_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta dl, \quad (4.67)$$

где знак минус учитывает, что при  $\sin \theta > 0$  сила давления жидкости на цилиндр направлена вниз, т. е. отрицательна, а при  $\sin \theta < 0$  — вверх, т. е. положительна. Подставляя в (4.67) значение

$dl = r_0 d\theta$  (см. рис. 3.11),  $p = c - \rho \frac{W^2}{2}$  из уравнения Бернулли (4.55)

при  $z = \text{const}$ ,  $W$  для нулевой линии тока из (3.65) и произведя элементарные преобразования, найдем

$$R_y = -cr_0 \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + \frac{\rho_\infty \Gamma^2}{8\pi^2 r_0} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta - \\ - \frac{\rho_\infty W_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + 2\rho_\infty W_\infty^2 r_0 \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta,$$



учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0, \text{ а } \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi,$$

получим формулу Жуковского для определения подъемной силы, Н/м

$$R_y = -\rho_{\infty} W_{\infty} \Gamma. \quad (4.68)$$

В рассматриваемом случае циркуляция скорости отрицательна и подъемная сила положительна, т. е. направлена вверх.

Формула Жуковского пригодна для любого контура, обтекаемого плоскопараллельным потоком идеальной жидкости. Обычно знак минус в формуле (4.68) опускают, а направление подъемной силы определяют в соответствии с теоремой Жуковского о подъемной силе (1906 г.), которую можно сформулировать следующим образом.

*При поперечном циркуляционном обтекании идеальной жидкостью бесконечного цилиндра на его участок длиной в один метр действует подъемная сила (сила Жуковского), перпендикулярная к вектору скорости невозмущенного потока и равная произведению плотности тока невозмущенного потока на циркуляцию скорости около цилиндра. Направление подъемной силы укажет вектор скорости невозмущенного потока, если его повернуть на прямой угол в сторону, обратную направлению циркуляции скорости.*

**Задача 4.19.** Определите зависимость подъемной силы цилиндра от скорости  $W_{\infty}$  для условий рис. 3.11. Ответ:  $R_y = 2\pi\rho_{\infty} W_{\infty}^2$ .

Движение, аналогичное рассматриваемому, можно наблюдать при обтекании вращающихся тел реальной жидкостью, так как вращающиеся тела увлекают вязкую жидкость в циркуляционное движение (величина циркуляции скорости определяется окружной скоростью поверхности тела). В этом случае возникновение силы, поперечной к вектору скорости невозмущенного потока, называется эффектом Магнуса. Эффект Магнуса использовался при создании ротора Флетнера — вертикальной, вращаемой башни, устанавливаемой на палубе корабля и создающей при ветре силу тяги, перпендикулярную к направлению ветра. Аналогично теннисные и волейбольные мячи, в зависимости от направления и интенсивности закрутки, меняют направление полета самым неожиданным образом\*.

\* При рассмотрении циркуляционного обтекания цилиндра потенциальным потоком идеальной жидкости величина циркуляции скорости задается произвольно.

#### 4.10. ПЛОСКОЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Получим дифференциальное уравнение потенциала скорости для заданных условий. Для этого уравнение неразрывности (3.18) запишем в виде

$$u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \frac{\partial \varrho}{\partial y} + \varrho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.69)$$

Частные производные плотности выразим через частные производные давления и скорость звука  $a^2 = dp/d\varrho$ , учтя, что для баротропного течения  $\partial \varrho / \partial p = d\varrho / dp$ :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{d\varrho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{d\varrho}{dp} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (4.70)$$

Частные производные давления в (4.70) заменим их значениями из уравнений Эйлера (4.39), в которых пренебрежем массовыми силами:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\frac{\varrho}{a^2} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = -\frac{\varrho}{a^2} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.71)$$

Подставляя (4.71) в (4.69) и заменяя по (3.43)

$$\begin{aligned} \partial u / \partial x &= \partial^2 \varphi / \partial x^2; \quad \partial v / \partial y = \partial^2 \varphi / \partial y^2 \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x &= 2 \partial^2 \varphi / \partial x \partial y, \end{aligned}$$

получим основное дифференциальное уравнение газовой динамики для плоского потенциального установившегося течения газа

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (a^2 - v^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (4.72)$$

позволяющее получить поле скоростей. Если  $u \ll a$  и  $v \ll a$ , то уравнение (4.72) переходит в уравнение Лапласа (3.45) для несжимаемой жидкости. Следовательно, при *небольших дозвуковых скоростях течения газа можно рассматривать как течение несжимаемой жидкости*. При  $W < a$  (4.72) называется уравнением эллиптического типа, при  $W = a$  — параболического и при  $W > a$  — гиперболического. Метод решения уравнения параболического типа был предложен С. А. Чаплыгиным в 1896 г. В этой работе были заложены основы газовой динамики, как самостоятельной науки. Этот метод в последствии был развит С. А. Христиановичем. Более простой, но менее точный метод линеаризации уравнения (4.72) был разработан Л. Прандтлем и английским ученым Глауэром. Для решения уравнения гиперболического типа используется метод характеристик.

#### 4.11. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Пять основных уравнений гидрогазодинамики — состояния (1.1), неразрывности (3.18) и три уравнения движения (4.35) содержат шесть искомых параметров  $u, v, w, p, \varrho, T$ . Шестое — урав-

нение энергии необходимо для того, чтобы замкнуть систему основных уравнений. Используем методику вывода интегрального уравнения движения (см. п. 4.1, рис. 4.1). Применим закон М. В. Ломоносова\* о сохранении и превращении энергии к жидкому объему, который в момент  $t$  занимает контрольный объем  $III+I$  и имеет полную энергию  $E_t = E_{III t} + E_{I t}$ . Пусть за время  $\Delta t$  жидкий объем переместится в положение  $I+II$  и его полная энергия изменится до  $E_{t+\Delta t} = E_{I t+\Delta t} + E_{II t+\Delta t}$  за счет обмена энергией с внешней средой. Запишем это в виде уравнения закона сохранения энергии для жидкого объема

$$Q - L = E_{t+\Delta t} - E_t, \quad (4.73)$$

где  $Q$  — внешнее тепло, Дж;  $L$  — внешняя механическая работа, Дж.

Уравнение (4.73) устанавливает, что количество энергии, которой жидкий объем обменялся с внешней средой, равно изменению его полной энергии за тот же период времени.

Правило знаков устанавливается в соответствии с первым законом термодинамики:

$Q > 0$  — тепло подводится из внешней среды к жидкому объему и полная энергия его возрастает;

$Q < 0$  — тепло отводится от жидкого объема во внешнюю среду и полная энергия его уменьшается;

$L > 0$  — работа совершается жидкостью и отводится во внешнюю среду, как это, например, происходит в гидравлических или газовых турбинах. При этом полная энергия жидкого объема уменьшается;

$L < 0$  — работа подводится к жидкому объему извне, как это происходит, когда жидкость протекает через насос или компрессор. При этом полная энергия жидкого объема возрастает.

Работу турбины, насоса, компрессора называют технической ( $L_{\text{тех}}$ ). Техническая работа может производиться только в том случае, если жидкость протекает по движущимся каналам (межлопаточные каналы вращающихся колес лопаточных машин). Понятие «внешней работы» шире: оно, например, включает работу, которую может совершать быстротекущая струйка над рядом текущей, ускоряя ее за счет трения. Эта составляющая работы трения относится к внешней механической работе, но не к работе трения, как мы ее привыкли понимать, так как в этом случае она идет на увеличение кинетической энергии медленно текущей струйки и диссипации энергии нет.

В уравнении энергии имеет значение не абсолютная величина полной энергии, а лишь разность ее значений для двух положений жидкого объема. Поэтому, в состав полной энергии включают ее составляющие, которые могут измениться при изучаемом движении жидкости. Опыты показывают, что к составляющим полной

\* Ломоносов М. В. (1711—1765 гг.) впервые высказал основные положения законов сохранения материи и энергии, опередив на столетие развитие науки.

энергии несжимаемой жидкости (4.55), для газов необходимо добавить внутреннюю энергию  $u = c_v T$ . Это объясняется тем, что изменение температуры газа в процессе движения приводит к изменению плотности, т. е. к совершению работы сжатия или расширения и изменению составляющих механической энергии. Следовательно, для газа, Дж:

$$E_t = \int_V \left( u + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} \right) \rho dV. \quad (4.74)$$

Интегральное уравнение энергии для контрольного объема. Устремим  $\Delta t$  к сколь угодно малой величине  $\Delta t \rightarrow dt \rightarrow 0$ . При этом часть жидкого объема  $I_{t+\Delta t}$  совпадает с контрольным объемом, а тепло и техническая работа примут элементарные значения  $dQ$  и  $dL_{\text{тех}}$ \*

Выполним с (4.73) этот предельный переход, разделим полученное уравнение на  $dt$  и перейдем к уравнению энергии для контрольного объема, Дж/с:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dL_{\text{тех}}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{t+\Delta t} - E_t}{\Delta t}. \quad (4.75)$$

Рассмотрим более подробно правую часть (4.75)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{t+\Delta t} - E_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{I t + \Delta t} - E_{I t}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{I I t + \Delta t} - E_{I I t}}{\Delta t}. \quad (4.76)$$

**Задача 4.20.** Используя (4.74), (4.75), (4.76) и рассуждения, связанные с выводом (4.8) и (4.9), получите интегральное уравнение энергии (Дж/с) для контрольного объема в виде

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} - \frac{dL_{\text{тех}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( u + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} \right) \rho dV + \\ + \int_{S_{\text{вых}}} \left( u + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} \right) \rho W_n dS - \int_{S_{\text{вх}}} \left( u + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} \right) \rho W_n dS. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Итак, количество энергии, которой жидкость, протекающая через контрольный объем, обменивается с внешней средой в единицу времени, равно изменению полной энергии жидкости, содержащейся в контрольном объеме за тоже время (частная производная по времени) плюс разность полных энергий секундных расходов жидкости на выходе из контрольного объема и на входе в него.

**Задача 4.21.** Перечислите составляющие полной энергии для сжимаемой и несжимаемой жидкостей.

**Задача 4.22.** Дайте формулировку закона сохранения энергии для контрольного объема при установившемся течении.

\* Подчеркнем, что  $dQ$  и  $dL_{\text{тех}}$  это очень малые количества внешнего тепла и внешней механической работы, которыми жидкость, протекающая через контрольный объем, обменивается с внешней средой за время  $dt$ , но ни в коем случае не дифференциалы каких-либо функций.

Уравнение энергии для конечного участка элементарной струйки при установившемся течении сжимаемой вязкой жидкости. Для установившегося течения первый член правой части (4.77) равен нулю. Для произвольного участка элементарной струйки 1—2 (см. рис. 4.2)  $S_{\text{вх}} = S_1$ ,  $S_{\text{вых}} = S_2$ , суммарная удельная энергия жидкости  $u + gz + \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2}$  по сечению элементарной струйки не изменяется и может быть вынесена за знаки интегралов с индексами 1 и 2 соответственно. Оставшиеся интегралы равны расходам жидкости через сечения 1—1 и 2—2 и, вследствие стационарности течения, равны между собой

$$\int_{S_1} \rho W_1 dS = \int_{S_2} \rho W_2 dS = G,$$

т. е.

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dL_{\text{tex}}}{dt} = G \left[ \left( u_2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{W_2^2}{2} \right) - \left( u_1 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{W_1^2}{2} \right) \right]. \quad (4.78)$$

Обозначим удельное внешнее тепло на участке 1—2 через  $q = \frac{dQ}{Gdt}$ ,

Дж/кг, а удельную внешнюю работу — через  $l_{\text{tex}} = \frac{dL_{\text{tex}}}{Gdt}$  и получим интегральное уравнение энергии для произвольного участка 1—2 элементарной струйки, Дж/кг:

$$\left. \begin{aligned} q - l_{\text{tex}} &= (u_2 - u_1) + g(z_2 - z_1) + \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \frac{(W_2^2 - W_1^2)}{2}; \\ q - l_{\text{tex}} &= \left( u_2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{W_2^2}{2} \right) - \left( u_1 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{W_1^2}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

Дифференциальное уравнение энергии для элементарной струйки. Уменьшим расстояние между сечениями 1—2 до бесконечно малой величины, в пределе получим из (4.79) дифференциальное уравнение энергии для элементарной струйки

$$dq - dl_{\text{tex}} = du + pdv + vdp + d \frac{W^2}{2} + gdz. \quad (4.80)$$

#### 4.12. ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКЕ

Общее тепло  $dq_{\Sigma}$  (Дж/кг), подводимое к газу, движущемуся или неподвижному, определяется по уравнению первого закона термодинамики

$$dq_{\Sigma} = dq + dq_{\text{тр}} = dq + dl_{\text{тр}} = du + pdv, \quad (4.81)$$

где  $p dv$  — работа деформации газа (расширения или сжатия);  $du = c_v dT$  — изменение внутренней энергии;  $dq$  — внешнее тепло;  $dq_{\text{тр}} = dl_{\text{тр}} > 0$  — тепло трения.

Работа вязких напряжений или работа трения  $dl_{\text{тр}} > 0$  затрачивается жидкостью на преодоление гидравлических сопротивлений — трения, завихрений, ударов и т. д. В дальнейшем, при отсутствии оговорок, мы всегда будем считать, что работа трения полностью превращается в тепло трения, которое воспринимается той же жидкостью.

В действительности не вся работа трения превращается в тепло трения: малая доля ее может переходить в кинетическую энергию жидких частиц (см. п. 4.3). Важно, что эта энергия остается внутри жидкости (как и  $Q_{\text{тр}}$ ) и не участвует в обмене с внешней средой.

Вычтем из уравнения энергии (4.80) уравнение первого закона термодинамики (4.81), проинтегрируем и получим *обобщенное уравнение Бернулли или уравнение баланса механических энергий*, Дж/кг:

$$-\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + l_{\text{тех}} + l_{\text{тр}}, \quad (4.82)$$

показывающее, что работа проталкивания (сил давления) равна сумме работ по преодолению гидравлических сопротивлений ( $l_{\text{тр}}$ ), технической ( $l_{\text{тех}}$ ) и изменений потенциальной энергии положения и кинетической энергии направленного движения жидкости.

Уравнения энергии (4.73) ... (4.80) не содержат в явном виде работы трения и теплоты трения, а уравнение Бернулли (4.82) — внешней теплоты. Может создаться ошибочное мнение, что эти уравнения не учитывают всех особенностей течений. В действительности эти уравнения справедливы как для течений с внешним теплом, так и с теплом трения и при их отсутствии. Трение не изменяет баланса полных энергий, поэтому не присутствует в явном виде в уравнениях энергии. Однако в уравнениях энергии трение автоматически учитывается тем, что взаимопревращение отдельных составляющих полной энергии в процессах с гидравлическим сопротивлением и без него, различно. Внешнее тепло в уравнении Бернулли учитывается при вычислении интеграла работы проталкивания (4.50) ... (4.54).

Обобщенное уравнение Бернулли для элементарной струйки (Дж/кг) несжимаемой жидкости можно записать в следующей форме

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{W_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{W_2^2}{2} + l_{\text{тех}} + l_{\text{тр}}. \quad (4.83)$$

**Задача 4.23.** Запишите обобщенное уравнение Бернулли (4.83) так, чтобы размерность его членов была Па и м.

**Вопрос 4.24.** Как изменится полная энергия несжимаемой жидкости и газа, если на участке 1—2 элементарной струйки имеются гидравлические сопротив-

ления ( $i_{тр} = 10^4$  Дж/кг), а техническая работа не совершается? Чем объясняется различие?

**Задача 4.25.** Определить мощность привода шестеренчатого насоса ТРД (рис. 4.14), если расход керосина  $G = 2,5$  кг/с,  $W_1 = 2$  м/с,  $\rho = 820$  кг/м<sup>3</sup>,  $p_1 = 2 \cdot 10^5$  Па,  $p_2 = 52 \cdot 10^5$  Па, КПД насоса  $\eta = 0,65$ . Укажите направление вращения верхней шестерни.

Ответ: Мощность привода 23,5 кВт.

**Задача 4.26.** Рассчитать мощность Саяно-Шушенской ГЭС, если высота плотины  $z = 200$  м, расход воды в реке Енисее  $V = 3380$  м<sup>3</sup>/с, КПД турбины  $\eta = 0,96$ .

Ответ:  $N = 6,4 \cdot 10^6$  кВт.

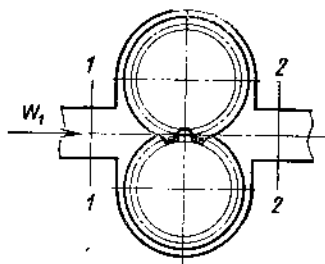


Рис. 4.14. Схема шестеренчатого насоса

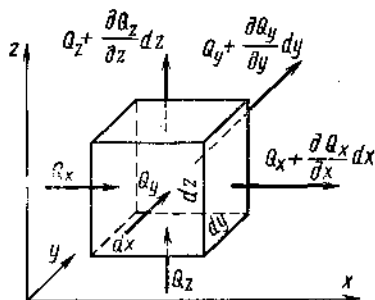


Рис. 4.15. Иллюстрация к определению тепла теплопроводности

#### 4.13. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Мысленно выделим в произвольной точке пространства элементарный жидкий объем  $dV = dx dy dz$ , имеющий массу  $dm = \rho dV$  (рис. 4.15). Рассмотрим обмен энергией между элементом и внешней средой и возможные превращения энергии при движении элемента за время  $dt$ . Прибавим к правой части уравнения (4.81) члены  $v dp$  со знаком плюс и минус. Получим уравнение первого закона термодинамики в форме\*

$$dq + dq_{rp} = di - v dp = C_p dT - v dp. \quad (4.84)$$

Разделим уравнение (4.84) на  $dt$  и умножим на  $\rho$ , учтем, что  $\rho v = 1$ , тогда, Дж/(м<sup>3</sup>·с):

$$\rho \frac{dq}{dt} + \rho \frac{dq_{rp}}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt}, \quad (4.85)$$

т. е. суммарное тепло идет на изменение энтальпии газа и на работу проталкивания. Выразим члены левой части (4.85) через параметры потока и коэффициенты, характеризующие свойства жидкости, примем, что частица получает внешнее тепло только за счет теплопроводности жидкости. Тепловой поток  $Q_x$ , поступающий че-

\*  $du + pdv + vdp - vdp = du + d(pv) - vdp = di - vdp$ , где  $di = du + d(pv) = C_p dT$  — элементарное изменение энтальпии газа, Дж/кг.

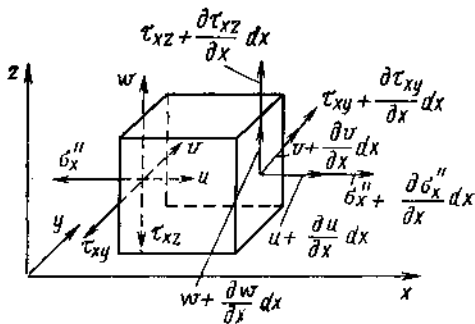


Рис. 4.16. Иллюстрация к определению работы дополнительных вязкостных напряжений

рез грань, нормальную к оси  $x$ , определяется по закону Фурье, Дж/с:

$$Q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} dydz, \quad (4.86)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности жидкости, зависящий от природы жидкости и от температуры, Дж/(м. с. град);  $\frac{\partial T}{\partial x}$  — гра-

диент температуры в направлении оси  $x$ . Тепло, полученное за счет теплопроводности, равно разности между теплом, подведен-

ным к элементу и отведенным от него (см. рис. 4.15):

$$\rho \frac{dq}{dt} dV = \left[ Q_x - \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) \right] dydz + \left[ Q_y - \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) \right] dx dz + \left[ Q_z - \left( Q_z + \frac{\partial Q_z}{\partial z} dz \right) \right] dx dy.$$

Раскрывая скобки и деля на  $dV = dx dy dz$ , получим, Дж/(м<sup>3</sup>·с):

$$\rho \frac{dq}{dt} = - \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) = - \operatorname{div} \vec{Q}. \quad (4.87)$$

Выражая в (4.87)  $Q_x$ ,  $Q_y$  и  $Q_z$  по закону Фурье (4.86) и полагая  $\lambda = \text{const}$ , что допустимо, если изменение температуры в рассматриваемой области невелико, найдем, Дж/(м<sup>3</sup>/с):

$$\rho \frac{dq}{dt} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \lambda \Delta T. \quad (4.88)$$

При учете зависимости  $\lambda$  и  $C_p$  от температуры уравнение энергии существенно усложнится.

Теплота трения. Суммарная работа  $\rho \frac{dI_{\Sigma}}{dt}$  вязкостных напряжений — тангенциальных  $\tau$  и дополнительных нормальных  $\sigma''$ , приложенных к элементу жидкости, равна сумме произведений каждого напряжения на соответствующую проекцию скорости. Работа вязкостных напряжений, действующих на грани, перпендикулярные к оси  $x$  (рис. 4.16), равна

$$\rho \frac{dI_x}{dt} = \frac{1}{dx dy dz} \left[ -\sigma_x'' u - \tau_{xy} v - \tau_{xz} w + \left( \sigma_x'' + \frac{\partial \sigma_x''}{\partial x} dx \right) \left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) \left( w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) \right] dy dz.$$



Раскрывая скобки, опуская члены высшего порядка малости и производя аналогичные выкладки для  $l_y$  и  $l_z$ , найдем, Дж/(м<sup>3</sup>·с):

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dl_x}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x'' u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w); \\ \rho \frac{dl_y}{dt} &= \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} u + \sigma_y'' v + \tau_{yz} w); \\ \rho \frac{dl_z}{dt} &= \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_z'' w). \end{aligned} \right\} \quad (4.89)$$

Общая работа сил дополнительных вязкостных напряжений равна сумме работ вдоль осей  $x, y, z$ :

$$\rho \frac{dl_z}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x'' u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} u + \sigma_y'' v + \tau_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z} \times \\ \times (\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_z'' w). \quad (4.90)$$

Эта работа складывается из двух качественно отличных работ

$$l_z = l_R + l_{\text{тр}}, \quad (4.91)$$

где  $l_R$  — работа равнодействующей вязкостных напряжений. Эта работа преобразуется в кинетическую энергию элемента и равна сумме произведений компонентов равнодействующей вязкостных напряжений (4.33) на соответствующие проекции скорости

$$\rho \frac{dl_R}{dt} = \left( \frac{\partial \sigma_x''}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) u + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y''}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) v + \\ + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z''}{\partial z} \right) w, \quad (4.92)$$

$l_{\text{тр}}$  — работа трения, превращающаяся полностью в тепло трения, равна разности суммарной работы вязкостных напряжений и работы равнодействующей этих напряжений

$$\rho \frac{dq_{\text{тр}}}{dt} = \rho \frac{dl_{\text{тр}}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} (l_z - l_R) = \left( \sigma_x'' \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \left( \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y'' \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} + \sigma_z'' \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (4.93)$$

Заменяя в (4.93)  $\tau$  и  $\sigma''$  их значениями из (4.31) и (4.33), получим теплоту трения, Дж/(м<sup>3</sup>·с):

$$\rho \frac{dq_{\text{тр}}}{dt} = \rho \frac{dl_{\text{тр}}}{dt} = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}. \quad (4.94)$$

Подставляя в (4.85) значение  $\rho \frac{dq}{dt}$  по (4.88), получим дифференциальное уравнение энергии, Дж/(м<sup>3</sup>/с):

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho \frac{dq_{\text{тр}}}{dt}, \quad (4.95)$$

где  $\rho \frac{dq_{\text{тр}}}{dt}$  определяется по (4.94).

Дифференциальное уравнение энергии (4.95) показывает, что полное изменение энтальпии газа во времени (полная производная) равно сумме работы проталкивания и тепла, получаемого элементом за счет теплопроводности и трения. Оно устанавливает связь между всеми шестью искомыми параметрами течения  $u, v, w, p, \rho, T$  и характеристиками индивидуальной жидкости  $C_p$  и  $\lambda$ .

Разделив уравнение (4.95) на  $\rho C_p$ , получим, К/с:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{dp}{dt} + \chi \Delta T + \frac{1}{C_p} \frac{dq_{\text{тр}}}{dt}, \quad (4.96)$$

где  $\chi = \frac{\lambda}{\rho C_p}$  — коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$  — представляет отношение тепла, подведенного теплопроводностью в единицу времени через единицу площади при единичном градиенте температуры ( $\lambda$ ) к количеству тепла, необходимому для нагревания единицы объема жидкости на один градус ( $\rho C_p$ ). Чем больше  $\chi$ , тем быстрее прогревается жидкость при неустановившемся режиме и заданном тепловом потоке, т. е. тем выше «температуропроводность» жидкости.

**Задача 4.27.** Дать подробную запись всех четырех членов уравнения (4.96).

#### 4.14. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ЗАКОНА ТЕРМОДИНАМИКИ

Второй закон термодинамики и его уравнение устанавливают направление протекания самопроизвольных процессов: в конечных изолированных системах самопроизвольные реальные процессы протекают необратимо, так что приближают систему к состоянию равновесия, т. е. сопровождаются увеличением энтропии системы. Для неизолированных систем, участвующих в энергетическом обмене с внешней средой, уравнение второго закона термодинамики определяет изменение энтропии  $ds$  в элементарном процессе, Дж/(кг·К):

$$ds = \frac{dq_{\Sigma}}{T} = \frac{dq + dq_{\text{тр}}}{T}. \quad (4.97)$$

Проинтегрировав (4.97) с использованием уравнения первого закона  $dq_{\Sigma} = dq + dq_{\text{тр}} = du + pdv$ , получим формулы для расчета изменения энтропии совершенного газа в процессе 1—2 по значению параметров в состоянии 2 и 1

$$\left. \begin{aligned} s_2 - s_1 &= C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} = C_V \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{k-1}; \\ s_2 - s_1 &= C_V \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \ln \frac{v_2}{v_1} = C_V \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^k; \\ s_2 - s_1 &= C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = C_V \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^k \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{-(k-1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

В заключение приведем систему основных уравнений гидрогазодинамики.

1. Уравнение неразрывности (3.18):  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{W})$ .

Уравнения количества движения в проекциях на оси координат (4.36)

2.  $\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \Delta u + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{W}$ ;

3.  $\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \nu \Delta v + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{W}$ ;

4.  $\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \Delta w + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{W}$ .

5. Уравнение энергии (4.96):  $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho C_p} \frac{dp}{dt} + \chi \Delta T + \frac{1}{C_p} \frac{dq_{\text{гр}}}{dt}$ .

6. Уравнение состояния (1.1):  $p = \rho RT$ .

7. Уравнение второго закона термодинамики (4.97):

$$ds = \frac{dq + dq_{\text{гр}}}{T}.$$

Эти уравнения описывают самые различные процессы течения жидкостей, удовлетворяющие условиям, принятым при выводах. Поэтому они имеют множество решений. Решение конкретной задачи возможно, если сформулированы условия однозначности, конкретизирующие данную задачу.

Однако, сложность реальных течений жидкостей и, соответственно, системы уравнений, приведенной выше, не дает возможности получить точные решения для большинства задач гидрогазодинамики. В этом случае действительные течения заменяют их упрощенными моделями, переходят к приближенным численным решениям уравнений на ЭВМ и к экспериментальным исследованиям течений на моделях.

При изучении сложных течений жидкостей, как уже отмечалось, большое значение имеет эксперимент. Экспериментальные исследования обычно связаны с большими материальными затратами, трудоемки и на натуральных объектах часто невыполнимы. Научная постановка эксперимента основывается на теории подобия физических явлений. Эта теория дает возможность осуществить моделирование, т. е. замену испытания натурой испытанием ее уменьшенной или увеличенной модели в удобных лабораторных условиях, обеспечивающих получение применимых к натуре результатов, например испытание модели самолета в аэродинамической трубе, корабля в гидроканале, турбины на холодном газе и т. д. Теория подобия позволяет при минимальных временных и материальных затратах получить от единичного эксперимента научный результат, т. е. результат, распространяемый на все подобные исследуемому явления. Законы теории подобия всегда применяются при создании новых конструкций машин и двигателей на базе уже существующих.

Основными задачами этой теории являются определение необходимых и достаточных условий подобия модельных и натуральных процессов, правил постановки единичного эксперимента и получение обобщенных зависимостей, справедливых для всех подобных процессов.

### 5.1. ПОДОБИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Физические процессы подобны, если геометрически подобны системы, в которых они протекают, и в сходственные моменты времени в сходных точках пространства все однородные размерные параметры пропорциональны\*. Из этого определения следует, что:

1. Подобными могут быть только одинаковые, т. е. однородные физические процессы, описываемые одними и теми же по форме

---

\* Сходственные моменты времени имеют одинаковое начало отсчета и пропорциональны между собой. В установившихся процессах любые моменты времени сходственные. Координаты сходственных точек удовлетворяют условию геометрического подобия:  $\frac{z_2}{z_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = C_{1(1-2)}$  (см. рис. 5.1). Однородные параметры имеют одинаковый физический смысл и размерность.

и содержанию уравнениями. Если аналитическое описание двух процессов одинаково по форме, но различается по физическому смыслу, то такие явления называются аналогичными, например диффузия  $G = -D \frac{dc}{dn}$  и теплопроводность  $q = -\lambda \frac{dT}{dn}$ .

2. Геометрическое подобие системы обязательно для подобия любых физических процессов. Оно выполняется, если сходственные элементы располагаются под одинаковыми углами друг к другу и

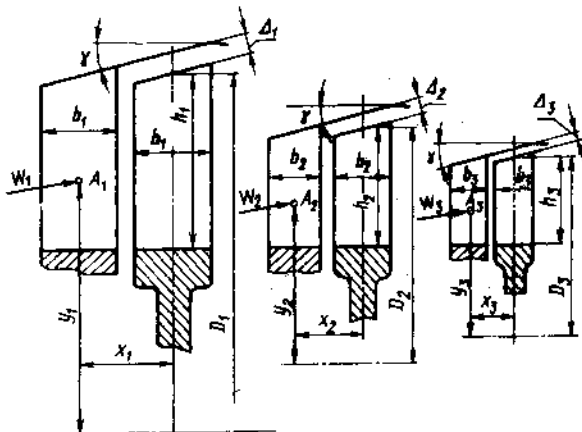


Рис. 5.1. Геометрически подобные ступени турбины

к векторам скорости набегающего потока и размеры всех сходственных элементов отличаются в одинаковое число раз (рис. 5.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_2}{D_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1} = C_l^{(1-2)}; \\ \frac{D_2}{D_3} = \dots = \frac{x_2}{x_3} = C_l^{(2-3)}; \quad \frac{D_3}{D_1} = \dots = \frac{x_3}{x_1} = C_l^{(1-3)}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где  $C_l$  — константа геометрического подобия или масштаб геометрического моделирования. Это положительная безразмерная величина, которая не может быть равна ни нулю, ни единице.

3. Полное подобие физических процессов означает подобие полей всех однородных величин, т. е. в сходственных моменты времени в сходственных точках пространства любой параметр  $\varphi_2$  может быть получен из однородного параметра первого подобного процесса  $\varphi_1$  с помощью преобразования подобия  $\varphi_2 = C_{\varphi}^{(1-2)} \varphi_1$ .

Рассматривая параметры, определяющие протекание гидродинамических процессов, заключаем, что условиями подобия их являются:

1. Геометрическое подобие (5.1).

## 2. Кинетическое подобие или подобие полей скоростей

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} = C_u(1-2); \quad \frac{u_2}{u_3} = \dots = \frac{w_2}{w_3} = C_u(2-3);$$

$$\frac{u_3}{u_1} = \dots = \frac{w_3}{w_1} = C_u(1-3). \quad (5.2)$$

3. Динамическое подобие или подобие полей сил, действующих в жидкости. Выразим пока это подобие как пропорциональность параметров, входящих в уравнение Навье — Стокса для двух подобных явлений

$$\frac{t_2}{t_1} = C_t(1-2); \quad \frac{p_2}{p_1} = C_p(1-2); \quad \frac{q_2}{q_1} = C_q(1-2);$$

$$\frac{v_2}{v_1} = C_v(1-2). \quad (5.3)$$

4. Тепловое подобие или подобие полей температур и тепловых потоков

$$\frac{T_2}{T_1} = C_T(1-2); \quad \frac{q_2}{q_1} = C_q(1-2); \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = C_\lambda(1-2);$$

$$\frac{\chi_2}{\chi_1} = C_\chi(1-2). \quad (5.4)$$

Таким образом, два подобных процесса отличаются один от другого только масштабами так, как будто их одноименные параметры одинаковы, но измерены в различных системах единиц. Значит условия однозначности этих процессов одинаковы по форме и содержанию и подобны, а безразмерные уравнения, описывающие их протекание, тождественны. Из рассмотрения геометрического подобия (5.1) особенно наглядно видно, что константы подобия не определяют всю группу подобных процессов (фигур), так как при переходе к другой паре фигур могут произвольно изменять свое значение:  $C_{u(1-2)} \neq C_{u(2-3)} \neq C_{u(1-3)}$ .

Условия, индикаторы и инварианты подобия. Константы подобия различных параметров могут отличаться по величине, но не могут выбираться произвольно, а связаны между собой уравнением, которое называется *условием подобия*. Условие подобия получается в результате преобразования уравнений, связывающих параметры, которые определяют протекание подобных процессов. Получим для примера условие простейшего геометрического подобия для рабочих лопаток турбины (см. рис. 5.1). Запишем формулы для подсчета площадей  $S_1 = b_1 h_1$ ;  $S_2 = b_2 h_2$ . Используем формулы подобного преобразования (5.1) и  $S_2 = S_1 C_{S(1-2)}$ , получим  $S_1 C_{S(1-2)} = b_1 h_1 C_i^2(1-2)$ . Сопоставляя это выражение с  $S_1 = b_1 h_1$ , находим, что они справедливы только, если

$$C_S(1-2) = C_i^2(1-2), \text{ т. е. при}$$

$$C_S/C_i^2 = 1. \quad (5.5)$$

Аналогичные выкладки для любой другой пары подобных фигур позволяют сделать вывод о том, что уравнение (5.5) связи между константами справедливо для всех подобных фигур и является условием их подобия. Поэтому в (5.5) опущены индексы (1—2). Левая часть (5.5) называется *индикатором подобия*. Для подобных течений индикаторы подобия должны быть равны единице. Подставляя в (5.5) значения констант подобия, найдем, что безразмерное выражение

$$\frac{S_1}{b_1^2} = \frac{S_2}{b_2^2} = \frac{S_3}{b_3^2} = \frac{S}{b^2} = \text{inv} \quad (5.6)$$

сохраняет неизменное (инвариантное) значение для всех фигур, подобных изображенным на рис. 5.1, и называется *инвариантом* или *критерием подобия*. Следовательно, критерием подобия называется безразмерный комплекс параметров, характеризующих данное явление. Условия подобия гидрогазодинамических процессов гораздо сложнее разобранного элементарного геометрического подобия. Поэтому критерии гидродинамического подобия являются более сложными безразмерными комплексами, состоящими обычно из большего числа размерных параметров, характеризующих эти процессы.

## 5.2. ТРИ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Эти теоремы обобщают все сказанное выше и лежат в основе практического применения теории подобия.

**Теорема I.** Для подобных процессов индикаторы подобия равны единице, а одноименные критерии подобия одинаковы. Теорема позволяет установить связь между константами подобия и определить критерии подобия с помощью подобного преобразования уравнений, описывающих подобные процессы.

**Теорема II.** Решение любого дифференциального уравнения можно представить в виде обобщенного критериального уравнения, устанавливающего связь между критериями подобия, полученными на основании теоремы I или другим способом:

$$K_1 = f(K_2, K_3, \dots, K_n). \quad (5.7)$$

Вид функции  $f$  и значения некоторых констант, входящих в нее, определяются при помощи единичного эксперимента.

**Теорема III.** Для подобия физических процессов необходимо и достаточно подобие условий однозначности и равенство одноименных определяющих независимых критериев подобия. При этом равенство определяемых критериев подобия обеспечивается автоматически. *Определяющими критериями подобия*  $K_2, K_3, \dots, K_n$  называются безразмерные комплексы, составленные из параметров, входящих в условия однозначности. *Определяемым критерием подобия*  $K_1$  называется безразмерный комплекс, включающий определяемый в задаче параметр. Теорема III определяет правила проведения единичного эксперимента и обработки его результатов для

того, чтобы их можно было распространить на все подобные процессы:

а) при единичном эксперименте необходимо выдерживать одноименные определяющие критерии подобия такими же, как на натуре:

б) при эксперименте необходимо измерять все параметры, входящие в критерии подобия;

в) результаты эксперимента необходимо представить в безразмерном критериальном виде.

Теория подобия и единичный эксперимент дают возможность решить задачу для всей группы подобных процессов.

Критерии подобия разделяются на: а) *критерии гидродинамического подобия*, получаемые на основании анализа дифференциального уравнения Навье—Стокса; б) *критерии теплового подобия*, получаемые на основании анализа уравнения энергии.

### 5.3. КРИТЕРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

На основании первой теоремы подобия получим индикаторы подобия и определяющие критерии гидродинамического подобия. Для этого запишем дифференциальные уравнения Навье—Стокса (4.35) одномерного течения\* для натурального (индексы 1) и подобного ему модельного (индексы 2) течений. Полагая, что массовые силы это силы тяжести, т. е. что  $X_1 = X_2 = g$ , получим

$$\frac{du_1}{dt_1} + u_1 \frac{du_1}{dx_1} = g - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{3} \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}; \quad (5.8)$$

$$\frac{du_2}{dt_2} + u_2 \frac{du_2}{dx_2} = g - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3} \nu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}. \quad (5.9)$$

Оба течения подобны, поэтому, производя преобразование подобия (5.1), (5.2), (5.3) и подставляя значения параметров с индексом 2 в уравнение (5.9), получим уравнение движения, описывающее модельное течение в параметрах натурального:

$$\frac{C_u}{C_t} \frac{du_1}{dt_1} + \frac{C_u^2}{C_t} u_1 \frac{du_1}{dx_1} = C_g g - \frac{C_p}{C_\rho C_t} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{C_\nu C_u}{C_t^2} \frac{4}{3} \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}. \quad (5.10)$$

Уравнения (5.8) и (5.10) справедливы лишь в том случае, если все безразмерные множители членов уравнения (5.10) равны друг другу, т. е. могут быть сокращены. Таким образом, условие гидродинамического подобия течений принимает вид

$$\frac{C_u}{C_t} = \frac{C_u^2}{C_t} = C_g = \frac{C_p}{C_\rho C_t} = \frac{C_\nu C_u}{C_t^2}. \quad (5.11)$$

\* При такой сокращенной записи в уравнении сохраняются все члены, выражающие действующие в жидкости силы. Это и обеспечивает получение всех критериев гидродинамического подобия.



Выражение (5.11) устанавливает связь между константами подобия и указывает на подобие полей всех сил, действующих в подобных течениях. Действительно, уравнения (5.9) и (5.10) тождественны, т. е. почленно равны, например  $\frac{C_u}{C_t} \frac{du_1}{dt_1} = \frac{du_2}{dt_2}$ , следовательно:  $C_u/C_t = (\partial u_2/\partial t_2)/(\partial u_1/\partial t_1)$  — есть отношение локальных сил инерции модельного и натурального течений,  $C_u^2/C_t$  — отношение конвективных сил инерции;  $C_g$  — отношение массовых сил;  $C_p/C_0 C_t$  — отношение сил давления;  $C_v C_u/C_t^2$  — отношение сил, обусловленных вязкостью и сжимаемостью модельного и натурального течений.

Итак, в подобных потоках отношения одноименных сил одинаковы. Для получения индикаторов и критериев подобия все члены (5.11) сравниваются со вторым членом  $C_u^2/C_t$ :

$$\begin{aligned} C_u/C_t &= C_u^2/C_t \text{ и индикатор подобия } C_t/(C_t C_u) = 1; \\ C_g &= C_u^2/C_t \text{ „ „ „ } C_u^2/(C_t C_g) = 1; \\ C_p/(C_0 C_t) &= C_u^2/C_t \text{ „ „ „ } C_p/(C_0 C_u^2) = 1; \\ C_v C_u/C_t^2 &= C_u^2/C_t \text{ „ „ „ } C_t C_u/C_v = 1. \end{aligned}$$

Подставляя в индикаторы подобия значения констант из (5.1), (5.2), (5.3) и учитывая произвольность выбора процессов 1 и 2, получим следующие определяющие критерии гидродинамического подобия.

Критерий Струхала или временной однородности (гомохронности)

$$Sh = l/(W \cdot t) = ln/W, \quad (5.12)$$

где  $l$  — характерный размер обтекаемого тела, канала, путь, проходимый частицей за единицу времени;  $W$  — характерная скорость течения жидкости;  $t$  — характерное время процесса или время периода явления, происходящего с частотой  $n = 1/t$ . Критерий  $Sh$  характеризует отношение локальной составляющей силы инерции к конвективной составляющей силы инерции. Его можно рассматривать как отношение характерного времени движения частиц жидкости  $l/W$  к характерному времени  $t$  нестационарного или периодического процесса. Критерий Струхала выбывает из числа определяющих при исследовании установившегося течения.

Критерий Фруда

$$Fr = \frac{W^2}{gl} \quad (5.13)$$

характеризует отношение конвективных сил инерции к силам тяжести в потоке и является определяющим, если силы тяжести оказывают существенное влияние на движение жидкости. При движении жидкости в горизонтальной плоскости и при движении газов с небольшим изменением высоты эти силы пренебрежимо малы и критерий Фруда выбывает из определяющих. Если движение жидко-

сти возникает вследствие свободной конвекции в среде переменной плотности, то в уравнения Навье — Стокса необходимо добавить силу Архимеда (2.14). В этом случае вместо критерия Фруда в число определяющих вводится критерий Грасгоффа

$$Gr = g l^3 \beta \Delta T / \nu^2, \quad (5.14)$$

где  $\beta = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \Delta T}$  — коэффициент объемного расширения жидкости;  $\rho_0$  и  $\rho$  — плотность холодных и нагретых частиц среды;  $\Delta T$  — разность температур, вызывающая свободную конвекцию, например  $\Delta T = T_w - T_\infty$ .

Критерий Грасгоффа выражает отношение сил Архимеда, вызывающих конвекцию, к силам вязкости, препятствующих ей.

Критерий Эйлера

$$Eu = \frac{p}{\rho W^2} \quad (5.15)$$

характеризует отношение сил гидродинамического давления и сил инерции в потоке. В газовой динамике критерий Эйлера представляют с помощью выражений для скорости звука  $a^2 = \kappa p / \rho$  и числа Маха  $M = W/a$  в следующем виде  $Eu = 1 / (\kappa M^2)$ . Следовательно, в газовой динамике вместо критерия Эйлера используются два других критерия: число Пуассона или показатель адиабаты  $\kappa = C_p / C_v$  и число Маха  $M = W/a$ , которые характеризуют сжимаемость газа и в подобных течениях должны быть одинаковы. При исследовании течений несжимаемой жидкости  $Eu$  не является определяющим, так как в качестве характерного давления вместо  $p$  можно принять скоростной напор  $\rho W^2 / 2$  и тогда  $Eu = 1/2$ . Если статическое давление заменить разностью статических давлений  $\Delta p$  в разных точках течения, то критерий Эйлера примет вид  $Eu = \Delta p / (\rho W^2)$ . В этом виде критерий Эйлера применяется при исследовании гидравлических сопротивлений в каналах как определяемый критерий.

Критерий Рейнольдса

$$Re = \rho W l / \mu. \quad (5.16)$$

характеризует отношение сил инерции к силам вязкости в потоке.

Итак, все критерии гидродинамического подобия являются мерой отношений определенных сил, действующих в потоках. Равенство одноименных критериев в подобных течениях означает, что отношения соответственных сил в этих течениях одинаковы.

**Задача 5.1.** Докажите, что уравнение неразрывности (3.18) при преобразовании подобия дает только критерий Струхала.

**Аэродинамические коэффициенты** — это безразмерные комплексы, содержащие искомые величины и поэтому являющиеся определяемыми критериями подобия.

1. Коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} S}, \quad (5.17)$$

где  $R_x$  — сила лобового сопротивления тела;  $\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2}$  — скоростной напор невозмущенного потока, Па;  $S$  — характерная площадь тела, для шара, например,  $S = \pi R^2$ , для крыла — площадь его в плане и т. д.

2. Коэффициент подъемной силы

$$C_y = \frac{R_y}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} S}, \quad (5.18)$$

где  $R_y$  — подъемная сила.

3. Коэффициент полной аэродинамической силы

$$C_R = \frac{R}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} S}, \quad (5.19)$$

где  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$  — полная аэродинамическая сила.

4. Коэффициент давления

$$\bar{p} = \frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2}}. \quad (5.20)$$

5. Коэффициент сопротивления трения

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2}}. \quad (5.21)$$

Характерным для всех аэродинамических коэффициентов является то, что силы в них отнесены к скоростному напору. Все эти коэффициенты могут быть получены в результате подобного преобразования уравнений, включающих искомые величины. Например, для получения  $C_x$  следует подвергнуть преобразованию подобия интегральное уравнение количества движения  $R_x = G(u_2 - u_1) = -\rho W S (u_2 - u_1)$ . Применив разобранный ранее методу, получим условие подобия, связывающее константы подобия  $C_{R_x} = C_\rho C_u^2 C_s$ ,

индикатор подобия  $\frac{C_{R_x}}{C_\rho C_u^2 C_s} = 1$  и вводя произвольный множитель два — коэффициент лобового сопротивления  $C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} S}$ .

Задача 5.2. Получите коэффициент сопротивления трения  $C_f$  с помощью подобного преобразования уравнения Ньютона

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = 0,499 \, tv_m \rho \frac{du}{dy}.$$

## 5.4. КРИТЕРИИ ТЕПЛООВОГО ПОДОБИЯ

Тепловое подобие в потоках осуществляется при выполнении:

- 1) гидродинамического подобия;
- 2) подобия полей температур;
- 3) постоянства критериев теплового подобия.

Подобие полей температур при небольших скоростях потока обеспечивается при постоянстве для подобных потоков температурного фактора, представляющего отношение соответственных абсолютных температур

$$T_{\infty}/T_W \quad (5.22)$$

или, лучше, избыточных температур

$$\Delta T/\Delta T_0 = (T - T_W)/(T_{\infty} - T_W). \quad (5.23)$$

В этом случае константа температуры может быть представлена как

$$C_T = \Delta T_2/\Delta T_1 = \Delta T_{02}/\Delta T_{01}.$$

При больших скоростях газовых потоков температурным фактором или температурным критерием является

$$\theta = \frac{W_{\infty}^2}{C_p \Delta T_0} = 2 \frac{T_{\infty}^* - T_{\infty}}{T_{\infty} - T_W} = 2 \frac{\Delta T_{\infty}^*}{\Delta T_0}. \quad (5.24)$$

В (5.22), (5.23) и (5.24)  $T$ ,  $T_{\infty}$ ,  $T_W$  и  $T_{\infty}^*$  — температуры в сходственных точках невозмущенного потока, поверхности обтекаемого тела и полная температура невозмущенного потока (см. гл. 11) соответственно. Подобие полей температуры определяет подобие потоков тепла, например, если  $(T_{\infty}/T_W) > 1$ , то поток тепла направлен от жидкости к твердому телу, а если  $(T_{\infty}/T_W) < 1$  — от твердого тела к жидкости.

Для получения критериев теплового подобия, основываясь на преобразовании подобия уравнения Навье — Стокса, упрощенно преобразуем уравнения энергии (4.96).

Запишем уравнение (4.96), сохранив лишь части членов, которые определяют их размерность. Сомножителями всех этих членов поставим комплексы из констант подобия, индексами которых являются размерные параметры, входящие в соответствующие члены:

$$\begin{aligned} \frac{C_T}{C_l} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_u C_T}{C_l} u \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{C_p}{C_q C_{C_p} C_t} \frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial p}{\partial t} + \\ + \frac{C_u C_p}{C_q C_{C_p} C_l} \frac{1}{\rho C_p} u \frac{\partial p}{\partial x} &+ \frac{C_{\chi} C_T}{C_l^2} \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{C_{\nu} C_u^2}{C_{C_p} C_l^2} \frac{\nu}{C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

Условие теплового подобия получим приравняв комплексы, составленные из констант подобия:

$$\frac{C_T}{C_l} = \frac{C_u C_T}{C_l} = \frac{C_p}{C_q C_{C_p} C_t} = \frac{C_u C_p}{C_q C_{C_p} C_l} = \frac{C_{\chi} C_T}{C_l^2} = \frac{C_{\nu} C_u^2}{C_{C_p} C_l^2}. \quad (5.25)$$

Равенство второго и шестого членов (5.25) дает индикатор подобия  $\frac{C_4^2}{C_{C_p} C_{C_T}} \cdot \frac{C_v}{C_i C_u} = 1$  и критерий  $\frac{w_\infty^2}{C_p \Delta T_0} \frac{v}{l W_\infty} = \frac{\theta}{Re}$ . Равенство второго и четвертого членов (5.25) дает индикатор подобия  $\frac{C_p}{C_0 C_u^2} \times \times \frac{C_u^2}{C_{C_p} C_T} = 1$  и критерий  $\frac{p}{\rho W_\infty^2} \cdot \frac{W_\infty^2}{C_p \Delta T_0} = E\theta$ . Равенство первого и второго, а также третьего и четвертого членов (5.24) дают индикатор  $\frac{C_l}{C_i C_u} = 1$  и критерий Струхалия  $Sh = \frac{l}{Wl}$ , т. е. во всех этих случаях мы не получаем новых независимых критериев подобия.

Критерий Фурье или критерий тепловой гомохронности

$$Fo = \frac{\chi t}{l^2} \quad (5.26)$$

получается в результате сравнения первого и пятого членов (5.25) и характеризует отношение тепла, переносимого теплопроводностью, к изменению энтальпии за счет нестационарности процесса. Критерий Фурье является определяющим при исследовании неустановившихся процессов теплообмена.

Критерий Пекле

$$Pe = \frac{Wl}{\chi} \quad (5.27)$$

получается в результате сравнения второго и пятого членов (5.25) и характеризует отношение конвективного переноса энтальпии к теплу, передаваемому молекулярной теплопроводностью.

Критерий Прандтля

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{v}{\chi} \quad (5.28)$$

удобен тем, что составлен только из физических констант  $v$  и  $\chi$ , характеризующих интенсивность молекулярного переноса количества движения и тепла. Постоянство критерия Прандтля необходимо выполнять в процессах течения жидкости, сопровождающихся передачей тепла. Величина критерия  $Pr$  определяется природой жидкости, ее агрегатным состоянием и температурой (табл. 5.1). Определяемые критерии теплового подобия получаются в курсах теплопередачи и используются при расчетах теплообмена в потоках.

Итак, на основании первой теоремы подобия получены следующие определяющие критерии подобия:  $Sh = l/(Wl)$ ;  $M = W/a$ ;  $k = C_p/C_v$ ;  $[Eu = p/(\rho W^2)]$ ;  $Fr = W^2/(gl)$ ;  $(Gr = gl^3 \rho \Delta T / \nu^2)$ ;  $Re = \rho Wl / \mu = Wl/\nu$ ;  $\theta = W_\infty^2 / (C_p \Delta T_0)$ ;  $(T_\infty / T_w)$ ;  $(\Delta T / \Delta T_0)$ ;  $Fo = \chi t / l^2$ ;  $Pr = \frac{v}{\chi}$ ;  $(Pe = Wl/\chi)^*$ .

\* В скобках приведены критерии, заменяющие предыдущие. Например, в критериальном уравнении могут быть либо  $Re$  и  $Pr$ , либо  $Re$  и  $Pe$ .

Таблица 5.1

Жидкость	$T, K$	$Pr$	Примечания
Одноатомный газ	288	0,67	Для газов $Pr \approx 1$ , $\nu \approx \chi$ . Механизм молекулярного переноса количества движения и тепла практически одинаков — тепловое хаотическое движение молекул. Соблюдается подобие полей скорости и температуры. $Pr$ слабо зависит от температуры и давления
Двухатомный газ	288	0,73	
Трехатомный газ	288	0,80	
Четырех- и более атомный газ	288	1,00	
Ртуть	330	0,03	Для жидких металлов $Pr \ll 1$ , $\nu \ll \chi$ . Трение обусловлено взаимодействием молекул, а теплопроводность — движением свободных электронов, их большое количество движется с большими скоростями. Подобия полей скоростей и температур нет
Ртуть	773	0,008	
Жидкий калий	373	0,008	
Вода	273	13,7	Для жидкостей $Pr \gg 1$ , $\nu > \chi$ . Трение обусловлено взаимодействием молекул, а теплопроводность — хаотическим тепловым движением молекул, интенсивность которого мала. Подобия полей скоростей и температур нет
Вода	323	3,6	
Масло	273	500,0	

При исследовании молекулярной диффузии используется критерий Шмидта  $Sc = \nu/D$ , который иначе называется диффузионным критерием Прандтля  $Pr_d = \nu/D$  и представляет отношение молекулярного коэффициента кинематической вязкости  $\nu$  к молекулярному коэффициенту диффузии  $D$ .

Определяющие параметры для подсчета критериев могут выбираться в известной степени произвольно, но обязательно одинаково для всех сравниваемых подобных процессов. Обычно за определяющие выбираются параметры, задаваемые условиями однозначности и легко определяемые в эксперименте. От выбора определяющих параметров зависит величина критериев подобия, поэтому их выбор всегда оговаривается или отмечается соответствующими индексами при критериях.

## 5.5. СОСТАВЛЕНИЕ КРИТЕРИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

На основании второй теоремы подобия составим обобщенное критериальное уравнение, например, для группы подобных процессов, для которых определяемым критерием подобия является коэффициент лобового сопротивления

$$C_x = f(Sh, Fo, Fr, M, \kappa, Re, T_w/T_\infty, Pr). \quad (5.29)$$

Как уже указывалось, вид функции  $f$  определяется с помощью единичного подобного эксперимента, выполняемого при одинаковых с натурой всех одноименных определяющих критериях подобия. Такое подобие называется полным. Исследования показывают, что

полное подобие, т. е. полное моделирование сложных явлений не выполнимо — оно приводит к тождественности течений. Это обстоятельство не препятствует применению теории подобия, так как для практики достаточно выполнение приближенного или частичного подобия. При частичном моделировании добиваются, чтобы для натуре и модели были бы одинаковы только те определяющие критерии подобия, которые в исследуемой области течения существенно влияют на величину определяемого критерия. Критерии подобия, которые слабо или совсем не влияют в данной области на определяемый критерий, называются неопределяющими и исключаются из критериального уравнения. Неопределяющие критерии выявляют на основании условий однозначности задачи, оценки относительной величины членов уравнений, описывающих процесс, экспериментальных данных. Области значений данного определяющего критерия, в которых его изменение не влияет на величину определяемого критерия, называются автомодельными — подобие выполняется автоматически при любых значениях этого критерия. Например, часто можно пренебречь неустойчивостью процесса и исключить из (5.29) критерии Струхалея  $Sh$  и Фурье  $Fo$ ; при изотермическом течении — температурный фактор  $(T_\infty/T_w)$  и число Прандтля  $Pr$ ; при исследовании течений несжимаемой жидкости — числа Пуассона  $k$  и Маха  $M$  и обобщенное критериальное уравнение существенно упрощается

$$C_x = f(FrRe). \quad (5.30)$$

Условие  $Fr_M = Fr_n$  и  $Re_M = Re_n$  для уменьшенной в  $C_L$  раз модели удовлетворить невозможно: первое требует уменьшения скорости обтекания модели  $W_M = W_n / C_L$ , второе — увеличения  $W_M = W_n / C_L$ . Для разрешения этого противоречия приходится либо проводить модельный опыт с использованием жидкости, свойства которой определяются из равенств критериев подобия и величины  $C_L$ , либо вводить дополнительные ограничения в условия однозначности, сужая группу подобных процессов. Например, сопротивление корабля плохообтекаемой формы проявляется в образовании тяжелых волн на поверхности воды и называется волновым. Для таких кораблей сопротивление трения не играет существенной роли и критерий Рейнольдса выбывает из определяющих и при испытании модели корабля в гидроканале необходимо выполнять только равенство критериев Фруда. Корабль на подводных крыльях при движении не поднимает волн и его сопротивление есть только сопротивление трения. Критерий Фруда выбывает из определяющих и при моделировании необходимо выдерживать постоянство чисел Рейнольдса.

Для процессов обтекания тел воздухом критерий Фруда выбывает из определяющих. При малых скоростях полета самолета  $M \ll 1$  — сжимаемость воздуха не проявляется и число  $M$  также выбывает из определяющих и критериальное уравнение принимает вид  $C_x = f(Re)$ . При испытании в аэродинамической трубе уменьшенной модели самолета выполнение условия  $Re_M = Re_n$  приводит,

как уже указывалось, к увеличению скорости воздуха  $W_M = W_n/C_t$ , что может привести при обтекании модели к существенному увеличению числа  $M$  и нарушению подобия условий однозначности ( $M \ll 1$ ). Чтобы исключить такую возможность, создают дозвуковые трубы большего размера, обеспечивающие испытания натуре, либо используют дозвуковые трубы замкнутого типа, в которых циркулирует воздух высокого давления и плотности.

**Вопрос 5.3.** Почему повышение давления воздуха в аэродинамической трубе позволяет уменьшить размер модели?

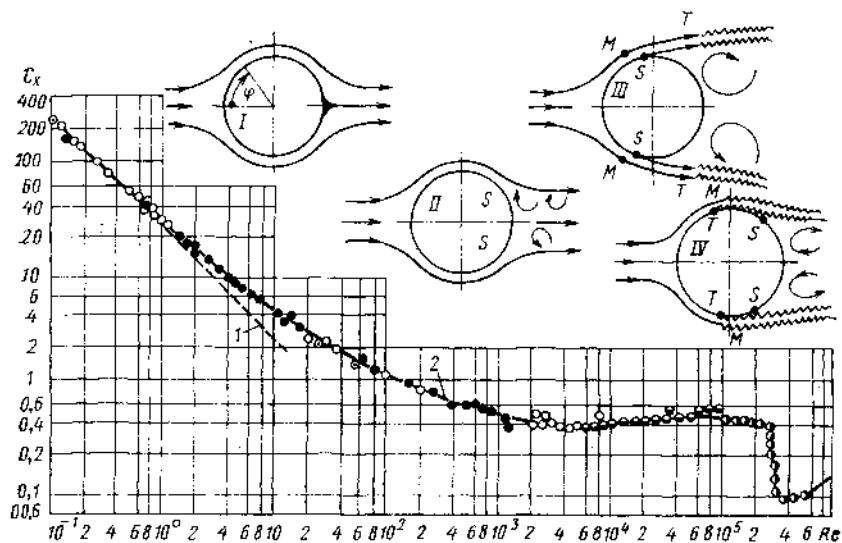


Рис. 5.2. Зависимость коэффициента сопротивления шара от числа Рейнольдса:

1—по формуле Стокса [см. формулу (7.38)]; 2—экспериментальные данные разных авторов

Часто наблюдаются автомодельные области и в отношении отдельных параметров. Например, полнота сгорания топлива в камерах сгорания ВРД не зависит от давления при  $p > 5 \cdot 10^4$  Па. Это позволяет производить доводку камер сгорания на установках при давлении воздуха  $p \geq 5 \cdot 10^4$  Па, т. е. при расходе воздуха и топлива в 40 раз меньшем, чем на натуре, работающей при давлении  $20 \dots 25 \cdot 10^5$  Па.

Преимущество критериального уравнения. Критериев подобия всегда меньше, чем размерных параметров, определяющих процесс. Если уравнение  $C_x = f(Re)$  представить в виде  $C_x = f(W, D, \mu, \rho)$ , то для исследования этой зависимости потребуются не единственный эксперимент, а огромное их число: первая серия —  $C_x = f(W)$  при постоянных  $D, \mu, \rho$ ; вторая серия —  $C_x = f(D)$  при постоянных  $W, \mu, \rho$ ; третья серия —  $C_x = f(\mu)$  при постоянных  $W, D, \rho$ ; четвертая серия —  $C_x = f(\rho)$  при постоянных  $W, D, \mu$ . Обобщенно



щить результаты этих опытов, не прибегая к критериям подобия, невозможно. Теория подобия указывает, что нет надобности изучать зависимость  $C_x$  от каждого параметра, так как величина  $C_x$  зависит не от каждого отдельного параметра, а от их безразмерной комбинации  $Re = \frac{\rho U W}{\mu}$  независимо от того, по какой причине

величина этой комбинации изменяется. Графически результаты единичного опыта представляются также в безразмерной критериальной форме. Это обеспечивает удобство использования этих данных для расчета всех подобных течений. В настоящее время имеются обширные экспериментальные данные для многих групп подобных процессов. Пример — экспериментальные данные, приведенные на рис. 5.2. Характерно, что эти данные справедливы для любых сочетаний  $W$ ,  $D$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  (анализ графика см. п. 18.2).

**Задача 5.4.** Определить силу тяги  $R$ , необходимую для горизонтального полета аэростата  $D_H=10$  м со скоростью  $W_H=20$  м/с на высотах  $H_1=0$  и  $H_2=20$  км.

Ответ:  $R_1=2520$  Н,  $R_2=630$  Н.

## 5.6. ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Анализ размерностей параметров, определяющих процесс, является единственным методом определения критериев подобия и обобщенного критериального уравнения для сложных явлений, математическое описание которых отсутствует. Дальнейшее применение теоремы III и эксперимента дает возможность придать критериальному уравнению конкретную форму.

Анализ размерностей основывается на не требующем доказательства положении о том, что размерность всех членов одного и того же уравнения всегда одинакова. Следовательно, любое физическое уравнение может быть написано в безразмерном виде. Для этого его следует разделить на один из членов. Для применения анализа размерностей необходимо знать все параметры, которые существенно влияют на развитие процесса, т. е. на величину определяемого критерия подобия. Метод анализа размерностей менее надежен, чем метод подобного преобразования уравнений; так как при его использовании легко упустить из вида какой-либо определяющий параметр. Уменьшить вероятность ошибки позволяет «теорема»: *если определяемый критерий подобия зависит от  $n$  размерных параметров, размерности которых составлены из  $k$  независимых единиц, то этот критерий всегда можно выразить через  $\pi = n - k$  безразмерных критериев подобия, составленных из различных комбинаций размерных параметров.*

Если  $n \leq k$ , то систему определяющих параметров нельзя привести к безразмерным критериям. Такая система называется неполной. При применении теории размерностей необходимо проверить полноту системы ( $n > k$ ), выявляя для этого все определяющие параметры. Однако, даже формально, полная система может все же оказаться ошибочной с физической точки зрения, если будут упрощены некоторые из определяющих параметров.

**Задача 5.5.** Определить коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  для твердых тел в стационарном потоке несжимаемой жидкости.

Решение: 1. Составление списка физических параметров, определяющих  $C_x$ . На основании наблюдений заключаем, что при малых числах  $Ma$ ,  $C_x$  зависит от плотности жидкости  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>], скорости невозмущенного потока  $W$  [м/с], линейного размера тела  $l$  [м], вязкости жидкости  $\mu$  [кг/(м·с)].

2. Проверка полноты системы. Число определяющих параметров  $n=4$ , количества независимых размерностей  $k=3$  кг, м, с. Система полная,  $\alpha=n-k=1$  и  $C_x$  является функцией одного безразмерного критерия подобия, составленного из  $\rho$ ,  $W$ ,  $l$ ,  $\mu$ . Запишем это условие в общем виде

$$C_x = f(\rho^a W^b, l^c, \mu^r). \quad (5.31)$$

3. Определение критерия подобия. Используем условие равенства размерностей левой и правой частей (5.31), т. е.  $[C_x] = [\rho]^a [W]^b [l]^c [\mu]^r$ , в которое подставим размерности физических параметров и учтем, что  $C_x$  безразмерная величина  $\text{кг} \cdot \text{м}^0 \cdot \text{с}^0 = [\text{кг}/\text{м}^3]^a [\text{м}/\text{с}]^b [\text{м}]^c [\text{кг}/\text{м} \cdot \text{с}]^r$ . Приравняем показатели степени кг, м и с для левой и правой частей этого равенства и получим для

$$\text{кг}-0 = a - r; \quad \text{м}-0 = -3a + b + c - r; \quad \text{с}-0 = -b - r. \quad (5.32)$$

Три уравнения, а неизвестных четыре. Поэтому выразим все неизвестные через  $a$ , тогда  $r = -a$ ;  $b = a$ ;  $c = a$ . Подставляя эти значения в (5.31) получим  $C_x = f(\text{Re}^a)$ . Не уменьшая общности, положим  $a=1$ , так как любая степень безразмерной величины есть также безразмерная величина, т. е.

$$C_x = f(\text{Re}). \quad (5.33)$$

Применяя анализ размерностей мы получили такой же результат, как и при применении теории подобия.

4. Проведение единичного эксперимента для определения явного вида  $f(\text{Re})$ .

Если бы тело обтекало газ с большим числом  $Ma$ , полученная зависимость  $C_x = f(\text{Re})$  была бы ошибочной, несмотря на формальную полноту системы определяющих размерных параметров. В эту систему необходимо добавить статическое давление и зависимость приняла бы вид  $C_x = f(\text{Re}, M)$ .

Критериальные уравнения часто имеют более простую форму  $C_x = C \text{Re}^a M^b$ , где  $c$ ,  $a$ ,  $b$  определяются в единичном эксперименте.

### 6.1. ПЕРЕХОД ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОЕ

Английский физик О. Рейнольдс в 1883 г. доказал существование двух качественно различных режимов течения жидкостей в трубах — *ламинарного* и *турбулентного*. Рассмотрим опыт Рейнольдса (рис. 6.1). Прозрачная жидкость вытекает из бака постоянного уровня 1 по стеклянной трубке 2. Струйка той же, но подкрашенной жидкости подается из бачка 4 для визуализации характера течения основной жидкости в трубке 2. При открытии крана 3 средняя скорость жидкости  $W$ , а вместе с ней и число Рейнольдса  $Re = \frac{\rho W d}{\mu}$  возрастают, но до определенных величин, названных

критическими  $W_{кр}$  и  $Re_{кр} = \left( \frac{\rho W d}{\mu} \right)_{кр}$ , подкрашенная жидкость течет на всей длине трубки 2 в виде резко очерченной цилиндрической струйки параллельно стенкам, не смешиваясь с основной жидкостью. Этот спокойный режим течения в виде несмешивающихся слоев жидкости, при котором картина линий тока определяется только формой канала, называется *ламинарным* или *слоистым*. На направленное ламинарное течение наложено хаотическое тепловое движение молекул и перенос всех субстанций поперек потока из слоя в слой имеет чисто молекулярный механизм. Молекулярная диффузия подкрашенной жидкости в соседние слои происходит так медленно, что на конечной длине трубки 2 ее результат не заметен.

При сверхкритических значениях скорости и числа Рейнольдса струйка подкрашенной жидкости полностью перемешивается с основной жидкостью на малом расстоянии от места подачи и весь основной поток равномерно окрашивается. Так как переход к такому течению происходит внезапно, то ясно, что при этом ламинарный режим течения сменяется качественно отличным режимом с мощным переносом вещества (подкрашенной жидкости) от слоя к слою поперек потока (рис. 6.1,б). Этот режим беспорядочного бурного течения называется *турбулентным*. Опыты показывают, что переход от ламинарного режима течения к турбулентному сопровождается аналогичной интенсификацией теплопередачи между слоями жидкости и жидкостью и стенками трубы и увеличением потерь на трение, т. е. интенсификацией поперечного переноса ко-

личества движения. Эти эффекты настолько существенны, что используются для определения момента смены режимов\*.

Итак, турбулентный режим течения отличается от ламинарного резкой интенсификацией переноса всех субстанций: вещества

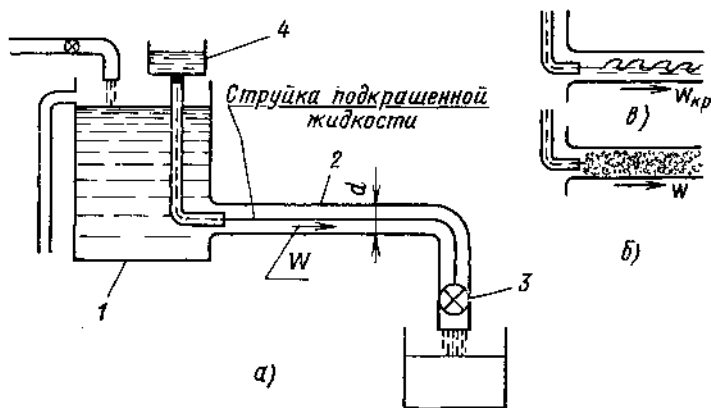


Рис. 6.1. Иллюстрация к опыту Рейнольдса:

а—ламинарное течение; б—то же турбулентное; в—то же переходное;  
1—бак постоянного уровня; 2—трубка; 3—кран; 4—бачок

(диффузия), тепла (теплопроводность) и количества движения (трение). Этот перенос называется турбулентным в отличие от молекулярного при ламинарном течении.

Закон Рейнольдса о подобии режимов течения. На основании опытов при различных  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $W$ ,  $d$  Рейнольдс установил, что переход от ламинарного течения к турбулентному не определяется величиной какого-либо одного из этих параметров вне связи с другими. Согласно закону подобия переход от ламинарного режима течения к турбулентному всегда происходит при примерно одинаковом критическом числе Рейнольдса при произвольной величине каждого параметра в отдельности. Для круглых труб в обычных условиях

$$Re_{кр} = \left( \frac{\rho W d}{\mu} \right)_{кр} \approx 2300. \quad (6.1)$$

Течения при  $Re < Re_{кр}$  ламинарны и подобны между собой, а при  $Re > Re_{кр}$  — турбулентны и также между собой подобны. Значение  $Re_{кр}$  в сильной степени зависит от величины случайных возмущений потока в трубе: тряска, неровности поверхности стенок трубы, поперечные конвективные токи, вызванные нагревом, плохообтекаемые предметы в потоке, изменение формы и размеров канала и

\* Критерий Пекле  $Pe = PrRe$ , поэтому при  $Pr = \text{const}$  критическому числу Рейнольдса должно соответствовать критическое число Пекле, при переходе через которое будет резко изменяться перенос тепла.

т. д. Тщательным уменьшением возмущений ряду исследователей удалось затянуть переход ламинарного течения в турбулентное до  $Re_{кр} = 40000$  и, по-видимому, это не является пределом. При  $Re \gg \gg 2300$  ламинарный режим оказывается крайне неустойчивым и малейшее возмущение приводит к бурной турбулизации потока. Если после этого плавно уменьшать число  $Re$ , уменьшая, например, скорость, то обратный переход турбулентного режима в ламинарный произойдет в области  $Re \approx 2300$ . Это явление называется *гистерезисом*. Авиационные и другие промышленные трубопроводы работают в условиях тряски и возмущений, поэтому можно быть уверенным, что в них при  $Re \approx 4000$  течение будет иметь полностью развитой турбулентный характер. При числах  $Re < 2000$  даже самые сильные возмущения потока со временем сами затухают и всегда существует устойчивое ламинарное течение.

В области критического числа Рейнольдса имеется узкая область, в которой течение является переходным, называемым *перемежающимся* (см. рис. 6.1, в). На этом режиме ламинарное и турбулентное течение хаотически во времени перемежаются. Это течение характеризуется *коэффициентом перемежаемости*  $\gamma$ , указывающим долю времени, занятую турбулентным течением в данной точке потока: если  $\gamma = 1$  — течение только турбулентное, если  $\gamma = 0$  — чисто ламинарное. Перемежающееся течение имеет место в узкой области чисел Рейнольдса и менее всего исследовано. Поэтому в обычных расчетах принимают, что при  $Re_{кр}$  ламинарный режим течения сразу переходит в турбулентный.

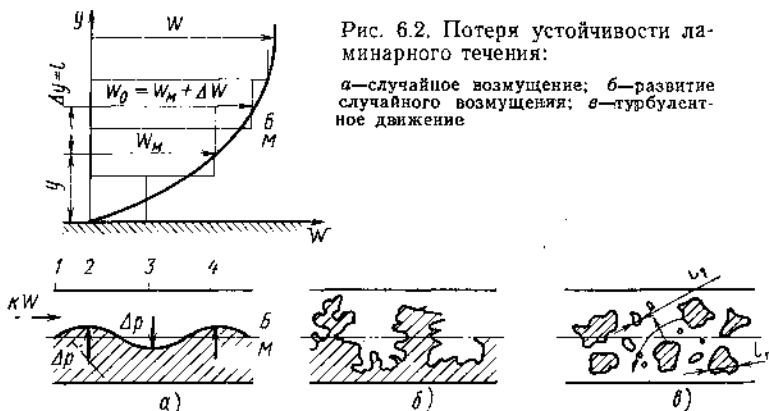
Увеличение  $Re_{кр}$  при уменьшении возмущений и внезапность перехода ламинарного течения в турбулентное и наоборот показывает, что эти переходы связаны с потерей устойчивости одного режима и приобретением устойчивости другим.

## 6.2. ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ

Разобьем ламинарный поток, текущий около стенки на бесконечно тонкие слои и представим, что скорость от слоя к слою изменяется ступенчато (рис. 6.2). Пусть изменение скорости  $\Delta W$  от «медленного» слоя  $M$  к «быстрому» —  $B$  пропорционально  $\Delta W$  от невозмущенного потока  $\Delta W = kW$ . Поверхность соприкосновения слоев, на которой скорость изменяется скачкообразно, называется поверхностью тангенциального разрыва скорости. Устойчивость ламинарного режима течения определяется устойчивостью этой поверхности. Относительность движения позволяет представить слой  $M$  неподвижным, а слой  $B$  движущимся со скоростью  $kW$  (рис. 6.2, а). Пусть случайное возмущение искривило поверхность тангенциального разрыва скорости. В сечениях 2 и 4, из-за уменьшения площади, скорость в струйке  $B$  возрастет, а давление станет меньше давления  $p$  в неподвижном слое  $M$ . В сечении 3 давление в слое  $B$  повысится. Так возникнут силы избыточного давления  $\Delta p$ , направленные перпендикулярно к вектору скорости невозму-

щенного движения жидкости, усиливающие случайное возмущение. Для определения  $\Delta p$  при условии  $q = \text{const}$  составим для участка 1—2 струйки  $B$  уравнение неразрывности  $\kappa W S = W_2 S_2$  и уравнение Бернулли  $p + \frac{\rho (\kappa W)^2}{2} = p_2 + \frac{\rho W_2^2}{2}$ . Решая их совместно, найдем

$$\Delta p = p - p_2 = \kappa^2 \left[ \left( \frac{S}{S_2} \right)^2 - 1 \right] \frac{\rho W^2}{2}. \quad (6.2)$$



Как видим, силы  $\Delta p$  пропорциональны силам инерции жидкости  $-\rho \frac{W^2}{2}$ . В дальнейшем будем называть силы  $\Delta p$  просто силами инерции.

Итак, случайные возмущения ламинарного течения приводят к возникновению сил инерции ( $\Delta p$ ), усиливающих эти возмущения — встречные движения масс жидкости поперек потока. Силы трения препятствуют развитию возмущений, т. е. способствуют сохранению ламинарного течения. Ламинарный режим или поверхности раздела между слоями устойчивы, когда силы трения намного превышают силы инерции, т. е. при небольших значениях чисел Рейнольдса \*. Ламинарный режим не устойчив и при наличии случайного возмущения переходит в турбулентный, если силы инерции существенно превышают силы трения, т. е. при больших значениях чисел  $Re$ . В этом случае случайное возмущение усиливается (рис. 6.2, б) вплоть до полного разрыва поверхности между слоями, когда конечные объемы жидкости самых различных размеров хаотически перебрасываются из одного слоя в другой, обмениваясь ве-

\* В п. 5.3 доказано, что число Рейнольдса характеризует отношение сил инерции к силам трения в течении. Это можно показать и так:

$$Re = \frac{\rho W d}{\mu} = \frac{\rho W^2}{\mu (W/d)} \sim \frac{\text{силы инерции}}{\text{силы трения}}$$

ществом, количеством движения и теплом. Траектории частиц жидкости при турбулентном движении не определяются стенками канала, а чрезвычайно перепутаны и извилисты. Конечные объемы, участвующие в турбулентном перемешивании, называются молями жидкости (рис. 6.2, в).

Необходимым и достаточным условием возникновения устойчивого (развитого) турбулентного течения является: 1) наличие градиента скорости  $\partial W/\partial y$ ; 2) наличие случайных возмущений в потоке; 3) превышение сил инерции над силами вязкости, т. е.  $Re > Re_{кр}$ .

**Задача 6.1.** Определить режим течения керосина  $\rho=820 \text{ кг/м}^3$ ,  $T=310 \text{ К}$ ,  $\mu$  (по рис. 1.3),  $G=1,2 \text{ кг/с}$  в трубе  $d=0,03 \text{ м}$  топливной системы ТРД.

Ответ:  $Re=5,3 \cdot 10^4 > Re_{кр}$  — течение турбулентное. Определить диаметр трубы  $d$ , при котором течение будет ламинарным.

### 6.3. ПУЛЬСАЦИОННОЕ И ОСРЕДНЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Безынерционные измерения с помощью термоанемометра в фиксированной точке турбулентного движения показывают, что скорость не остается неизменной во времени, а непрерывно, с большой частотой ( $5 \dots 10^5 \text{ Гц}$ ) хаотически изменяется или пульсирует по величине и направлению около некоторого среднего значения (рис. 6.3). Пульсации скорости являются результатом хаотического пульсационного движения молей жидкости. Это движение вызывает аналогичные пульсации всех параметров потока — давления, температуры; в сжимаемой жидкости — плотности, в неоднородной — концентрации. Эти пульсации можно представить аналогично пульсациям скорости (см. рис. 6.3). Пульсации параметров является самым характерным свойством турбулентного течения.

Ламинарное течение сплошной среды может быть как неустановившимся, так и установившимся.

Турбулентное течение сплошной среды является принципиально неустановившимся хаотическим течением. Система основных дифференциальных уравнений (см. гл. 4), описывающая распределение истинных или мгновенных значений  $u, v, w, p, T, \rho$  в потоке, справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного течений. Для многих случаев ламинарного течения существуют методы интегрирования этих уравнений. Турбулентное движение настолько сложно, что пока не удается даже записать условия однозначно-

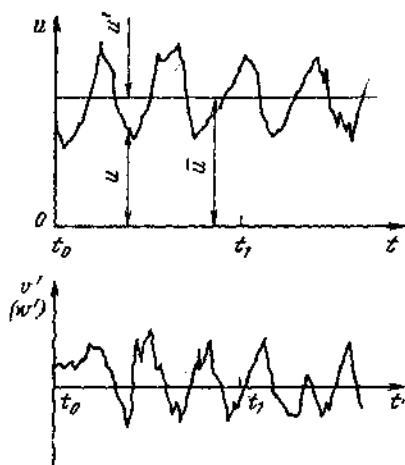


Рис. 6.3. Истинная, пульсационная и осредненная скорости

сти ни для одной из задач и, следовательно, проинтегрировать основные дифференциальные уравнения и определить поля истинных параметров. Для решения большинства практических задач нет необходимости изучать изменение истинных параметров жидкости в турбулентных течениях.

В современных теориях турбулентное течение представляется как хаотическое движение молей жидкости, наложенное на главное направленное движение жидкости с некоторой средней скоростью и средними параметрами\*. При исследовании турбулентных течений в большинстве случаев изучается изменение этих средних параметров, представляющих для практики наибольший интерес. В этом изучении существенная роль отводится эксперименту и теории подобия.

Разложим турбулентное течение на осредненное по времени и пульсационное. Обозначим истинное значение  $x$  — составляющей скорости в точке  $A$  в момент  $t$ , через  $u$ , осредненное во времени — через  $\bar{u}$ , и пульсационную составляющую — через  $u'$  (см. рис. 6.3). Вводя аналогичные обозначения для других параметров, получим

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u'; & v &= \bar{v} + v'; & w &= \bar{w} + w', \\ p &= \bar{p} + p'; & T &= \bar{T} + T'; & q &= \bar{q} + q'. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Параметры осредняются во времени в заданной точке пространства, например

$$\bar{u} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_0+t_1} u dt; \quad \bar{p} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_0+t_1} p dt. \quad (6.4)$$

Турбулентное течение называется *квазиустановившимся* или *установившимся по осредненным параметрам*, если эти параметры не изменяются во времени в любой точке турбулентного течения. Мы будем рассматривать только квазиустановившиеся турбулентные течения (см. рис. 6.3). В этом случае турбулентное течение может рассматриваться как «слоистое» со своей постоянной средней скоростью в каждом слое. Средние значения скорости, давления и температуры в заданной точке такого течения измеряются датчиками, обладающими достаточной инерционностью.

Минимальная величина интервала осреднения  $t_1$  в формуле (6.4) такова, что при его увеличении значение осредняемой величины не изменяется (см. рис. 6.3). В этом случае осредненные по времени значения пульсационных составляющих по определению будут равны нулю

$$\bar{u}' = 0; \quad \bar{v}' = 0; \quad \bar{w}' = 0; \quad \bar{p}' = 0; \quad \bar{T}' = 0; \quad \bar{q}' = 0. \quad (6.5)$$

Если для характеристики турбулентного течения указываются определенные значения пульсационных скоростей  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ , то под

\* Хаотическое движение молей как капельной жидкости, так и газов, уподобляется тепловому хаотическому движению молекул газов. Поэтому характеристики этих двух движений схожи по смыслу и названию.



этим понимаются среднеквадратичные значения этих величин, например

$$\dot{u}' = \sqrt{\overline{u'^2}} = \sqrt{\frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} (u')^2 dt}. \quad (6.6)$$

Обычно пульсации составляют сотые доли от среднего значения скорости, но влияние их на осредненное течение очень велико. Оно проявляется как бы в увеличении вязкости осредненного движения по сравнению с молекулярной вязкостью. Эта дополнительная или кажущаяся вязкость или кажущиеся турбулентные напряжения являются основными понятиями всех современных теорий турбулентности. Термин «кажущиеся» отражает инерционный условный характер турбулентных напряжений.

В дальнейшем будем употреблять следующие формулы осреднения параметров во времени (для примера взяты параметры  $u$  и  $v$ ):

$$\bar{u} = \bar{u}; \quad \overline{u+v} = \bar{u} + \bar{v}; \quad \overline{uv} = \bar{u}\bar{v}; \quad (\overline{uu'}) = 0; \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}; \quad \overline{\int u dt} = \int \bar{u} dt. \quad (6.8)$$

Однако, осредненные значения произведений пульсационных составляющих могут быть не равны нулю

$$\overline{u'v'} \neq 0, \quad (\bar{u}')^2 \neq 0; \quad \overline{u'T'} \neq 0 \text{ и т. д.} \quad (6.9)$$

В этом случае между пульсациями существует корреляция (связь). Именно наличие корреляции между пульсациями приводит к дополнительной вязкости в турбулентном потоке.

#### 6.4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ (КАЖУЩИЕСЯ) ТУРБУЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Задача состоит в получении формул для определения дополнительных турбулентных напряжений и установлении зависимости их от осредненных параметров турбулентного течения, а также в составлении системы дифференциальных уравнений, которым удовлетворяли бы осредненные параметры и, для которых возможно составить условия однозначности.

Рассмотрим квазиустановившееся турбулентное движение несжимаемой вязкой жидкости при отсутствии массовых сил. Полная система уравнений в этом случае состоит из уравнений неразрывности (3.19) и Навье—Стокса (4.35). Из уравнения (4.35) исключим равные нулю массовые силы ( $X=Y=Z=0$ ) и члены, учитывающие сжимаемость жидкости ( $\text{div } W=0$ ). Левые части этих уравнений преобразуем с помощью уравнения (3.19) и получим

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u}; \\ \rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (vu)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2)}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v}; \\ \rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (wu)}{\partial x} + \frac{\partial (wv)}{\partial y} + \frac{\partial (w^2)}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta \bar{w}. \end{aligned} \right\} (6.10)$$

Подставим в уравнения (3.19) и (4.10) вместо давления и компонента скорости их выражения через осредненные значения и пульсации по (6.3) и осредним по времени каждый член. Осреднение (3.19) с учетом  $\overline{\partial u' / \partial x} = \overline{\partial v' / \partial y} = \overline{\partial w' / \partial z} = 0$  показывает, что

$$\partial \bar{u} / \partial x + \partial \bar{v} / \partial y + \partial \bar{w} / \partial z = 0, \quad (6.11)$$

т. е. что уравнению неразрывности турбулентного течения несжимаемой жидкости удовлетворяют истинные, осредненные и пульсационные компоненты скорости. Осреднение членов уравнений движения (6.10), квадратичных относительно осредненных скоростей типа  $\bar{u}^2$ ,  $\bar{u}\bar{v}$  не изменит этих членов, так как в соответствии с (6.7)  $\overline{\bar{u}^2} = \bar{u}^2$ ,  $\overline{\bar{u}\bar{v}} = \bar{u}\bar{v}$ . Осреднение членов, линейных относительно пульсаций типа  $\overline{\partial u' / \partial t}$ ,  $\overline{\partial u' / \partial x}$ ,  $\overline{\partial^2 u' / \partial x^2}$ , а также членов смешанного типа  $\overline{\bar{u}u'}$ ,  $\overline{\bar{u}v'}$  и т. д., даст нули. Члены, квадратичные относительно пульсаций  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{u'v'}$  и т. д., после осреднения останутся в виде выражений  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{u'v'}$  и т. д. Произведя эти осреднения, преобразовав левые части уравнений с помощью (6.11) и перенеся члены, квадратичные относительно пульсаций, в правые части, получим дифференциальные уравнения движения для средних параметров квазиустановившегося турбулентного течения несжимаемой жидкости

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \\ &- \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right]; \\ \rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} - \\ &- \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} \right]; \\ \rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \\ &+ \mu \Delta \bar{w} - \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right], \end{aligned} \right\} (6.12)$$

которые называются уравнениями Рейнольдса.

Уравнения (6.12) отличаются от уравнений Навье—Стокса (4.38) тем, что все соответственные члены в них написаны для осредненных параметров, поэтому для квазиустановившегося тур-

булентного течения члены  $\partial \dots / \partial t$  отсутствуют. Наиболее важное отличие состоит в том, что уравнения (6.12) содержат дополнительные члены, обусловленные турбулентными пульсациями. На основании сопоставления уравнений (6.12) и (4.34) заключаем, что дополнительные члены в (6.12) представляют суммы проекций на оси  $x, y, z$  дополнительных или кажущихся турбулентных напряжений, которые можно записать в виде таблицы

$$-\begin{vmatrix} \overline{qu'^2} & \overline{qu'v'} & \overline{qu'w'} \\ \overline{qu'v'} & \overline{qv'^2} & \overline{qv'w'} \\ \overline{qu'w'} & \overline{qv'w'} & \overline{qw'^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{vmatrix}, \quad (6.13)$$

где  $\sigma'_x = -\overline{qu'^2}$ ;  $\sigma'_y = -\overline{qv'^2}$ ;  $\sigma'_z = -\overline{qw'^2}$  — нормальные дополнительные напряжения, обусловленные пульсационным движением, действующие на площадки нормальные к осям  $x, y, z$ ;  $\tau'_{xy} = -\overline{qu'v'} = -\tau'_{yx}$  и т. д. — касательные дополнительные напряжения, парные из которых, по аналогии с обычными, равны между собой. Аналогично может быть получено дифференциальное уравнение энергии для осредненного турбулентного течения.

Система уравнений (6.11) и (6.12) содержит шесть новых неизвестных дополнительных напряжений (6.13) и, следовательно, не замкнута. Современные теории турбулентности предназначены для описания механизма турбулентных течений, указания путей управления ими и получения выражений дополнительных напряжений через компоненты осредненной скорости  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  для того, чтобы замкнуть систему (6.11) и (6.12).

## 6.5. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПУТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Турбулентные течения происходят не только в трубах, но и в пограничном слое при внешнем обтекании тел, в струйных течениях в неограниченном пространстве (струя отработавших газов реактивного двигателя в атмосфере). Каждое из этих течений имеет свою специфику и свои закономерности.

Полуэмпирические теории турбулентности основаны на экспериментальных данных. Расчетные формулы обязательно содержат некоторое число экспериментальных констант, определяемых не свойствами жидкостей, а особенностями данного вида турбулентного течения. Поэтому в настоящее время нет универсальной теории турбулентности. Более строгие статистические теории турбулентности, основанные на законах статистической физики, пока еще далеки от применения в технике [22, 28]. Наибольшее распространение в настоящее время имеет теория пути перемешивания, предложенная Прандтлем в 1925 г.

В теории пути перемешивания хаотическое пульсационное движение молей, как капельной жидкости, так и газов, наложенное на осредненное течение, уподобляется тепловому хаотическому

движению молекул газа. Поэтому характеристики этих двух движений схожи по смыслу и названию.

В качестве основного постулата в теории пути перемешивания принимается, что моли жидкости, совершающие пульсации, на определенном расстоянии  $l$ , названном *путем перемешивания*, сохраняют свою индивидуальность, т. е. осредненное количество движения, скорость пульсации, температуру, концентрацию избыточного элемента и т. д. и лишь пройдя это расстояние смешиваются с окружающей средой (теряют индивидуальность), привнося в нее тем самым пульсации скорости, температуры, концентрации и т. д. Предполагается, что путь перемешивания равен также *масштабу турбулентности*, т. е. характерному размеру пульсирующего моля. В турбулентном потоке имеется широкий спектр масштабов турбулентности от самых крупных, соизмеримых с поперечным размером канала, до самых мелких, приближающихся к молекулярному уровню. Отсюда следует, что крупные моли пульсируют на большие расстояния, мелкие — на меньшие. Если для турбу-

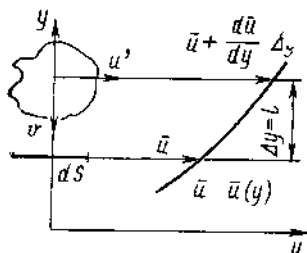


Рис. 6.4. Иллюстрация к теории пути перемешивания

лентного течения называется определенная величина пути перемешивания, то под этим понимают его среднеквадратическое значение. Аналогом пути перемешивания является путь свободного пробега молекул. Аналогом пульсационной составляющей скорости — скорость теплового хаотического движения молекул газа.

Изотропной турбулентностью называется турбулентное течение, в котором средние пульсационные скорости одинаковы во всех направлениях

$$\bar{u}'^2 = \bar{v}'^2 = \bar{w}'^2.$$

Степенью турбулентности  $\varepsilon$  или интенсивностью турбулентности называется отношение средней пульсационной составляющей к среднемассовой скорости потока. Для неизотропной турбулентности

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \bar{w}'^2)}}{W}. \quad (6.14)$$

Для изотропной турбулентности  $\varepsilon = \sqrt{\bar{u}'^2}/W$ .

Выражение пульсационных составляющих через осредненные скорости. Рассмотрим наиболее простое плоско-параллельное квазиустановившееся турбулентное течение около стенки канала с прямоугольным сечением (рис. 6.4). В этом случае  $\bar{u} = \bar{u}(y)$ ,  $\bar{v} = \bar{w} = 0$ ,  $v = v'$ ,  $w = w'$  и из касательных напряжений рассмотрим только одно

$$\tau'_{yx} = -\rho \bar{v}'u'. \quad (6.15)$$

Пусть моль жидкости совершает пульсацию из слоя Б в слой М на расстояние  $\Delta y = l$  со скоростью  $v'$ . Тогда за время  $dt$  через площадку  $dS$  пройдет масса жидкости  $dm = \rho v' dS dt$ . При этом моль вызовет в слое М продольную положительную пульсацию скорости, равную разности скоростей в слоях Б и М, которая, как предполагается, по абсолютной величине равна поперечной пульсационной скорости

$$u' = |v'| = \bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dy} \Delta y - \bar{u} = \Delta y \frac{d\bar{u}}{dy} = l \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (6.16)$$

Так в теории Прандтля пульсационные составляющие скорости выражаются через осредненную скорость и путь перемешивания. В (6.16) знаки пропорциональности заменены знаками равенства в предположении, что все коэффициенты пропорциональности учтены в величине пути перемешивания.

Физический смысл дополнительного касательного напряжения. При пульсации моль жидкости переносит из слоя Б в слой М через площадку  $dS$  избыточное количество движения  $u' dm = \rho v' u' dS dt$ . Вследствие этого на площадку  $dS$  будет действовать положительная касательная сила турбулентного трения  $\tau_T dS$ , импульс которой за время  $dt$  равен перенесенному количеству движения, т. е.  $\tau_T dS dt = \rho v' u' dS dt$ . После сокращения и осреднения во времени, получим искомое дополнительное напряжение, обусловленное турбулентным перемешиванием

$$\tau_T = \overline{\rho v' u'}. \quad (6.17)$$

Положительный знак  $\tau_T$  определен положительным знаком переносимого пульсацией избыточного направленного количества движения из верхнего слоя Б в нижний — М при заданном  $d\bar{u}/dy > 0$  (см. рис. 6.4). Для определения знака  $\tau_{yx}$  в уравнениях Рейнольдса (6.12) и в (6.15) необходимо учитывать знак осредненного произведения  $\overline{v' u'}$ , который в рассматриваемых условиях отрицателен, так как отрицательная  $v'$  вызывает положительную  $u'$ . Значит между  $v'$  и  $u'$  существует корреляция, поэтому их осредненное произведение не равно нулю и отрицательно  $\overline{v' u'} < 0$ , т. е. турбулентное касательное напряжение  $\tau_{yx} = -\overline{\rho v' u'}$  в этом случае также положительно,  $\tau_{yx} = \tau_T$  и имеет такой же знак, как и напряжение молекулярного трения  $\tau = \mu d\bar{u}/dy$ .

Подставим значения  $u'$  и  $v'$  из (6.16) в (6.17), получим формулу Прандтля

$$\tau_T = \rho l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (6.18)$$

имеющую при исследовании турбулентных течений такое же значение, как формула Ньютона  $\tau = \mu du/dy$  при исследовании ламинарных течений.

При изменении знака  $d\bar{u}/dy$  должен изменяться и знак касательного напряжения. Чтобы учесть это формулу (6.18) записывают следующим образом

$$\tau_T = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (6.19)$$

где  $\mu_T$  — коэффициент турбулентной вязкости, Н·с/м<sup>2</sup>, он вводится по аналогии с динамическим коэффициентом вязкости (1.11).

В соответствии с (6.19) и (6.16)

$$\mu_T = \rho l v' = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|, \quad (6.20)$$

а кажущийся кинематический коэффициент вязкости

$$\nu_T = \mu_T / \rho = l v' = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (6.21)$$

Формулы (6.19), (6.20) и (6.21) по структуре совпадают с формулами (1.11), (1.13) и (1.14), определяющими напряжение молекулярного трения, динамический и кинематический коэффициенты вязкости газа и, следовательно, могли быть написаны без выводов, по аналогии.

Формулы турбулентного переноса тепла и вещества. Запишем эти формулы по аналогии с формулами молекулярного переноса (1.33) и (1.34) и имея в виду (6.16)

$$\lambda_T = \rho C_p l_1 v' = \rho C_p l_1^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|; \quad \chi_T = l_1 v' = l_1^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|; \quad D_T = l_1 v' = l_1^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|; \quad (6.22)$$

$$q_T = -\lambda_T \frac{d\bar{T}}{dy} = -\rho C_p l_1^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{T}}{dy}; \quad G_T = -D_T \frac{d\bar{C}}{dy} = -l_1^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{C}}{dy}, \quad (6.23)$$

где  $l_1$  — путь перемешивания для турбулентного переноса тепла и вещества.

Рассмотрев направления теплового и диффузионного турбулентных потоков найдем, что при одинаковых знаках  $d\bar{T}/dy$  и  $d\bar{C}/dy$  они одинаковы с молекулярными. Следовательно, в турбулентных течениях полный перенос складывается из молекулярного и турбулентного

$$\tau_{\Sigma} = \tau_m + \tau_T = (\mu + \mu_T) \frac{d\bar{u}}{dy}; \quad (6.24)$$

$$q_{\Sigma} = q_m + q_T = -(\lambda + \lambda_T) \frac{d\bar{T}}{dy}; \quad (6.25)$$

$$G_{\Sigma} = G_m + G_T = -(D + D_T) \frac{d\bar{C}}{dy}. \quad (6.26)$$

Турбулентные критерии Прандтля и Шмидта. Используются для относительной оценки интенсивности турбулентного переноса количества движения и тепла и количества движе-

ния и примеси. По аналогии с  $Pr = \nu/\chi$  и  $Sc = \nu/D$  и с учетом (6.21), (6.22) и (6.23) запишем

$$Pr_T = \nu_T/\chi_T = l/l_1; \quad Sc_T = \nu_T/D_T = l/l_1. \quad (6.27)$$

В соответствии с теорией пути перемешивания одни и те же объемы жидкости, пульсируя, одновременно переносят количество движения, тепло и примесь. Казалось бы, что механизм переноса всех субстанций должен быть одинаков — турбулентная диффузия, и  $Pr_T$  и  $Sc_T$  должны быть равны единице. Однако это простейшее предположение  $Pr_T \approx 1$  и  $Sc_T \approx 1$  приближенно выполняется лишь для турбулентных течений в трубах и в пограничном слое, т. е. для пристеночной турбулентности, где имеет место подобие полей скорости, температуры и концентрации.

В струйных течениях при свободной турбулентности обычно

$$Pr_T = Sc_T = 0,5 \dots 0,8 \quad \text{и} \quad l_1 = (1,25 \dots 2) l,$$

т. е. перенос скалярных субстанций — тепла и примеси происходит одинаково, но более интенсивно, чем перенос количества движения. Для объяснения этого явления на рис. 6.5 схематично показано, что при пульсации молекулы переносят количество движения на расстояние  $l$  между центрами тяжести моля в начале и в конце пульсации независимо от его вращения.

При этом скалярные субстанции — тепло и примесь, из-за вращения моля, переносятся на большее расстояние  $l_1$ . Вращение моля при пульсации является дополнительным механизмом переноса скалярных субстанций, т. е. механизм турбулентного переноса количества движения и скалярных субстанций похож, но неодинаков.

Твердые поверхности в турбулентных течениях вызывают снижение размеров молей и ограничивают их вращение и описанный эффект ослабляется. Турбулентные числа Прандтля и Шмидта практически не зависят от свойств жидкостей, а определяются формой движения и координатами точки. В этом они коренным образом отличаются от молекулярных аналогов. Если  $Pr = \nu/\chi$  для жидких металлов и масел отличаются в сотни тысяч раз (см. табл. 5.1), то  $Pr_T = \nu_T/\chi_T$  и  $Sc_T = \nu_T/D_T$ , для подобных течений этих различных жидкостей, близки к единице.

Сопоставление турбулентного и молекулярного переносов. Сравнение формул молекулярного и турбулентного переноса показывает, что при одинаковых поперечных градиентах скорости отношение турбулентного переноса любой субстанции к молекулярному равно по порядку величины  $l\nu'/l_m\nu_m$ . Оценим это отношение для течения воздуха с  $\bar{u} = 50$  м/с в трубе  $d = 100$  мм при обычных параметрах трубной турбулентности  $\varepsilon = \nu'/\bar{u} = 5\%$ ,

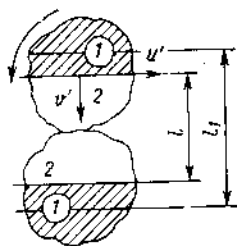


Рис. 6.5. Иллюстрация механизма турбулентного переноса

$l=0,1$ ,  $d=10$  мм, при  $T=300$  К,  $p=10^5$  Па, когда  $v_M=600$  м/с,  $l_M=$   
 $=10^{-5}$  мм

$$\frac{\tau_T}{\nu} = \frac{l v'}{l_M v_M} = \frac{10 \cdot 2,5}{10^{-5} \cdot 600} \cong 4 \cdot 10^3.$$

**Вопрос 6.2.** В чем причина интенсификации турбулентного переноса по сравнению с молекулярным?

Диссипация энергии в турбулентных течениях. Энергия направленного осредненного движения в результате наличия градиента скорости  $d\bar{u}/dy \neq 0$  непрерывно переходит в наиболее крутые моли жидкости, вызывающие появление кажущихся турбулентных напряжений. Вследствие неустойчивости движения непрерывно возникают все меньшие и меньшие турбулентные образования. Для самых малых из них числа Рейнольдса  $Re = v'l/\nu$  оказываются малы, а силы молекулярного трения — велики. Именно на этом уровне масштабов, близких к молекулярным, энергия движения преобразовывается в тепло, т. е. происходит диссипация энергии главного движения. Как показывает приведенная оценка, диссипация энергии в турбулентном течении больше, чем в ламинарном.

Значение турбулентности. Турбулентные течения необходимо организовывать, когда требуется интенсифицировать процессы переноса, например смешение топлива с воздухом, химическую реакцию (реакцию горения в камерах сгорания двигателей), охлаждение раскаленных поверхностей жидкостью или передачу тепла от жидкости к твердым телам. Многие процессы в двигателях были бы неосуществимы при ламинарных течениях. Наоборот, течение следует ламинизировать, когда необходимо предотвратить смешение различных сред, текущих рядом, уменьшить теплообмен между жидкостью и твердым телом, уменьшить гидравлические потери при течении жидкости в трубах. В связи с этим встает вопрос об управлении режимами течения.

Управление режимами течения. В соответствии с выводами теории пути перемешивания (6.18), интенсивность турбулентности можно увеличить, если в потоке образовать зоны повышенных градиентов скорости  $d\bar{u}/dy$  (рис. 6.6,а). Для этого в потоках устанавливаются турбулизаторы — завихрители и турбулизаторы решетки, выполненные из плохообтекаемых стержней. В зонах смешения воздуха и топлива и в зоне горения камер ВРД так увеличивается степень турбулентности от естественной трубной  $\epsilon=5\%$  до  $\epsilon=75\%$ . Только при такой турбулентности удастся обеспечить высокое качество сгорания при современных длинах камер сгорания и скоростях потока в них. Изменяя размер ячеек турбулизаторных решеток, можно соответственно изменять масштаб турбулентности. Установка в потоках сеток из тонкой проволоки приводит к выравниванию поля скоростей  $d\bar{u}/dy \rightarrow 0$  и интенсивность турбулентности снижается. Именно так в аэродинамических трубах добиваются сужения турбулентности до  $\epsilon=0,1\%$  и ниже. Для



уменьшения интенсивности турбулентности в трубах устанавливают хонейкомб — набор длинных трубок  $d_1 < d$  так, что  $Re_1 = \frac{\bar{u}d_1}{\nu} < 2000$  и течение в трубках ламинаризуется (рис. 6.6,б).

В заключение отметим, что теория пути перемешивания позволила заменить неизвестные пульсационные составляющие  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  в формулах переноса через осредненную скорость  $(d\bar{u}/dy)$  и путь перемешивания  $l$ , который хотя и не является константой

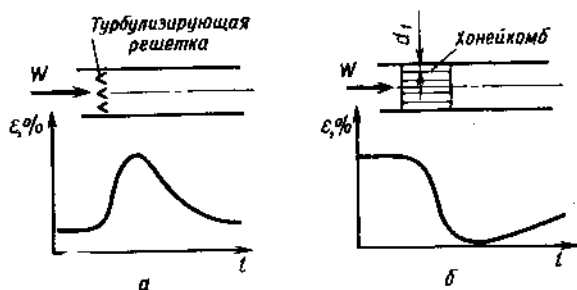


Рис. 6.6. Иллюстрация управления режимами течения:

а — турбулизирующая решетка; б — хонейкомб

жидкости, как  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $D$ , но является функцией точки и формы турбулентного течения. Во многих случаях удается установить простую связь между длиной пути перемешивания и характерными размерами рассматриваемых течений. Эти зависимости устанавливаются экспериментально для каждой формы турбулентного течения отдельно (п.п. 8.1, 17.1). Поэтому теория пути перемешивания называется полуэмпирической и не является универсальной.

В теории пути перемешивания принята весьма упрощенная модель турбулентного движения. Эта теория не объясняет различия в механизмах переноса количества движения с одной стороны и примеси и энтальпии с другой ( $Pr_T \neq 1$ ,  $Sc \neq 1$ ), а также наблюдаемого в опытах турбулентного переноса за сетками в условиях  $d\bar{u}/dy = 0$ . Поэтому имеются другие теории турбулентности [28] и их разработка продолжается.

Однако теория пути перемешивания с успехом применяется для расчета турбулентных течений в трубах, в пограничном слое и в струйных течениях. Кроме того, эта теория указывает эффективные методы управления турбулентными течениями.

## 6.6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ПО ЧИСЛУ РЕЙНОЛЬДСА

Число Рейнольдса, характеризующее отношение сил инерции к силам вязкости, действующих на частицы жидкости в потоках, является важнейшим критерием гидродинамического подобия течений. Во-первых, его величина определяет качественно отличные режимы течения жидкости — ламинарный и турбулентный. Во-вто-

рых, предельным значениям  $Re < 1$  и  $Re \rightarrow \infty$  соответствуют два предельных случая течений: при ползущих течениях, когда  $Re < 1$ , силы трения намного больше сил инерции. Это позволяет получить для таких течений приближенные решения уравнений Навье—Стокса (4.35) отбрасыванием относительно малых инерционных членов типа  $\rho u \frac{du}{dx}$ , что переводит эти уравнения в линейные. При течениях с очень большими числами  $Re \rightarrow \infty$  силы трения значительно меньше сил инерции, что приближенно и формально соответствует течению идеальной жидкости  $\mu \rightarrow 0$ . Однако, в этом случае нельзя исключить из уравнения Навье—Стокса все члены, зависящие от вязкости, т. е. нельзя во всей области течения положить  $\mu = 0$ , так как при этом не будет выполняться граничное условие прилипания жидкости на поверхности твердых тел. Определение возможных упрощений уравнений Навье—Стокса в предельном случае  $Re \rightarrow \infty$  является предметом теории пограничного слоя (см. гл. 15).

## 6.7. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ

Повышенные гидравлические потери в элементах проточной части двигателей, лопаточных машин, гидравлических систем делают их нерентабельными и даже неработоспособными. В газо- и нефтепроводах через каждые 50...100 км устанавливаются дорогостоящие компрессорные и насосные станции, в которых жидкости сообщается энергия для преодоления гидравлических сопротивлений. С другой стороны, в ряде устройств используется их повышенное сопротивление. Таковы парашюты, стабилизаторы пламени, сетки для выравнивания полей скоростей в аэродинамических трубах и т. д. Поэтому расчет гидравлических сопротивлений и управление ими является одной из основных задач гидрогазодинамики.

Гидравлические потери при течении несжимаемых жидкостей в каналах. Гидравлические потери на участке 1—2 канала могут быть рассчитаны по уравнению Бернулли (4.83). Обычно принято их выразить в паскалях или в метрах столба жидкости, что соответствует методике их экспериментального измерения

$$\rho l_{\text{тр}} = \rho g (H_1 - H_2) - \rho l_{\text{тех}}; \text{ Па}; \quad \frac{1}{g} l_{\text{тр}} = (H_1 - H_2) - \frac{1}{g} l_{\text{тех}}. \quad (6.28)$$

При  $l_{\text{тех}} = 0$  и  $z_2 = z_1$  гидравлические потери определяются разностью полных давлений

$$\rho l_{\text{тр}} = \Delta p^* = p_1^* - p_2^*; \quad \frac{1}{g} l_{\text{тр}} = \Delta h^* = \frac{p_1^* - p_2^*}{\rho g}, \quad (6.29)$$

если при этом  $S_2 = S_1$ , то  $W_2 = W_1$  и

$$\rho l_{\text{тр}} = \Delta p^* = \Delta p = p_1 - p_2; \quad \frac{1}{g} l_{\text{тр}} = \Delta h^* = \Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}. \quad (6.30)$$

Различают два вида гидравлических потерь:

а) местные потери  $\Delta p_m^*$ ,  $\Delta h_m^*$ ; б) потери на трение в прямых каналах постоянного сечения  $\Delta p_{тр}$ ,  $\Delta h_{тр}$ . Суммарные потери на участке 1—2 являются суммой этих потерь

$$ql_{гр} = \Delta p_m^* + \Delta p_{тр}; \quad \frac{1}{g} l_{гр} = \Delta h_m^* + \Delta h_{тр}. \quad (6.31)$$

В большинстве задач уравнение Бернулли используется для определения падения полного давления на участке канала 1—2 и:

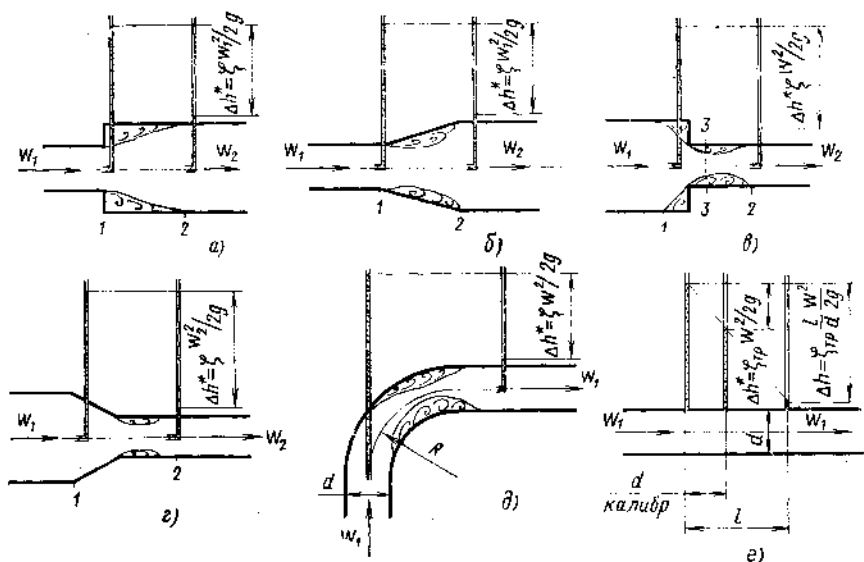


Рис. 6.7. Виды гидравлических сопротивлений:

а—внезапное расширение канала; б—то же постепенное; в—внезапное сужение канала; г—то же постепенное; д—поворот канала; е—потери на трение

для определения потребной технической (внешней) работы для обеспечения заданного полного давления  $p_2^*$ . Для этого необходимо знать величину гидравлических потерь, т. е. рассчитывать их без использования уравнения Бернулли.

Расчет местных гидравлических потерь. Местные потери это затраты энергии жидкости на образование и поддержание вихрей в вязкой жидкости, вызванное изменением размеров и формы канала, а также на совершение работы трения на этих участках. На рис. 6.7 представлены три простейшие вида местных сопротивлений: 1) внезапное а и постепенное б расширение канала; 2) внезапное в и постепенное г сужение канала; 3) поворот канала д. Другие, более сложные виды местных сопротивлений — краны, дроссели, различные устройства, помещенные в поток, являются сочетанием простейших видов.

Местные потери выражаются по формуле Вейсбаха в долях скоростного напора

$$\Delta h_m^* = \zeta_i \frac{W_i^2}{2g}; \quad \Delta p_m^* = \zeta_i \frac{\rho W_i^2}{2}, \quad (6.32)$$

где  $W_i$  — среднемассовая скорость в сечении  $i$  канала;  $\zeta_i$  — коэффициент местного сопротивления — отношение энергии, затраченной на преодоление данного местного сопротивления, к скоростному напору в сечении  $i$ . Величина  $\zeta_i$  зависит от формы местного сопротивления, от режима течения и числа Рейнольдса, а также от выбора сечения  $i$  для подсчета средней скорости  $W_i$ .

На рис. 6.7 схематично показано измерение местных потерь двумя пьезометрами полного давления. Приемники полного давления выполняются из тонких трубок  $d=0,5 \dots 0,8$  мм с тем, чтобы вносимое ими возмущение в поток было минимальным.

Потери на трение или линейные потери. Это затраты энергии на преодоление трения при течении жидкости в прямых каналах постоянного сечения (рис. 6.7,е). Калибром трубы называется ее диаметр  $d$ . Потери на трение на участке трубы в один калибр выражаются по аналогии с (6.32)

$$\Delta h_{\text{тр.к}} = \zeta_{\text{тр}} \frac{W^2}{2g}; \quad \Delta p_{\text{тр.к}} = \zeta_{\text{тр}} \frac{\rho W^2}{2}, \quad (6.33)$$

где  $\zeta_{\text{тр}} = \frac{\Delta h_{\text{тр.к}}}{W^2/2g}$  — коэффициент сопротивления трения, зависящий от режима течения, числа Рейнольдса и шероховатости стенок трубы.

Потери на трение в трубе, длина которой равна  $l/d$  калибров, определяется по формуле Дарси—Вейсбаха

$$\Delta h_{\text{тр}} = \zeta_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{W^2}{2g}; \quad \Delta p_{\text{тр}} = \zeta_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{\rho W^2}{2}. \quad (6.34)$$

Расчет гидравлических сопротивлений сводится к определению средней скорости и  $\zeta$  и  $\zeta_{\text{тр}}$ , которые, прежде всего, зависят от режима течения. Из-за принципиальных различий между ламинарным и турбулентным течениями их исследуют отдельно.

## ЛАМИНАРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (ЭЛЕМЕНТЫ ГИДРАВЛИКИ)

Рассмотрим примеры точных и приближенных решений уравнений Навье—Стокса (4.35) и неразрывности (3.19) для установившихся ламинарных течений несжимаемой жидкости. Под *точными* будем понимать решения при сохранении в уравнениях всех членов, тождественно не равных нулю для изучаемых течений. *Приближенными* будем называть решения, полученные исключением из уравнений членов, величина которых мала по сравнению с величинами других членов.

Трудности интегрирования уравнений Навье—Стокса связаны с их нелинейностью. Поэтому возможность их точного и приближенного интегрирования обеспечивается для течений, в которых квадратичные члены типа  $udu/dx$  тождественно или приближенно равны нулю.

### 7.1. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Получим точные решения уравнений Навье—Стокса и неразрывности для течений, в которых существует только одна составляющая скорости  $u$ , а  $v=w=0$ . В этом случае из уравнения неразрывности (3.19) следует, что  $du/dx=0$ , т. е. что  $u=u(y, z)$  и не зависит от координаты  $x$ . Это является условием стабилизированного течения. За давление примем гидростатическое давление, постоянное для любых точек вертикальных сечений. В этом случае массовые силы тяжести уравновешиваются и выбывают из уравнений Навье—Стокса.

С учетом всех перечисленных условий уравнения Навье—Стокса принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \text{const} = -\frac{\Delta p}{l}; \quad (7.1)$$

где  $l$  — длина канала  $l \rightarrow 2$ , на которой рассматривается падение давления  $\Delta p = p_1 - p_2$ .

Постоянство  $dp/dx = -\Delta p/l$  вдоль течения следует из независимости левой части уравнения от  $y$  и  $z$  ( $\partial p/\partial y = \partial p/\partial z = 0$ ) и правой части от левой ( $du/dx = 0$ ), следовательно, левая и правая части

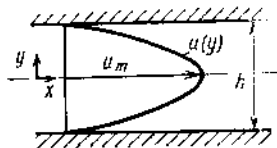


Рис. 7.1. Плоское течение в канале с параболическим распределением скоростей

равны одной и той же, постоянной для данного течения, величине. Уравнение (7.1) является линейным дифференциальным уравнением относительно переменной  $u(y, z)$ , так как из него выбыли все квадратичные члены.

**Задача 7.1.** Проанализируйте подробно исходные условия течения и получите из (3.19) и (4.35) уравнение (7.1).

Течение в зазоре между плоскими параллельными и бесконечными стенками (рис. 7.1). В этом случае скорость  $u$  изменяется только вдоль оси  $y$  и уравнение (7.1) принимает вид

$$\frac{\Delta p}{l} = -\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \text{const.} \quad (7.2)$$

**Задача 7.2.** Выполните последовательное двойное интегрирование (7.2). Примените граничное условие прилипания:  $y = \pm h/2$ ;  $u = 0$  для определения констант интегрирования и получите решение уравнений Навье—Стокса в виде искомого поля скоростей, представляющего параболу

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (7.3)$$

Определим максимальное значение скорости при  $y = 0$

$$u_{\max} = \frac{1}{8\mu} \frac{\Delta p}{l} h^2, \quad (7.4)$$

среднюю скорость в соответствии с (3.14)

$$\begin{aligned} u_{\text{ср}} &= \frac{1}{S} \int_S u dS = \frac{1}{2h} 2 \int_0^{h/2} \frac{1}{2\mu} \frac{\Delta p}{l} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) dy = \\ &= \frac{1}{12\mu} \frac{\Delta p}{l} h^2 = \frac{2}{3} u_{\max}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

гидравлическое сопротивление на длине  $l$  из (7.5)

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{12\mu l u_{\text{ср}}}{h^2}. \quad (7.6)$$

Умножив и разделив (7.6) на  $2u_{\text{ср}}Q$ , получим

$$\Delta p = \frac{24}{\frac{Qu_{\text{ср}}}{\mu} h} \frac{l}{h} \frac{Qu_{\text{ср}}^2}{2} = \frac{24}{\text{Re}_h} \frac{l}{h} \frac{Qu_{\text{ср}}^2}{2}. \quad (7.7)$$

Сравнивая (7.7) с формулой (6.34) Дарси—Вейсбаха находим, что при ламинарном течении коэффициент сопротивления трения  $\zeta_{\text{тр}}$  не является постоянной величиной, а обратно пропорционален числу Рейнольдса  $\text{Re}_h = \frac{Qu_{\text{ср}} h}{\mu}$ , определенному по средней скорости и высоте канала  $h$ :

$$\zeta_{\text{тр}} = \frac{24}{\text{Re}_h}. \quad (7.8)$$

Если ось  $x$  совместить с нижней стенкой, а ось  $y$  направить вверх, то уравнение поля скоростей примет вид:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{l} \left( \frac{hy - y^2}{2} \right). \quad (7.9)$$

**Задача 7.3.** Укажите природу гидравлического сопротивления в ламинарном течении и его действительную зависимость от  $u_{cp}$ ,  $h$ ,  $l$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ . Объясните, как учитывается эта зависимость в формуле Дарси—Вейсбаха (7.34), по которой рассчитывается это сопротивление.

**Задача 7.4.** Получите формулу распределения напряжения трения по сечению канала. Изобразите поле векторов  $\tau = f(y)$ .

**Течение Куэтта.** Это течение в канале высотой  $h$  между бесконечными параллельными плоскими стенками, одна из которых движется в своей плоскости с постоянной скоростью  $u_0$  (рис. 7.2). Условия однозначности этого течения такие же, как у предыдущего, и поэтому оно описывается уравнением (7.2). Производя двойное интегрирование (7.2) и используя граничные условия прилипания  $u=0$  при  $y=0$  и  $u=u_0$  при  $y=h$ , получим искомое поле скоростей

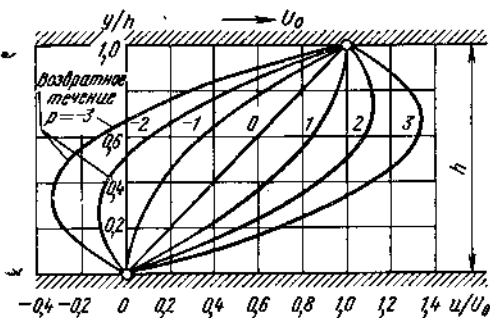


Рис. 7.2. Течение Куэтта между двумя параллельными плоскими стенками. Кривые со значениями  $p > 0$  соответствуют падению давления в направлении движения верхней стенки, а со значениями  $p < 0$  — повышению давления в этом направлении; кривая  $p = 0$  соответствует градиенту давления, равному нулю

$$u = u_0 \frac{y}{h} + \frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{l} \left( \frac{hy - y^2}{2} \right) = u_0 \frac{y}{h} + \frac{h^2}{2\mu} \frac{\Delta p y}{lh} \left( 1 - \frac{y}{h} \right). \quad (7.10)$$

Проанализируем изображенные на рис. 7.2 поля скоростей, даваемые уравнением (7.10) для различных значений  $\Delta p/l$ .

**Течение чистого сдвига или простое течение Куэтта.** Это течение обусловлено прилипанием жидкости к подвижной и неподвижной стенкам и трением между ее слоями при  $dp/dx=0$ . Поле скоростей линейно в соответствии с первым членом правой части (7.10)

$$u = u_0 y/h. \quad (7.11)$$

Напряжение трения в сечениях канала постоянно

$$\tau = \mu du/dy = \mu u_0/h. \quad (7.12)$$

Чем меньше расстояние между пластинами, тем больше  $\tau$ . Гребцам хорошо известно резкое увеличение сопротивления лодки при переходе с глубокого места на мелкое.

Течение при неподвижных пластинах  $u_0=0$ . Течение обусловлено только градиентом давления  $\Delta p/l = \text{const}$ . Поле

скоростей соответствует второму члену (7.10) и уравнению (7.9) уже исследованного течения и является параболическим (см. рис. 7.1).

Течение Куэтта при  $u_0 \neq 0$  и  $\Delta p/l \neq 0$  описывается уравнением (7.10) и представляет собой наложение течения простого сдвига и течения при  $dp/dx \neq 0$  в канале. Возможность применения метода наложения полей объясняется линейностью уравнения (7.2). Вид результирующего поля скорости определяется безразмерным градиентом давления

$$\bar{p} = \frac{h^2}{2\mu u_0} \frac{\Delta p}{l} = \frac{h^2}{2\mu u_0} \left( -\frac{dp}{dx} \right).$$

При  $\bar{p} > 0$ , т. е. при уменьшении давления в направлении движения верхней стенки, скорость положительна по всей ширине канала и равна сумме скоростей, составляющих течений. При  $\bar{p} < 0$ , т. е. при возрастании давления в направлении движения стенки, скорости этих независимых течений направлены в разные стороны и вычитаются. Поэтому в части поперечного сечения возможны отрицательные скорости, т. е. *возвратное течение*.

Теория Куэтта используется в теории смазки (см. п. 7.3).

Задача 7.5. Определить при каком значении  $p$  возникает возвратное течение.

Ответ  $|\bar{p}| > 1$ .

Задача 7.6. В течение Куэтта  $u_0 = 1,5$  м/с,  $h = 3$  мм, расход масла  $Q = 0$ ;  $\mu = 2 \cdot 10^{-2}$  Н·с/м<sup>2</sup>. Определить градиент давления и построить поля скоростей, смежных течений и результирующего.

Ответ:  $dp/dx = 2 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>.

Течение Пуазейля—Гагена. Это пространственное осесимметричное течение в прямолинейной трубе с круглым поперечным сечением. Жидкость движется под действием перепада давления  $dp/dx = \text{const} < 0$ . Поскольку скорость вдоль оси  $x$  не изменяется ( $du/dx = 0$ ), то силы давления уравновешиваются противоположно направленными силами трения. Силы инерции отсутствуют и движение описывает уравнение (7.1). Симметрия течения позволяет сделать вывод о равноценности производных  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  и, заменив  $y$  и  $z$  на  $r$ , записать уравнение (7.1) в следующем виде

$$2 \frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta p}{l}. \quad (7.13)$$

Так как  $y$  и  $z$  имеют, как положительное, так и отрицательное значения, то граничными условиями будут  $u = 0$  при  $r = \pm R$ , где  $r$  — текущий радиус, а  $R$  — радиус трубы; кроме того  $du/dr = 0$  при  $r = 0$ . Решением уравнения (7.13) является поле скоростей в поперечном сечении трубы

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2) = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} R^2 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (7.14)$$

представляющее параболу в осевом сечении и параболоид враще-



ния в пространстве. Скорость имеет максимальное значение на оси трубы при  $r=0$

$$u_{\max} = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{l} R^2. \quad (7.15)$$

Объемный расход жидкости через сечение трубы равен объему параболоида вращения (7.14), т. е. половине произведения площади основания на высоту, т. е. на  $u_{\max}$ :

$$Q = \frac{\pi R^2}{2} u_{\max} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\Delta p}{l}; \quad \Delta p = \frac{32\mu l u_{\text{ср}}}{d^2} = \frac{128\mu l Q}{\pi d^4}. \quad (7.16)$$

Формула (7.16) выражает закон Пуазейля—Гагена и используется для расчетов трубопроводов, при экспериментальном определении расхода жидкости по измерению скорости на оси трубы и при экспериментальном определении вязкости жидкости  $\mu$ .

Средняя скорость течения по определению

$$u_{\text{ср}} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\Delta p}{8\mu l} R^2 = 0,5 u_{\max}. \quad (7.17)$$

Заменив  $R=d/2$ , после несложных преобразований получим из (7.17) формулу для расчета потерь на трение

$$\Delta p_{\text{тр}} = \frac{64}{u_{\text{ср}} d} \frac{l}{d} \frac{Q u_{\text{ср}}^2}{2} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{Q u_{\text{ср}}^2}{2}. \quad (7.18)$$

Сопоставление (7.18) с формулой Дарси—Вейсбаха (6.34) показывает, что при ламинарном течении  $\zeta_{\text{тр}}$  обратно пропорционален числу Рейнольдса  $\text{Re}_d = \frac{Q u_{\text{ср}} d}{\mu}$

$$\zeta_{\text{тр}} = \frac{64}{\text{Re}_d}. \quad (7.19)$$

Равенство (7.19) выражает закон сопротивления для круглой трубы при ламинарном сечении. Зависимость  $\zeta_{\text{тр}} = f(\text{Re})$  представлена на рис. 8.3.

Напряжение трения определяется по закону Ньютона

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} = \frac{\Delta p}{2l} r \quad (7.20)$$

и распределено линейно по радиусу трубы. Знак минус учитывает уменьшение скорости с увеличением  $r$ .

**Задача 7.7.** При ламинарном течении в трубе расход жидкости увеличили в три раза за счет: увеличения средней скорости; увеличения диаметра трубы при неизменной  $u_{\text{ср}}$ . Определить изменение потерь на трение.

Ответ:  $\Delta p_1/\Delta p_0 = 2$ ;  $\Delta p_2/\Delta p_0 = 1/3$ .

**Вопрос 7.8.** В чем физическая причина увеличения потерь в первом и уменьшение во втором случаях задачи (7.7)?

**Вопрос 7.9.** Почему при течении между стенками  $\zeta_{\text{тр}} = \frac{24}{\text{Re}}$ , а при тече-

нии в трубе  $\zeta_{\text{тр}} = \frac{64}{\text{Re}}$ ?

Точные решения уравнения Навье—Стокса хорошо подтверждаются в экспериментах (см. рис. 8.3). Формула Дарси—Вейсбаха

$$\Delta p_{\text{тр}} = \zeta_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2} \quad \text{остается расчетной для ламинарных течений,}$$

но не выражает в явном виде истинной зависимости потерь на трение от  $u$ ,  $d$ ,  $\mu$ ,  $\rho$ , так как для ламинарного течения  $\zeta_{\text{тр}}$  не константа, а зависит от этих параметров [см. формулы (7.8) и (7.19)]. В действительности, в соответствии с законом Пуазейля, *потери на*

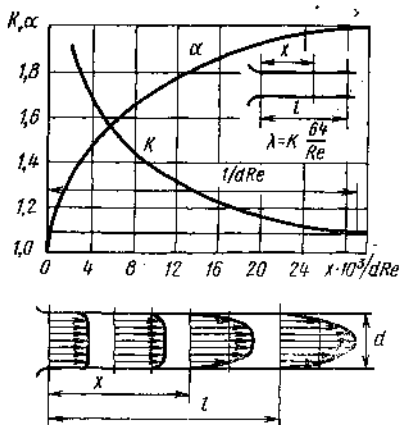


Рис. 7.3. Формирование параболического профиля скоростей

трение при ламинарном течении пропорциональны первой степени средней скорости, вязкости жидкости и длине канала и обратно пропорциональны квадрату диаметра трубы или квадрату высоты канала и не зависят от плотности, т. е. от инерционных свойств жидкости, так как  $\rho u du/dx = 0$  [см. формулы (7.6) и (7.16)]. При заданных  $\mu$ ,  $l$ ,  $u_{\text{ср}}$  и особенно расходе  $Q$ , эффективным средством снижения сопротивления является увеличение диаметра трубы, что объясняется уменьшением градиентов скорости  $du/dr$  и напряжения трения. При нарушениях стабилизированного ламинарного течения, связанных с наличием местных сопротивлений, нагревом и охлаждением, приводящим к поперечным токам и изменениям  $\mu$  по сечениям и длине трубы, рассмотренные точные решения не применимы, либо требуют введения поправок.

**Начальный участок трубы.** На входе в начальный участок поле скоростей практически равномерно (см. рис. 7.3). За счет трения жидкость у стенки трубы тормозится, а в области оси трубы ускоряется, так как расход жидкости вдоль трубы постоянен. В конце участка пограничный слой смыкается на оси, образуя параболический профиль скоростей, который в дальнейшем не изменяется. Длина начального участка, называемого участком гидродинамической стабилизации течения, определяется по эмпирической формуле

$$l_{\text{нач}}/d = 0,029 \text{ Re}_d \quad (7.21)$$

и при  $\text{Re}_d = 2300$   $l_{\text{нач}} = 66,5 d$ . Падение давления на начальном участке больше, чем на участке такой же длины при стабилизированном ламинарном течении и рассчитывается по скорректированной формуле Дарси—Вейсбаха

$$\Delta p_{\text{тр}} = k \zeta_{\text{тр}} \frac{l}{d} \frac{\rho u_{\text{ср}}^2}{2}, \quad (7.22)$$

где  $k$  — эмпирический коэффициент, переменный по длине начального участка (см. рис. 7.3).

Уравнения Навье—Стокса допускают точные решения для ряда других ламинарных течений, например, существует точное решение уравнений Навье—Стокса в цилиндрических координатах для течения вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрами [30].

## 7.2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКОВ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ

Для того, чтобы применить уравнение Бернулли (4.83), полученное для элементарной струйки, к потокам реальной жидкости в каналах, необходимо в этом уравнении использовать истинную величину средней удельной кинетической энергии  $E_k$  в данном сечении. Эта величина, с учетом неравномерного поля скоростей и неравномерного распределения кинетической энергии по сечению, определяется как средняя интегральная, Дж/кг:

$$E_k = \frac{\int_S \frac{u^2}{2} u dS}{Q} = \frac{\int_S \frac{u^3}{2} dS}{u_{cp} S}; \quad (7.23)$$

умножив и разделив (7.23) на  $u_{cp}^2$ , получим

$$E_k = \frac{\int_S u^3 dS}{u_{cp}^3 S} \frac{u_{cp}^2}{2} = \alpha \frac{u_{cp}^2}{2}, \quad (7.24)$$

где  $\alpha = \frac{\int_S u^3 dS}{u_{cp}^3 S}$  — коэффициент Кориолиса или коэффициент неравномерности поля скоростей — отношение действительной кинетической энергии потока к кинетической энергии потока с тем же расходом, но имеющего равномерное поле скоростей в том же сечении.

Уравнение Бернулли для потоков реальной жидкости принимает вид

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{u_2^2}{2} + l_{тек} + l_{тр}. \quad (7.25)$$

Если поля скоростей в сечениях 1 и 2 одинаковы, то  $\alpha_2 = \alpha_1$ .

**Задача 7.10.** Определите величину коэффициента Кориолиса: 1) для равномерного поля скоростей; 2) для ламинарного течения в круглой трубе. Ответ:  $\alpha_1 = 1$ ;  $\alpha_2 = 2$ .

Как следует из рис. 7.3, коэффициент  $\alpha$  возрастает на начальном участке от  $\alpha = 1$  до  $\alpha = 2$ . Это значит, что при одинаковых расходах, кинетическая энергия жидкости при неравномерном поле скоростей больше, чем кинетическая энергия при равномерном.

Более существенное уменьшение потенциальной энергии давления на начальном участке по сравнению со стабилизированным ламинарным течением ( $K=1,09$ ) объясняется не только большими потерями на трение, но и затратами этой энергии на двукратное увеличение кинетической энергии.

**Задача 7.11.** Вода при  $T=300$  К вытекает в атмосферу из открытого бака по горизонтальной трубке  $d=10^{-2}$  м,  $l=2$  м. Пренебрегая местным сопротивлением на входе в трубку, определить: 1) среднюю скорость  $u_{\text{ср}}$ , до которой в трубке течение будет ламинарным, если  $Re_{\text{кр}}=2300$ ; 2) падение полного  $\Delta p^*$  и статического  $\Delta p$  давлений на длине трубки; 3) высоту  $z_0$  уровня воды в баке над осью трубки, обеспечивающую  $u_{\text{ср}}$ .

Ответ:  $u_{\text{ср}}=0,184$  м/с;  $\Delta p^*=\Delta p \approx 97$  Па;  $z_0=0,044$  м.

**Задача 7.12.** Определить  $u_{\text{ср}}$  ламинарного течения воздуха при  $T=300$  К,  $p=10^5$  Па в трубке  $d=10^{-2}$  м, считая  $\rho=\text{const}$  и  $Re_{\text{кр}}=2300$ . Ответ:  $u_{\text{ср}} \approx 0,35$  м/с.

Как видим, в обычных условиях ламинарное течение может реализоваться в тонких трубках и при малых  $u_{\text{ср}}$ .

### 7.3. О ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА И НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ПОЛЗУЩИХ ТЕЧЕНИЙ

О гидродинамической теории смазки. Ползущее течение смазочного масла в зазоре между подшипником и валом (шипом) имеет большое практическое значение и составляет пред-

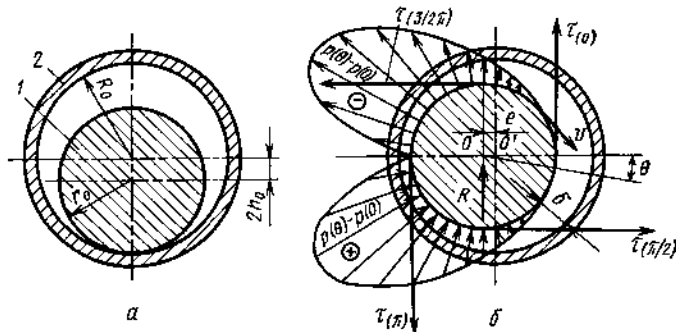


Рис. 7.4. Иллюстрация к гидродинамической теории смазки:

а—вал покоится  $v=0$ ; б—вал вращается со скоростью  $v$ ; 1—вал; 2—подшипник

мет гидродинамической теории смазки, основоположниками которой являются Н. П. Петров (1883 г.), Рейнольдс (1886 г.), Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин и др. [18].

Смазка предназначена для уменьшения трения между подшипником и валом и их охлаждения. При отсутствии вращения вал 1 выдавливает масло и опирается на подшипник 2 (рис. 7.4,а). В момент трогания трение является сухим и напряжение трения максимально. Вращающийся вал, за счет прилипания масла и вязкости,

увлекает его во вращение и как насос нагнетает в клиновидную щель. Давление масла в щели увеличивается, вал под действием равнодействующей  $R$  всплывает в масляном слое и его ось смещается от оси подшипника на расстояние эксцентриситета  $e$  (рис. 7.4,б). Величина эксцентриситета при вращении вала устанавливается автоматически в зависимости от величины зазора  $h_0$ , окружной скорости вала  $u_0$  и нагрузки на него  $N$ . Чем больше нагрузка, тем больше эксцентриситет, так как при этом клиновидность щели

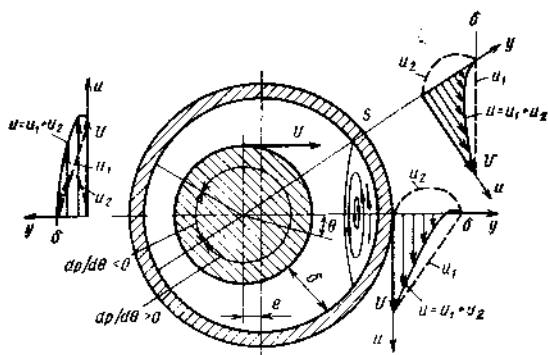


Рис. 7.5. Поля скоростей смазочного масла в зазоре подшипника в точке отрыва  $s$  при  $\theta=0$  и при  $\theta=\pi$

увеличивается и давление в ней повышается. При отсутствии нагрузки, как это может быть при вертикальном вале, эксцентриситет равен нулю и давление во всем кольцевом зазоре постоянно. Зазор между подшипником и валом  $h_0=R_0-r_0$  имеет очень малую величину— всего несколько десятых миллиметра. Течение такой тонкой масляной пленки в зазоре обладает важным свойством— при достаточно быстром вращении вала градиенты давления в ней могут достигать очень больших значений, в результате чего тонкая пленка масла поддерживает сильно нагруженный вал и предохраняет его от непосредственного соприкосновения с подшипником. Малая толщина зазора  $h_0$  по сравнению с длиной подшипника вдоль оси вала  $l$  и длиной окружности  $2\pi r_0$  позволяет приближенно рассматривать течение смазочного масла как течение Куэтта.

Направим ось  $x$  по окружности вала в сторону вращения так, что  $dx=r_0d\theta$ , ось  $y$  — по нормали к поверхности вала (рис. 7.5) и ось  $z$  — параллельно оси вала по его поверхности. Рассматриваемое течение отличается от течения Куэтта тем, что толщина зазора изменяется вдоль оси  $\delta=\delta(x)$ . В соответствии с этим изменяется и скорость  $u=u(x)$  и, следовательно, конвективные силы  $qu \frac{du}{dx}$  тождественно не равны нулю. Также не постоянен градиент давления.

Оценим силы инерции и силы трения, входящие в уравнение Навье — Стокса

$$\frac{\text{Силы инерции}}{\text{Силы трения}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\rho u^2}{\mu \frac{u_0}{h_0^2}} = \frac{\rho u_0 2\pi r_0}{\mu} \left( \frac{h_0}{2\pi r_0} \right)^2 = \text{Re}^*. \quad (7.26)$$

Полученное соотношение называется приведенным числом Рейнольдса. Очевидно, что силами инерции можно пренебречь, если  $\text{Re}^* < 1$ .

Задача 7.13. Определить  $\text{Re}^*$  для подшипника  $r_0 = 4 \cdot 10^{-2}$  м,  $h_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  м, частота вращения  $n = 33,3$  1/с,  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$  Н · с/м<sup>2</sup>.

Ответ:  $\text{Re}^* = 0,0355$ . Силами инерции можно пренебречь.

Произведем дальнейшее упрощение уравнения Навье—Стокса для рассматриваемого ползущего течения: 1) исключим уравнения для направления  $y$  и  $z$ , так как  $v$  и  $w$  малы по сравнению с  $u$ ; 2) в уравнении для направления  $x$  пренебрежем членом  $\partial^2 u / \partial x^2$ , который в  $(2\pi r_0 / h_0)^2$  раз меньше  $\partial^2 u / \partial y^2$ . В результате всех этих упрощений вместо трех уравнений остается одно:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (7.27)$$

в котором  $dp/dx$  уже не является постоянным.

Уравнение неразрывности можно записать в виде условия постоянства расхода масла для всех сечений, т. е.

$$Q = \int_0^{\delta(x)} u dy = \text{const}. \quad (7.28)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} u = u_0 \text{ при } y = 0; \quad u = 0 \text{ при } y = h = \delta(x); \\ p = p_0 \text{ при } x = 0 (\theta = 0); \quad p = p_0 \text{ при } x = 2\pi r_0 (\theta = 360^\circ). \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Интегрирование уравнения (7.27) позволяет получить следующие формулы приближенного решения уравнений Навье—Стокса [18]. Поле скоростей

$$u = \frac{u_0(\delta - y)}{\delta} + \frac{1}{2\mu r_0} \frac{dp}{d\theta} y(y - \delta) \quad (7.30)$$

получается так же, как в течении Куэтта — суммированием поля скоростей  $u_1$ , обусловленного чистым сдвигом, и  $u_2$ , обусловленного градиентом давления (см. рис. 7.5). При определенном значении  $dp/d\theta > 0$  в точке  $S$  подшипника возникает отрыв течения от стенки, а за ним возвратное течение — зона рециркуляции, что часто приводит к перегреву масла и подшипника вплоть до его расплавления.

Распределение давления по поверхности вала

$$p(\theta) - p(0) = \frac{6\mu r_0 u_0}{h_0^2} \frac{\beta \sin \theta (2 + \beta \cos \theta)}{(2 + \beta^2)(1 + \beta \cos \theta)}, \quad (7.31)$$

где  $p(\theta)$  и  $p(0)$  — давления при заданном угле  $\theta$  и при  $\theta=0$ ;  $\beta = e/h_0$  — относительный эксцентриситет. При  $\beta > 0,3$  возможен отрыв течения от подшипника.

Распределение напряжений трения по поверхности вала

$$\tau = -\frac{2\mu_0}{h_0} \left[ \frac{2}{1 + \beta \cos \theta} - \frac{3(1 - \beta^2)}{(2 + \beta^2)(1 + \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (7.32)$$

Момент сил трения, приложенный к валу длиной в один метр Нм/м:

$$M = \frac{4\pi\mu_0^2 r_0}{h_0} \frac{(2\beta^2 + 1)}{(2 + \beta^2)\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.33)$$

На рис. 7.4,б приведено распределение избыточного давления по поверхности вала, напряжение трения в характерных точках и равнодействующая поверхностных сил  $R$ , которая для одного погонного метра вала рассчитывается по формуле, Н/м:

$$R = \frac{12\pi\mu_0^2 r_0}{h_0^2} \frac{\beta}{(2 + \beta^2)\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (7.34)$$

**Задача 7.14.** Определить длину подшипника скольжения, момент сил трения  $M_l$  и мощность  $W$  на преодоление трения, если частота вращения вала  $n = 33,3$  1/с;  $r_0 = 4 \cdot 10^{-2}$  м;  $h_0 = 2 \cdot 10^{-4}$  м; нагрузка  $N = 3000$  Н; относительный эксцентриситет  $\beta = 0,3$ ;  $\mu = 3 \cdot 10^{-2}$  Н·с/м<sup>2</sup>,  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>. Ответ:  $l = N/R \approx 0,053$  м;  $M_l = Ml = 0,78$  Н·м;  $W = M_l \omega = 163$  Вт.

Обтекание шара при  $Re = \frac{u_\infty d}{\nu} < 1$ . Как и в разнообразных ползущих течениях при обтекании шара при  $Re < 1$  основное значение имеют силы трения и давления, а инерционные силы относительно малы, что позволяет исключить их из уравнений Навье—Стокса — линеаризовать их. Не останавливаясь на вычислениях [30], приведем некоторые результаты приближенного интегрирования, полученные Стоксом при граничных условиях прилипания жидкости к поверхности шара.

Разность давлений в точке  $x$  поверхности шара и в невозмущенном потоке при совмещении начала координат с центром шара

$$p - p_\infty = -\frac{3}{2} \frac{\mu x}{r_0^2} u_\infty. \quad (7.35)$$

Разность давлений в передней критической точке при  $x_1 = -r_0$  и в задней критической точке при  $x_2 = +r_0$  отличается знаками

$$p_{1,2} - p_\infty = \pm \frac{3}{2} \frac{\mu}{r_0} u_\infty. \quad (7.36)$$

Интегрирование давления и касательного напряжения по поверхности шара приводит к формуле Стокса для силы лобового сопротивления шара

$$R_x = 6\pi\mu u_\infty r_0. \quad (7.37)$$

Одна треть силы лобового сопротивления шара при  $Re < 1$  является силой сопротивления давления (давление на переднюю часть

шара больше, чем на заднюю) и две трети — силой сопротивления трения.

Записав формулу (5.17) для коэффициента лобового сопротивления и подставив значение  $R_x$  из (7.37), получим

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2} \pi r_0^2} = \frac{24}{Re}. \quad (7.33)$$

Сравнение результатов расчета по (7.38) с результатами экспериментов (см. рис. 5.2) показывает их удовлетворительное совпадение лишь при  $Re < 1$ . При  $Re > 1$  пренебрежение силами инерции приводит к недопустимым погрешностям.

Как видим, при обтекании шара реальной жидкостью парадокс Даламбера—Эйлера не имеет места—возникает сила лобового сопротивления, являющаяся результирующей силой поверхностных сил трения и давления.

Из рассмотрения формул (7.35) и (7.36) следует, что на окружности миделя, т. е. максимального сечения шара, перпендикулярного вектору скорости невозмущенного потока (при  $x=0$ ), давление равно давлению в невозмущенном потоке, а максимальное разрежение имеет место в задней критической точке.

По формуле Стокса (7.37) можно рассчитывать осаждение мелких капелек воды и пыли в атмосфере или маленьких металлических шариков в вязких жидкостях.

**Задача 7.15.** Опишите методику определения вязкости жидкости, основанную на использовании формулы (7.37).

**О вихревой природе ламинарных течений.** Слоистое ламинарное течение является вихревым. Мельчайшие жидкие частицы во всех точках потока, где градиент скорости отличен от нуля, вращаются около собственных осей. Поэтому ламинарное течение и сопровождается диссипацией энергии.



## Глава 8

# УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ. ПРИСТЕНОЧНАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

---

Турбулентные течения в трубах наиболее часто встречаются в технике, имеют большое практическое значение и им посвящены многочисленные исследования. Опыты показывают, что влияние стенки на характеристики турбулентных течений настолько велико, что пристеночные турбулентные течения в каналах и в турбулентных пограничных слоях обтекаемых тел имеют много общих фундаментальных закономерностей. При ламинарном течении в трубе поле течения однородно — определяется только молекулярным трением. Формулы поля скоростей  $u/u_{\max} = (1-r^2/R^2)$  и закона сопротивления  $\zeta_{\text{тр}} = 64/\text{Re}$  получены чисто теоретическим путем из решения уравнений неразрывности и Навье—Стокса (см. п. 7.1). При турбулентном режиме течения также существует однозначная связь между полем скоростей и законом сопротивления. Однако эти зависимости получить теоретически пока невозможно: либо поле скоростей, либо закон сопротивления должны быть получены из эксперимента.

### 8.1. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрим турбулентное течение при  $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$  в цилиндрической прямой трубе за участком гидродинамической стабилизации, длина которого по данным различных исследователей составляет 25...100 калибров. Турбулентный пограничный слой сомкнут на оси и радиус трубы  $R$  можно рассматривать как толщину  $\delta$  турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. Ось  $x$  направим по стенке в направлении течения, ось  $y$  — перпендикулярно к ней и по направлению к оси трубы. Введем обозначения:  $r$  — текущий радиус, отсчитываемый от оси трубы;  $u$  — осредненная во времени текущая скорость, неизменная вдоль оси трубы;  $u_{\text{ср}}$  — среднерасходная скорость;  $u_{\max}$  — скорость на оси трубы.

Течение в турбулентном пограничном слое, вследствие влияния стенки, неоднородно и может быть разделено на три качественно различных concentрических слоя: *ламинарный подслой, переходный слой и слой полностью развитого турбулентного течения*, каждый со своим законом распределения скоростей и законом сопротивления.

1. Ламинарный подслой толщиной  $\delta_L$ , текущий у самой стенки. На стенке  $u=0$  (условие прилипания). Кроме того, стенка гасит все турбулентные пульсации  $u'=v'=0$  (условие непроницаемости и прилипания). Поэтому на стенке как устье турбулентное напряжение трения  $\tau_T = -\rho \overline{v'u'} = 0$  и действует только молекулярное трение  $\tau_B = \tau_M + \tau_T + \tau_M = \mu (du/dy)_W$ . В непосредственной близости от стенки на толщине  $\delta_L$  пульсационные составляющие исчезающе малы и турбулентное трение пренебрежимо по сравнению с молекулярным. Таким образом в ламинарном подслое турбулентного пограничного слоя течение является ламинарным и перенос всех субстанций имеет, в основном, молекулярный механизм. Все сказанное можно записать в виде *граничных условий ламинарного подслоя*

$$\left. \begin{aligned} y=0 (r=R); u=0; u'=v'=0; \tau=\tau_W=\mu (du/dy)_W; \\ y=\delta_L (r=R-\delta_L); u=u_L, u'\approx 0, v'\approx 0, \tau\approx\tau_W=\mu (du/dy)_W. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Толщина ламинарного подслоя настолько мала ( $\delta_L \approx 0,01 R$ ), что с трудом измеряется в экспериментах. Однако ламинарный подслой имеет решающее влияние на развитие течения и особенно на сопротивление, так как определяет касательные напряжения на стенке. На толщине ламинарного подслоя скорость ламинарного течения возрастает от 0 до  $u_L$  по линейному закону

$$u = u_L y / \delta_L \quad (8.2)$$

и на границе  $y = \delta_L$  достигает очень большой величины  $u_L \approx 0,5 u_{\max}$ . Вследствие линейности поля скоростей напряжение трения в ламинарном подслое постоянно

$$\tau_M = \tau_W = \mu u_L / \delta_L = \mu u / y. \quad (8.3)$$

2. Переходный слой, примыкающий к ламинарному подслою. Турбулентные пульсации здесь уже настолько велики, что турбулентные напряжения соизмеримы с вязкостными и

$$\tau_B = \tau_M + \tau_T. \quad (8.4)$$

3. Турбулентное ядро течения. Занимает центральную часть трубы. Здесь турбулентное трение несоизмеримо больше молекулярного, поэтому

$$\tau_B = \tau_M + \tau_T \approx \tau_T = \rho l^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2. \quad (8.5)$$

Изменение напряжения трения по радиусу трубы. Выделим мысленно жидкий цилиндр радиусом  $r$  и длиной  $L$  и составим уравнение количества движения (4.12) в проекциях на ось трубы. Скорость жидкости вдоль трубы не изменяется и силы давления на торцы 1 и 2 цилиндра уравновешиваются силами трения, действующими на боковую поверхность цилиндра:  $(p_1 - p_2) \times \pi r^2 = \tau 2\pi r L$ , и

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2L} r, \quad (8.6)$$

т. е. напряжение трения пропорционально радиусу: на оси равно 0, а на стенке — максимально. Формула справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного установившегося течения при рассматриваемых условиях ( $R = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ) и позволяет определить напряжение трения на стенке по измеренным давлениям в начале и конце участка трубы. Сопоставляя формулы (8.6) и (6.34), получим

$$\zeta_{\text{тр}} = 4 \frac{\tau_w}{\frac{\rho u^2}{2}} \quad \text{или} \quad \tau_w = \frac{\zeta_{\text{тр}}}{8} \rho u^2. \quad (8.7)$$

Универсальный логарифмический закон распределения скоростей в турбулентном пограничном слое по Прандтлю. При течении около гладкой стенки при  $y=0$   $v'=u'=0$  и  $l=0$ . С увеличением  $y$  начинают появляться турбулентные пульсации и возрастает путь перемешивания  $l$ . Следуя Прандтлю примем, что

1) вблизи стенки путь перемешивания пропорционален расстоянию от стенки

$$l = \kappa y, \quad (8.8)$$

где  $\kappa$  — одна из основных экспериментальных констант теории пристеночной турбулентности.

В соответствии с экспериментальными данными пропорциональность пути перемешивания расстоянию от стенки имеет место лишь до  $y/R \approx 0,1$ . В этой области  $\kappa \approx 0,4$ . При  $y/R > 0,1$  увеличение пути перемешивания замедляется и определяется интерполяционной формулой

$$l/R = 0,14 - 0,08(1 - y/R)^2 - 0,06(1 - y/R)^4; \quad (8.9)$$

2) вблизи стенки напряжение трения является чисто турбулентным, постоянно и равно напряжению трения на стенке  $\tau_s = \tau_r = \tau_w = \text{const}$ . Тогда, с использованием формул (8.5) и (8.8), получим

$$\tau_r = \tau_w = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2. \quad (8.10)$$

Интегрируя (8.10), получим универсальный закон распределения скоростей в турбулентном пристеночном течении

$$u = \frac{\sqrt{\tau_w/\rho}}{\kappa} \ln y + c. \quad (8.11)$$

Для того, чтобы (8.11) придать безразмерный вид, введем в рассмотрение: 1) динамическую скорость  $v_*$

$$v_* = \sqrt{|\tau_w|/\rho} = \sqrt{|v'u'|}, \quad (8.12)$$

которая является мерой интенсивности пульсационного движения; 2) число Рейнольдса  $v_* y/\nu$ , выражающее соотношение сил инерции

пульсационного движения ж силам вязкости. Учитывая, что  $u_*/\nu = \text{const}$ , получим

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{v_* y}{\nu} + C_1, \quad (8.13)$$

где  $C_1$  — экспериментальная константа, зависящая от шероховатости стенки.

Для гладких стенок  $C_1 = 5,5$  и, с учетом  $\kappa = 0,4$ , универсальный закон распределения скоростей примет вид

$$\frac{u}{u_*} = 2,5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5,5. \quad (8.14)$$

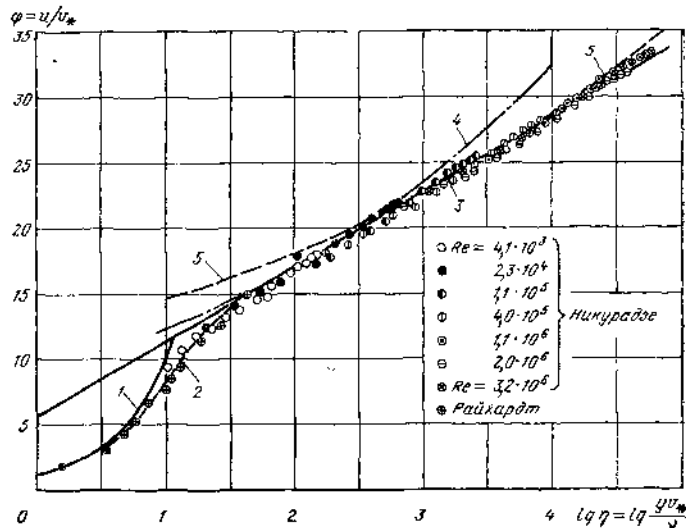


Рис. 8.1. Универсальный логарифмический закон распределения скоростей в гладкой трубе:

1—кривая, соответствующая уравнению  $\Phi = \eta$ , т. е. ламинарному течению; 2—то же переходу от ламинарной формы течения к турбулентной; 3—то же уравнению (8.14), т. е. турбулентному течению при любых числах Рейнольдса; 4—то же уравнению (8.25), т. е. турбулентному течению при  $Re < 10^6$ ; 5—то же уравнению  $\Phi = 11,5\eta^{1/10}$

На рис. 8.1 сопоставляются результаты расчета по (8.14) (кривая 3) с данными эксперимента для гладких труб в широком диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = \rho u d / \mu$ . Кривая 1 соответствует ламинарному течению в ламинарном подслое и рассчитана по уравнению  $u/v_* = v_* y / \nu$ , которое получается из формул (8.3) и (8.12). Кривая 2 проведена по экспериментальным точкам для переходной области от ламинарного к турбулентному течению.

Приведенные данные подтверждают существование в пристеночном турбулентном пограничном слое трех качественно различных областей течения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } (v_* y/\nu) < 5 \text{ — чисто ламинарное течение (кривая 1);} \\ \text{при } 5 < (v_* y/\nu) < 70 \text{ — ламинарно-турбулентное течение} \\ \text{(кривая 2);} \\ \text{при } (v_* y/\nu) > 70 \text{ — чисто турбулентное течение (кривая 3).} \end{array} \right\} (8.15)$$

Универсальный закон распределения скоростей не применим вблизи стенки при  $(v_* y/\nu) < 70$ , где молекулярное трение, которым мы пренебрегали при выводе закона, играет существенную роль. В области чисто турбулентного течения при  $v_* y/\nu > 70$  вплоть до оси трубы универсальный закон хорошо подтверждается экспериментами в широком диапазоне чисел Рейнольдса, что и доказывает его универсальность и позволяет распространить на любые, сколь угодно большие числа Рейнольдса без экспериментальной проверки.

В турбулентном ядре условия  $\tau = \tau_w = \text{const}$  и  $l = 0,4 y$ , принятые при выводе логарифмического закона распределения скоростей, не выполняются: с увеличением  $y$  (уменьшением  $r$ )  $\tau$ , в соответствии с (8.6), уменьшается, а путь перемешивания  $l$  возрастает все медленнее (8.9). Хорошее совпадение логарифмического закона с экспериментальными данными в этой области объясняется тем, что  $\tau$  и  $l$  располагаются в разных сторонах исходного уравнения (8.5) и изменение  $\tau$  компенсируется изменением  $l$ .

Универсальность логарифмического закона — его кажущаяся независимость от числа Рейнольдса — объясняется тем, что в его выражения входит динамическая скорость  $v_* \sqrt{\tau_w/\rho}$ , определяемая напряжением трения на стенке, которое зависит от числа Рейнольдса.

Толщина ламинарного подслоя  $\delta_L$  и скорость  $u_L$  при  $y = \delta_L$ . Практически невозможно точно определить границу ламинарного подслоя. В соответствии с рис. 8.1 и условиями (8.15) она может быть определена по точке касания кривых 1 и 2 примерно при  $\lg(v_* y/\nu) \approx 0,7$ , т. е.

$$\delta_L \approx 5\nu/v_* \quad (8.16)$$

Зависимость (8.16) используется при изучении влияния шероховатости стенки на характеристики турбулентного течения (п. 8.3). Очень часто толщину ламинарного подслоя определяют по точке пересечения кривых 1 и 3:

$$\delta_L = \alpha\nu/v_* \quad (8.17)$$

где  $\alpha = 11,5 \dots 12,5$  — вторая основная экспериментальная константа пристеночной турбулентности.

Скорость  $u_L$  на границе ламинарного подслоя получим, подставив в (8.3) значение  $\delta_L$  из (8.17):

$$u_L = \alpha v_* \quad (8.18)$$

Из формул (8.17) и (8.18) следует, что число Рейнольдса, составленное для ламинарного подслоя, имеет постоянное значение для любых чисел Рейнольдса осредненного течения

$$Re_{\delta_l} = \frac{u_{\delta_l} \delta_l}{\nu} = \alpha^2 \approx 130 \dots 156. \quad (8.19)$$

Незначительная величина  $Re_{\delta_l}$  показывает, что в ламинарном подслое силы вязкости существенно превышают силы инерции и в нем имеет место в основном ламинарное течение. При увеличении числа Рейнольдса осредненного течения в трубе за счет увеличения скорости увеличивается и  $u_{\delta_l}$ , а толщина ламинарного подслоя при этом уменьшается, так как  $Re_{\delta_l} = \text{const}$ . Это явление оказывает существенное влияние на трение при турбулентном течении около шероховатых поверхностей (п. 8.3).

Граница переходной области определяется точкой, где кривая 2 сливается с кривой 3 (см. рис. 8.1):

$$y_{\text{перех}} \approx 70\nu/v_*. \quad (8.20)$$

Поле скоростей в переходной области представляет собой плавную кривую, сопрягающую логарифмическое поле турбулентного ядра и линейное в ламинарном подслое. Уравнение этого поля можно получить, если при выводе логарифмического закона учесть молекулярное трение  $\left(\tau_y = \mu \frac{du}{dy} + \alpha x^2 l^2 \frac{du}{dy}\right)$  и граничные условия ламинарного подслоя, полученные из эксперимента.

Максимальная и средняя скорости осредненного течения. Максимальную скорость определим из (8.14) при условии  $y=R$ :

$$\frac{u_{\max}}{v_*} = 2,5 \ln \frac{v_* R}{\nu} + 5,5. \quad (8.21)$$

Вычитая из (8.21) значение  $\frac{u}{v_*}$  по формуле (8.14), получим

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} = -2,5 \ln \frac{y}{R}; \quad \frac{u}{v_*} = \frac{u_{\max}}{v_*} + 2,5 \ln \frac{y}{R}. \quad (8.22)$$

Среднюю скорость определим по (3.14), подставив значения  $u/v_*$  из (8.22):

$$\frac{u_{\text{ср}}}{v_*} = \frac{Q}{v_* S} = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R \frac{u}{v_*} (R-y) dy = 2 \int_0^1 \left( \frac{u_{\max}}{v_*} + 2,5 \ln \frac{y}{R} \right) \left( 1 - \frac{y}{R} \right) d \frac{y}{R}.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$u_{\text{ср}}/v_* = u_{\max}/v_* - 3,75. \quad (8.23)$$

Степенной закон распределения скоростей. Опыты показывают, что поле скоростей в турбулентном пристеноч-

ном пограничном слое хорошо описывается следующим, чисто эмпирическим, степенным законом

$$u/u_{\max} = (y/R)^n \text{ или } u/u_{\max} = (1 - r/R)^n, \quad (8.24)$$

где  $n$  — показатель степени, определяемый экспериментально.

Недостаток степенного закона состоит в том, что он не универсален: показатель степени  $n$  зависит от числа Рейнольдса, уменьшаясь с его увеличением (табл. 8.1). В пределах  $Re = 4 \cdot 10^3 \dots 10^5$  достаточно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных обеспечивается при  $n = 1/7$ . Поэтому степенной закон называют *законом одной седьмой*. Большим преимуществом степенного закона является простота, что и определяет широкое применение его в технических расчетах.

Таблица 8.1

$Re = u_{\text{ср}} d / \nu$	Ламинарное течение $Re < Re_{\text{кр}}$	Турбулентное течение					
		$4 \cdot 10^3$	$2,3 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^6$	$3,2 \cdot 10^6$	$\infty$
$n$	—	1/6	1/6,6	1/7	1/8,8	1/10	0
$c(n)$	—	7,8	8,37	8,74	10,4	11,5	—
$u_{\text{ср}}/u_{\text{max}}$	0,5	0,79	0,81	0,82	0,85	0,875	1
Коэффициент Ко- рнюлиса $\alpha$	2,0	1,13	—	1,05	—	1,025	1

Уравнению (8.24) придают следующий вид

$$u/v_* = c(n) (y v_* / \nu)^n. \quad (8.25)$$

Значения коэффициента  $c(n)$  для различных чисел Рейнольдса приведены в табл. 8.1. На рис. 8.1 нанесена кривая 4, рассчитанная по уравнению (8.25) при  $n = 1/7$ , которая хорошо совпадает с результатами опыта только до  $Re < 10^5$ . Кривая 5 представляет распределение скоростей при  $n = 1/10$ . В этом случае наблюдается хорошее совпадение с опытными данными при больших числах  $Re$  и расхождение при малых.

**Задача 8.1.** Получите формулу  $u_{\text{ср}}/u_{\text{max}}$ , используя степенной закон (8.24) и методику получения формулы (8.23).

Ответ:

$$\frac{u_{\text{ср}}}{u_{\text{max}}} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}. \quad (8.26)$$

Отношение  $u_{\text{ср}}/u_{\text{max}}$  характеризует наполненность поля скоростей: при  $u_{\text{ср}}/u_{\text{max}} = 1$  поле скоростей полностью наполнено или равномерно. Для ламинарного течения  $u_{\text{ср}}/u_{\text{max}} = 0,5$  и не зависит от числа Рейнольдса. Мощный механизм турбулентного перемешивания приводит к выравниванию поля скоростей и к существенному увеличению  $u_{\text{ср}}/u_{\text{max}}$ , возрастающему с увеличением числа Рейнольдса, в пределе до единицы.

На рис. 8.2 приведены безразмерные поля скоростей, измеренные в гладких трубах. *Турбулентные поля скоростей существенно*

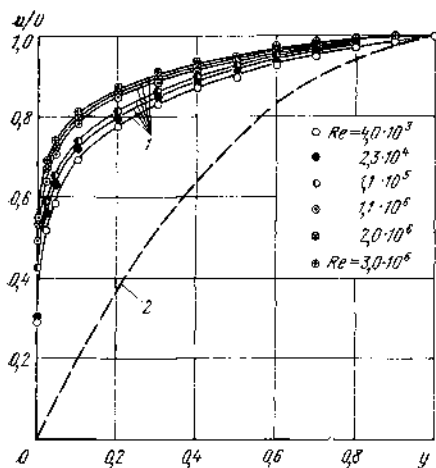


Рис. 8.2. Распределение скоростей в гладкой трубе при различных числах Рейнольдса (по Никурадзе):

1—турбулентная; 2—ламинарная  $Re < 2300$

более наполнены по сравнению с параболическим ламинарным и их наполненность повышается с увеличением числа Рейнольдса. Большей наполненности соответствует более крутое нарастание скорости у стенки  $(du/du)_T \gg (du/du)_L$  и, следовательно, большая кинетическая энергия слоев жидкости, текущих в непосредственной близости от стенки при одинаковых среднерасходных скоростях. Поэтому различная наполненность полей скоростей в ламинарных и турбулентных пристеночных пограничных слоях является их основной особенностью, которая часто определяет качественное отличие в развитии важнейших течений жидкостей (см. п. 15.6).

Коэффициент неравномерности поля скоростей  $\alpha$  (п. 7.2) для турбулентного течения в трубе близок к единице (см. табл. 8.1) и обычно в расчетах этих течений не учитывается.

**Задача 8.2.** Керосин  $q = 840 \text{ кг/м}^3$  при  $T = 288 \text{ К}$  в количестве  $G = 19,9 \text{ кг/с}$  подается на испытательную станцию по трубе  $d = 0,11 \text{ м}$  с гладкими стенками. На участке  $L = 110 \text{ м}$  развитого турбулентного течения измерен перепад давлений  $\Delta p = p_1 - p_2 = 4,6 \cdot 10^4 \text{ Па}$ . Требуется: 1) доказать, что течение турбулентное,  $\tau_w = 11,5 \text{ Н/м}^2$ ,  $v_* = 0,117 \text{ м/с}$ ,  $\delta_{\text{л}}/R = 4,5 \cdot 10^{-3}$ ,  $u_{\text{л}}/u_{\text{max}} = 0,46$ ,  $u_{\text{ср}}/u_{\text{max}} = 0,85$ ,  $u_{\text{перех}}/R = 2,7 \cdot 10^{-2}$ ; 2) предположить, что течение при заданных условиях ламинарное и сравнить размерные поля скоростей ламинарного и турбулентного течений, отметив характерные особенности; 3) доказать, что  $\Delta p_T/\Delta p_{\text{л}} = 30$ .

## 8.2. ЗАКОН СОПРОТИВЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ТРУБ

Выведем из универсального закона распределения скоростей соответствующий универсальный закон сопротивления. Для этого подставим в (8.23) величину  $u_{\text{max}}$  из (8.21) и получим

$$u_{\text{ср}} = v_* \left( 2,5 \ln \frac{Rv_*}{\nu} + 1,75 \right). \quad (8.27)$$

Формула (8.7) с учетом (8.12) примет вид

$$\zeta_{\text{тр}} = 8 \frac{\tau_w}{\rho u_{\text{ср}}^2} = 8 \left( \frac{v_*}{u_{\text{ср}}} \right)^2; \quad v_* = \frac{u_{\text{ср}} \sqrt{\zeta_{\text{тр}}}}{2 \sqrt{2}}. \quad (8.28)$$

Подставив в (8.27) динамическую скорость  $v_*$  из (8.28) и преобразовав величину

$$\frac{Rv_*}{\nu} = \frac{du_{\text{ср}}}{\nu} \frac{\sqrt{\zeta_{\text{тр}}}}{4 \sqrt{2}} = \text{Re} \frac{\sqrt{\zeta_{\text{тр}}}}{4 \sqrt{2}},$$



заменяем натуральный логарифм десятичным и получим закон сопротивления

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_{тр}}} = 2,035 \lg (\text{Re} \sqrt{\zeta_{тр}}) - 0,91.$$

Формула с незначительно измененными численными коэффициентами по сравнению с их значениями, полученными теоретически,

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_{тр}}} = 2 \lg (\text{Re} \sqrt{\zeta_{тр}}) - 0,8 \quad (8.29)$$

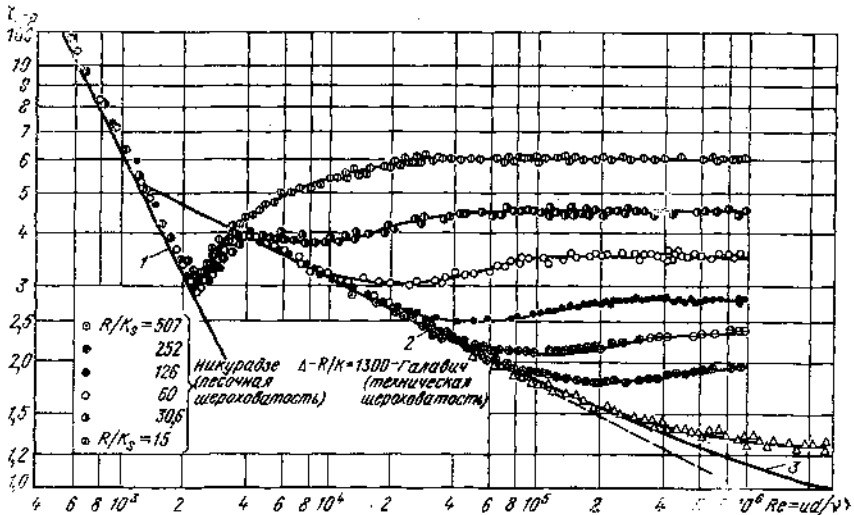


Рис. 8.3. Закон сопротивления шероховатых труб:

- 1—кривая, соответствующая закону сопротивления (7.19) при ламинарном течении;
- 2—то же закону сопротивления (8.30) при турбулентном течении в гладкой трубе;
- 3—то же закону сопротивления (8.29) при турбулентном течении в гладкой трубе

выражает универсальный закон сопротивления Прандтля для гладких труб при турбулентном течении. Вывод этой формулы имеет большое теоретическое значение, так как устанавливает однозначную связь между профилем скоростей и законом сопротивления. С использованием закона сопротивления все характеристики турбулентного течения в гладкой трубе могут быть рассчитаны, если известны  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $u_{ср}$ ,  $d$ , т. е.  $\text{Re} = \rho u_{ср} d / \mu$ .

Закон сопротивления, соответствующий степенному закону распределения скоростей при  $n=1/7$ , был получен Блазиусом в 1911 г. на основании обработки экспериментальных данных с учетом закона подобия Рейнольдса и называется формулой Блазиуса

$$\zeta_{тр} = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \quad (8.30)$$

Оказывается, что эта формула может быть получена теоретически на основании (8.24) при  $n=1/7$ . Подставляя значение  $\zeta_{\text{тр}}$  из (8.30) в (8.7), заменяя  $d=2R$  и  $u_{\text{ср}}=0,8 u_{\text{max}}$ , получим

$$\tau_w = 0,0225 \rho u_{\text{max}}^2 \left( \frac{v}{u_{\text{max}} R} \right)^{1/4}. \quad (8.31)$$

Опыты Никурадзе. На рис. 8.3 нанесены коэффициенты сопротивления гладких и шероховатых труб, полученные И. И. Никурадзе в экспериментах (1930—1933 гг.). Универсальный закон сопротивления (8.29) — кривая 3 — блестяще подтверждается экспериментальными данными во всей области турбулентного течения в гладких трубах и может быть экстраполирован на сколь угодно большие числа Рейнольдса.

Формула Блазиуса (8.30) дает хорошее совпадение с экспериментальными данными только до  $Re \leq 10^5$ .

В расчетах удобно пользоваться формулами И. И. Никурадзе и П. К. Канакова

$$\zeta_{\text{тр}} = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}}, \quad \zeta_{\text{тр}} = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2}, \quad (8.32)$$

которые аппроксимируют универсальный закон сопротивления в явном виде  $\zeta_{\text{тр}} = f(Re)$ .

### 8.3. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ШЕРОХОВАТЫХ ТРУБАХ

Все реальные стенки в большей или меньшей степени шероховаты. Естественная шероховатость может иметь самые различные размеры, геометрические формы и распределение по поверхности. Это крайне затрудняет ее количественную оценку и обобщение результатов исследования ее влияния на закон сопротивления и распределение скоростей. На рис. 8.3 представлены результаты экспериментов Никурадзе с круглыми трубами, внутренние стенки которых были плотно обклеены песком с зернами определенных размеров. Такая однородная «песочная» шероховатость полностью характеризуется так называемой абсолютной шероховатостью, т. е. средней высотой гребешков шероховатости  $K_s$  и относительной шероховатостью  $K_s/R$  или относительной гладкостью трубы  $R/K_s$ . При ламинарном течении все шероховатые трубы имеют такое же сопротивление, как и гладкие — закон сопротивления, а следовательно и распределение скоростей не изменяется. Это объясняется тем, что вязкая жидкость заполняет впадины между бугорками и ламинарность течения не нарушается. Критическое число Рейнольдса и сопротивление в переходной области также практически не зависят от шероховатости.

При турбулентном течении в шероховатых трубах следует различать:

1) режим без проявления шероховатости, когда в определенных пределах чисел Рейнольдса коэффициенты сопротивления шероховатых и гладких труб совпадают. В этом случае величина гребешков шероховатости так мала, что все они лежат

внутри ламинарного подслоя ( $K_S/\delta_n < 1$ ) и не возмущают ламинарное течение в подслое так же, как это наблюдается при ламинарном течении в трубе. Такие трубы называются технически или гидравлически гладкими.

Коэффициент сопротивления для гидравлически гладких труб рассчитывается по формулам для гладких труб и не зависит от шероховатости. Предельная величина шероховатости для этого режима определяется в соответствии с условиями (8.15)

$$\frac{K_S v_*}{\nu} \leq 5, \quad \zeta_{тр} = f(\text{Re});$$

2) переходный режим наступает при увеличении числа Рейнольдса и уменьшении при этом толщины ламинарного подслоя (8.19), так что  $K_S/\delta_n > 1$ . Гребешки шероховатости частично попадают в область турбулентного течения, вызывая дополнительные завихрения и потери энергии. Кривая  $\zeta_{тр} = f(\text{Re})$  шероховатой трубы отходит вверх от кривой гладкой трубы. Величина шероховатости для этой области определяется по (8.15)

$$5 < \frac{K_S v_*}{\nu} < 70, \quad \zeta_{тр} = f(\text{Re}; K_S/R).$$

Коэффициент сопротивления в этой области зависит как от числа Рейнольдса, так и от относительной шероховатости.

3) режим с полным проявлением шероховатости, при котором все гребешки шероховатости выступают из ламинарного подслоя

$$\frac{K_S v_*}{\nu} > 70, \quad \zeta_{тр} = f(K_S/R).$$

Сопротивление обусловлено не трением, а завихрением турбулентно текущей жидкости гребешками шероховатости. Поэтому коэффициент сопротивления трения не зависит от числа Рейнольдса: а определяется только величиной шероховатости (чем больше  $K_S/R$ , тем больше  $\zeta_{тр}$ ). Этот режим течения называется, кроме того, *автомодельным относительно числа Рейнольдса и режимом квадратичной зависимости гидравлического сопротивления от скорости*, что следует из формулы Дарси—Вейбаха

$$\Delta p = \zeta_{тр} \frac{L}{d} \frac{\rho u_{ср}^2}{2},$$

в которой, в данном случае,  $\zeta_{тр}$  не зависит от числа Рейнольдса и, следовательно, скорости. Для расчета коэффициента сопротивления для шероховатых труб получена интерполяционная формула

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_{тр}}} = 1,74 - 2 \lg \left( \frac{K_S}{R} + \frac{18,7}{\text{Re} \sqrt{\zeta_{тр}}} \right). \quad (8.33)$$

При исчезающе малой шероховатости  $K_S/R \rightarrow 0$  формула (8.33) переходит в формулу (8.29) универсального закона сопротивления для гладких труб. При  $\text{Re} \rightarrow \infty$  — в формулу

$$\zeta_{тр} = \frac{1}{\left( 2 \lg \frac{R}{K_S} + 1,74 \right)^2}, \quad (8.34)$$

которая представляет собой универсальный закон сопротивления для режима с полным проявлением шероховатости.

Для практических расчетов сопротивления труб с естественной шероховатостью широко используется универсальная формула А. Д. Альтшуля

$$\zeta_{\text{тр}} = \frac{1}{\left(1,8 \lg \frac{Re}{Re \frac{K'}{d} + 7}\right)^2}, \quad (8.35)$$

где  $K'$  — размер, пропорциональный абсолютной шероховатости (табл. 8.2).

Таблица 8.2

Материал трубы	$K' \cdot 10^3$ , мм
Стекло	0
Тянутые трубы из латуни, свинца, меди	0
Бесшовные стальные трубы тщательного изготовления	0,6...2,0
Стальные трубы	3,0...10
Чугунные трубы	25...50

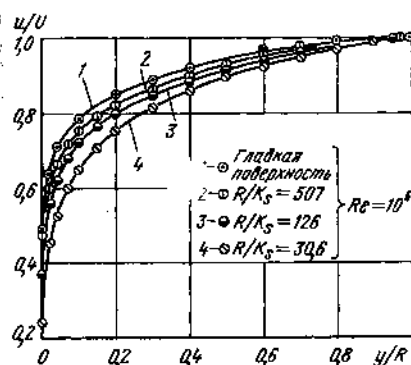


Рис. 8.4. Распределение скоростей в шероховатых трубах (по закону Никурадзе)

При малых значениях  $Re \frac{K'}{d}$  по сравнению с числом 7 формула (8.35) переходит в формулу Канакова (8.32) для гладких труб. При  $Re \frac{K'}{d} \gg 7$  обращается в формулу для режима с полным проявлением шероховатости

$$\zeta_{\text{тр}} = \frac{1}{\left(1,8 \lg \frac{d}{K'}\right)^2}. \quad (8.36)$$

Распределение скоростей. Закону сопротивления шероховатых труб соответствует распределение скоростей. На рис. 8.4 изображены профиль скорости для гладкой трубы и три профиля для труб с различной шероховатостью для режима с полным проявлением шероховатости. Профили скоростей в шероховатых трубах менее наполнены и имеют вблизи стенок тем менее крутое нарастание скорости, чем больше шероховатость. Приведенные поля скоростей для шероховатых труб могут быть описаны степенным законом с показателем  $n = 1/4 \dots 1/5$ .

#### 8.4. РАСЧЕТ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В ТРУБАХ С НЕКРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Определим силу трения, действующую на внешнюю поверхность жидкости, текущей в трубе длиной  $L$

$$R_{\tau} = \Pi L \tau_w, \quad (8.37)$$

где  $\Pi$  — смачиваемый периметр сечения трубы;  $\tau_w$  — касательное напряжение на стенке, зависящее в основном от средней скорости и плотности жидкости и от числа Рейнольдса. Из (8.37) следует, что при прочих равных условиях, сила трения пропорциональна смачиваемому периметру. При заданной площади сечения круг имеет наименьший периметр, поэтому круглые трубы имеют наименьшее сопротивление. Однако на практике, например в теплообменных аппаратах, используются трубы с некруглым сечением. Опыты показывают, что для расчета сопротивления труб некруглого сечения применимы все формулы для круглых труб, если в них диаметр заменить на гидравлический диаметр, равный отношению учетверенной площади поперечного сечения потока к смачиваемому периметру трубы \*

$$d_r = \frac{4S}{\Pi}. \quad (8.38)$$

Эта замена обеспечивает количественный учет влияния формы сечения и смачиваемого периметра на режим течения и сопротивления труб некруглого сечения. Для трубы круглого сечения  $d_r = d$ .

Задача 8.3. Для условий задачи 8.2 сопоставить гидравлические потери при подаче керосина по трубам прямоугольного сечения  $S = 0,0475 \times 0,2 = 9,5 \times 10^{-3} \text{ м}^2$  и круглого сечения  $S = \pi R^2 = 3,14(0,055)^2 = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ .

Ответ:  $\Delta p_{\square} / \Delta p_{\circ} \approx 1,52$ .

\* Возможно использование гидравлического радиуса  $R_r = S/\Pi = 1,4d_r$ .

## МЕСТНЫЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

Затраты полного напора жидкости на преодоление местных сопротивлений рассчитываются по формуле Дарси (6.32). Подставляя в (6.32) значение средней скорости  $u_i = \frac{Q}{\frac{\pi d_i^2}{4}}$ , получим

$$\Delta p_m^* = \zeta_i \rho u_i^2 / 2 = \zeta_i 8Q^2 / \pi^2 d_i^4. \quad (9.1)$$

Задача расчета  $\Delta p_m^*$  состоит в определении коэффициентов различных местных сопротивлений  $\zeta$  для турбулентного и ламинарного течений.

### 9.1. МЕСТНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Опыты показывают, что при турбулентном режиме течения величина коэффициента  $\zeta$  зависит почти исключительно от типа местного сопротивления и практически не зависит от  $Re$  (автомодельна относительно  $Re$ ). Это соответствует квадратичному закону местного сопротивления  $\Delta p_m^* \sim u^2$ , который является признаком того, что местные потери в основном обусловлены вихреобразованием, но не трением. Обычно коэффициенты местных сопротивлений определяются из опытов и даются в виде графиков, таблиц и эмпирических формул. Коэффициент местного сопротивления для внезапного расширения трубы может быть рассчитан аналитически.

Потери при внезапном расширении трубы («удар» Борда — Карно). Измерение потерь полного напора при внезапном расширении трубы представлено на рис. 6.7,а. Поток вытекает из малой трубы, но сечение его увеличивается не внезапно, как у канала, а постепенно. Поток сам создает себе постепенно расширяющийся жидкий контур, в котором скорость уменьшается ( $u_2 = u_1 S_1 / S_2$ ), а статическое давление возрастает  $p_2 > p_1$ . Турбулентные пульсации подсасывают жидкость из кольцевого пространства, расположенного между жидким контуром и стенкой трубы большего диаметра. Часть полного напора затрачивается на образование и поддержание вихрей и обратных токов в этой зоне. Трение приводит к затуханию вихрей, вызывая диссипацию энергии. Потери при внезапном расширении канала называ-

ются потерями на «удар» Борда — Карно, так как скорость жидкости уменьшается на малом расстоянии и быстро текущая жидкость как бы соударяется с медленно текущей.

Контрольное сечение 1 выберем сразу за малой трубой. В этом сечении все параметры потока соответствуют площади  $S_1$  малой трубы и равны  $u_1$ ;  $p_1$ ;  $p_1^*$ , но давление  $p_1$  действует на всю торцевую площадь, равную  $S_2$ . Сечение 2 выберем там, где жидкий контур расширяется до стенок трубы. Обозначим искомые потери через  $\Delta p^* = p_1^* - p_2^*$ . Примем, что поля скоростей в сечениях 1 и 2 равномерны ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ), трение о стенки канала отсутствует и запишем для участка 1—2 уравнение Бернулли (7.25), количества движения (4.12) и неразрывности (3.22)

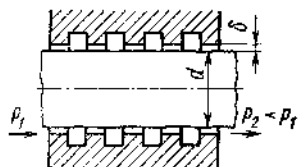


Рис. 9.1. Лабиринтное уплотнение

$$ql_{yx} = \Delta p^* = p_1^* - p_2^* = p_1 - p_2 + \rho \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}; \quad (9.2)$$

$$(p_1 - p_2) S_2 = G(u_2 - u_1) = u_2 \rho S_2 (u_2 - u_1); \quad (9.3)$$

$$u_2 S_2 = u_1 S_1. \quad (9.4)$$

Подставим в (9.2) значение  $p_1 - p_2$  из (9.3) и затем  $u_2/u_1$  из (9.4), получим формулу для подсчета потерь на «удар» Борда—Карно

$$\Delta p^* = \rho \frac{(u_1 - u_2)^2}{2} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \frac{\rho u_1^2}{2}. \quad (9.5)$$

Сопоставляя формулы (9.5) и (9.1), определим искомый коэффициент сопротивления

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2. \quad (9.6)$$

Формулы (9.5) и (9.6) выражают теорему Борда — Карно: «Потеря полного напора равна скоростному напору потерянной скорости  $\rho(u_1 - u_2)^2/2$ ». Эта теорема хорошо подтверждается экспериментами и будет использована при изучении течений в диффузорах (п. 16.1).

На рис. 9.1 представлена схема лабиринтного уплотнения, широко используемого в технике для уменьшения перетекания жидкости из области  $p_1$  в область  $p_2 < p_1$ . В подшипнике протачиваются кольцевые канавки, образующие ряд внезапных расширений канала-зазора, повышающих его гидравлическое сопротивление. Таким образом, гидравлическое сопротивление может играть не только отрицательную роль (затрата энергии), но и положительную.

Потери при внезапном сужении трубы (рис. 6.7, в) обусловлены, главным образом, вихреобразованием при входе в трубу меньшего диаметра — поток срывается с острой кромки. На частицы жидкости, движущейся по криволинейным линиям

тока действуют центробежные силы, направленные к оси струи и сжимающие ее так, что  $S_3 < S_2$ . Течение на участке 3—2 аналогично «удару» Борда—Карно. Для расчета коэффициента сопротивления внезапного сужения И. Е. Идельчигом [12] предложена эмпирическая формула

$$\zeta = 0,5(1 - S_2/S_1). \quad (9.7)$$

Скругление входной кромки приводит к уменьшению потерь. Если тонкостенную трубу меньшего диаметра вставить внутрь большей трубы так, чтобы ее конец был погружен в жидкость, то радиус кривизны струек, втекающих в трубу, уменьшится, центробежные силы, сжимающие струю, возрастут и с ними возрастут потери. Эти эффекты не учитываются формулой (9.7).

**Задача 9.1.** Сравните максимально возможные гидравлические потери при внезапном расширении и сужении канала. Укажите условия их возникновения и в каком из этих двух случаев возможно возникновение кавитации.

Потери при постепенном сужении канала (см. рис. 6.7,з). Конфузорные течения устойчивы — в них нет причин для возникновения вихрей (п. 15.6). Вихри образуются лишь в цилиндрической трубе на выходе из конфузора. Для устранения этих вихреобразований коническую часть следует сопрягать с цилиндрической плавной кривой. В справочниках [12] приводятся формулы для построения сопла Витошинского. На выходе из этого сопла поле скоростей близко к равномерному, а потери минимальны. Так как потери в таком сопле обусловлены, в основном, трением, то коэффициент местных потерь зависит от числа Рейнольдса и отношения площадей  $S_1/S_2$  и колеблется в пределах  $\zeta = 0,01 \dots 0,1$ . Меньшие значения соответствуют большим числам  $Re$ .

Потери в колене. Коленом называется внезапный поворот канала без закругления. Потери обусловлены вихреобразованием и быстро увеличиваются с увеличением угла поворота  $\delta$ . При  $\delta = 90^\circ$   $\zeta_{\text{кол}} = 1$ . Из-за больших потерь колена в трубопроводах менять не рекомендуется.

Потери в отводах. По сравнению с коленом при плавном повороте трубы (в отводе) сопротивление снижается и тем больше, чем больше относительный радиус кривизны  $R/d$  (см. рис. 6.7,д и 9.2). Потери в отводах состоят из потерь на трение и вихреобразование. Потери на трение учитывают, включая длину колен в общую длину трубопровода.

Потери на вихреобразование рассчитываются по формуле

$$\Delta p^* = \Delta p = \zeta_{\text{отв}} \rho u^2 / 2. \quad (9.8)$$

Коэффициент сопротивления отвода зависит от относительного радиуса кривизны  $R/d$ , угла поворота  $\delta$  и формы поперечного сечения канала и рассчитывается по эмпирической формуле, предложенной Г. Н. Абрамовичем

$$\zeta_{\text{отв}} = 0,73abc, \quad (9.9)$$

где  $a = f_1(R/d)$ ;  $b = f_2(\delta)$ ;  $c = f_3(l/d)$  (см. рис. 9.2). Зависимости



$a=f_1(R/d)$  и  $b=f_2(\delta)$  не требуют пояснений. Зависимость  $c=f_3(l/d)$  показывает, что сопротивление отвода имеет минимум при  $l/d=2,5$ . При движении жидкости по криволинейному каналу на все частицы жидкости в направлении радиуса кривизны действуют центробежные силы, пропорциональные квадрату окружной

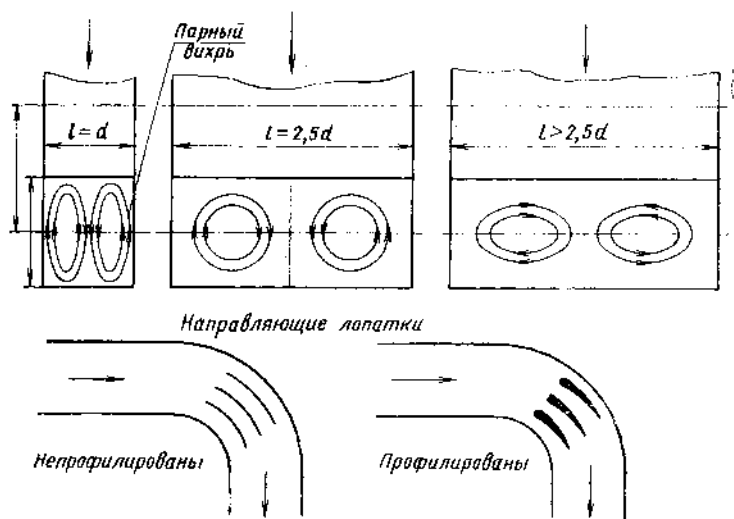
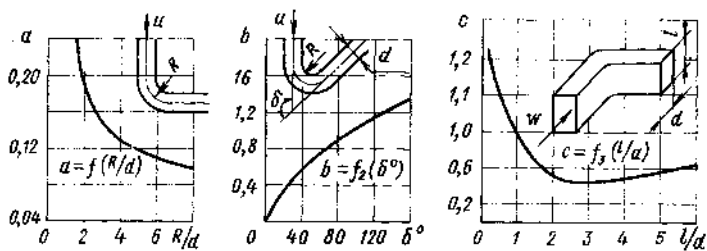


Рис. 9.2. Иллюстрация к расчету сопротивления отводов

скорости, которая у оси больше, чем у боковых стенок, где скорость снижается за счет трения. Поэтому в отводе возникает «парный вихрь»: в середине потока жидкость перемещается от внутренней стенки к внешней, а у боковых стенок в обратном направлении (см. рис. 9.2). В результате сложения кругового и поступательного движений жидкости в отводе поток разделяется на два винтовых потока. На образование и поддержание парного вихря расходуется полный напор жидкости. Эта потеря пропорциональна моменту инерции площади поперечного сечения вихря. Минимальным моментом инерции обладает круглое сечение вихря, которое и получается при соотношении сторон  $l/d=2,5$ . Применение наиболее выгоднейшей формы сечения отвода ( $l/d=2,5$ ) уменьшает потерю на вихреобразование в 2,5 раза по сравнению с круглым

Таблица 9.1

Вид сопротивления	$\zeta$
Гибкое соединение труб	0,3
Угольник 90° (корпус свер- ленный)	1,2...1,3
Тройник-ответвление	3,5
Кран топливный	1...2,5
Обратный клапан	2,0
Фильтр сетчатый	1,5...2,5
Датчик расходомера при вращающейся крыльчатке	7,0
То же при заторможенной крыльчатке	11...12
Выход в трубу (выход из бака)	0,5...1
Выход из трубы (вход в бак)	1,0

сечением. Для уменьшения сопротивления отводов больших размеров (в аэродинамических трубах, в двигателях) в них устанавливают направляющие лопатки, изогнутые по дуге круга (непрофилированные) или еще более эффективные — профилированные (см. рис. 9.2). Установка лопаток препятствует вихреобразованию и существенно уменьшает сопротивление отводов.

В системах охлаждения, смазки и топливных системах двигателей и испытательных установок обычно имеет место турбулентный режим течения жидкости и можно считать,

что коэффициенты местных сопротивлений не зависят от числа Re. Ориентировочные данные для некоторых местных сопротивлений приведены в табл. 9.1.

## 9.2. МЕСТНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ

При ламинарном режиме течения потери напора на преодоление местных сопротивлений представляет собой сумму

$$\Delta p_m^* = \Delta p_{тр}^* + \Delta p_{вихр}^* = \zeta \rho u^2 / 2, \quad (9.10)$$

где  $\Delta p_{тр}^*$  — потеря напора на преодоление сил трения, действующих в данном местном сопротивлении пропорциональная первым степеням вязкости жидкости и скорости, т. е.  $\Delta p_{тр}^* = (A/Re)(\rho u^2/2)$ ;  $\Delta p_{вихр}^*$  — потери напора на отрывы потока и вихреобразование в местном сопротивлении, пропорциональная квадрату скорости, т. е.  $\Delta p_{вихр}^* = B \rho u^2 / 2$ .

Следовательно

$$\Delta p_m^* = \frac{A}{Re} \frac{\rho u^2}{2} + B \frac{\rho u^2}{2}, \quad (9.11)$$

где  $A$  и  $B$  — безразмерные константы, зависящие от формы и размеров местного сопротивления. Сопоставляя формулы (9.10) и (9.11), найдем

$$\zeta = \frac{A}{Re} + B. \quad (9.12)$$

Соотношение между первыми и вторыми членами в формулах (9.10) ... (9.12) зависит от формы и размеров местного сопротивления и от числа Re. Например, при течении через жиклер (рис. 9.3)

на участке 1—2 имеют место потери напора на трение, а на участке 2—3 — на завихрение. В настоящее время величины коэффициентов местных сопротивлений при ламинарном режиме

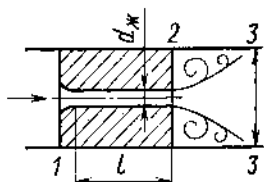


Рис. 9.3. Схема жиклера

течения определяются экспериментально.

На рис. 9.4 приведены, в логарифмических координатах, зависимости  $\zeta = f(Re)$  для некоторых местных сопротивлений, измеренные в экспериментах. При ламинарном течении ( $Re < Re_{кр}$ ) коэффициенты местных сопротивлений уменьшаются с увеличением числа Рейнольдса, что отражает существенное влияние трения. При переходе к турбулентному течению ( $Re > Re_{кр}$ ) наблюдается переход к автомодельной области.

**Задача 9.2.** Объясните, почему, теорема об «ударе» Борда—Карло не применима при ламинарном течении.

**Задача 9.3.** Рассчитать потери полного напора при истечении из трубы  $S_1$  в неограниченное пространство  $S_2 \rightarrow \infty$  стабилизированных ламинарного и турбулентного потоков, выразив потери через средние скорости. Ответ:  $\Delta p_{л}^* = \zeta u_{ср}^2$ ;  $\Delta p_{т}^* = \zeta u_{ср}^2 / 2$ .

**Эквивалентная длина трубопровода.** При расчетах ламинарных течений в трубопроводах в тех случаях, когда местные сопротивления пропорциональны скорости в первой степени, их часто для удобства выражают через эквивалентную длину трубопровода  $l_{экв}$ . Эквивалентной называется длина такого прямолинейного трубопровода заданного диаметра, сопротивление которого равно данному местному сопротивлению, т. е.

$$\Delta p_{м} = \zeta \frac{\rho u^2}{2} = \frac{64}{Re} (l_{экв}/d) \frac{\rho u^2}{2}, \text{ следовательно}$$

$$l_{экв} = \zeta d Re / 64. \quad (9.13)$$

В этом случае суммарные потери полного напора на участке трубопровода длиной  $l$ , на которой размещено местное сопротивление, будет

$$\Delta p_{\Sigma} = \Delta p_{тр} + \Delta p_{м} = \frac{64}{Re} \frac{(l + l_{экв})}{d} \frac{\rho u^2}{2}. \quad (9.14)$$

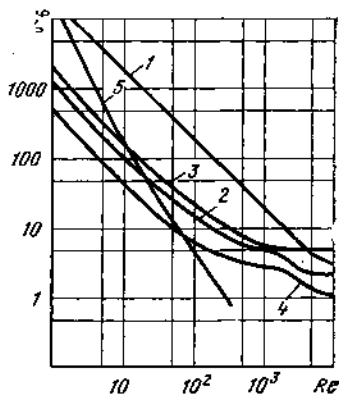


Рис. 9.4. Зависимость коэффициентов местных сопротивлений от числа Рейнольдса:

1—фильтр фетровый; 2—кран отключения; 3—клапан; 4—угольник 90°; 5—обратный клапан

### 9.3. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКИ

Изучение истечения жидкостей имеет большое практическое значение, так как этот процесс реализуется при подаче топлива через форсунки в камеры сгорания двигателей, при подаче воды через сопла на лопасти гидротурбин и для получения тяги водометных судов, при перетекании жидкостей через жиклеры в системах регулирования двигателей и т. д.

В процессе истечения потенциальная энергия жидкости частично превращается в кинетическую энергию струи и частично затрачивается на преодоление гидравлических потерь. Задача состоит в определении скорости истечения жидкости, ее расхода и гидравлических потерь при заданных условиях или необходимых условий для получения заданного расхода и скорости истечения.

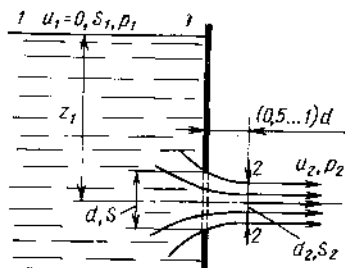


Рис. 9.5. Истечение через отверстие в тонкой стенке

Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре. Рассмотрим (рис. 9.5) истечение жидкости ( $\rho, \mu$ ) из сосуда неограниченной емкости в газовую среду при

постоянном напоре, или перепаде давления  $p_1 + \rho g z_1 - p_2$  при следующих условиях: 1) отверстие мало  $d / \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) < 0,1$ , что позволяет принять постоянство напора для любой точки отверстия; 2) стенка либо тонка, либо имеет острую кромку (см. рис. 9.5), так что потери на трение по длине отсутствуют; 3) отверстие достаточно удалено от свободной поверхности  $I-I$  и боковых стенок, так что струйки жидкости подтекают к отверстию свободно и симметрично со всех сторон. Требуется определить скорость истечения, расход жидкости и коэффициент сопротивления отверстия  $\xi$ .

Частицы жидкости, обтекая кромку отверстия, движутся по криволинейным траекториям, что приводит к возникновению центробежных сил, направленных к оси и сжимающих струю до минимального диаметра  $d_2 < d$  на расстоянии  $(0,5 \dots 1) d$  от стенки. В этом сечении давление в струе становится равным давлению  $p_2$  окружающей среды. Отношение площади сечения сжатой струи  $S_2$  к площади отверстия  $S$  называется *коэффициентом совершенного сжатия струи*  $\epsilon$ .

$$\epsilon = S_2/S = d_2^2/d^2. \quad (9.15)$$

Для определения скорости истечения  $u_2$  запишем уравнение Бернулли (7.25) для участка  $1-2$ . При этом примем, что скорость жидкости в сечении  $2-2$  струи  $u_2$  распределена равномерно (коэффициент Кориолиса  $\alpha_2 = 1$ ), скорость жидкости в сечении  $1-1$

$u_1=0$ , так как  $S_1 \gg S$ , нивелирная плоскость проходит через ось струи и учтем, что гидравлические потери являются местными потерями  $l_{тр} = \xi \rho u_2^2 / 2$  и техническая работа отсутствует  $l_{тех} = 0$

$$z_1 + p_1 / \rho g = p_2 / \rho g + u_2^2 / 2g + \zeta u_2^2 / 2g. \quad (9.16)$$

Из (9.16) получим

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2g \left( z_1 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)} = \varphi \sqrt{2gH}. \quad (9.17)$$

Если бы из отверстия истекала жидкость без гидравлических потерь ( $\zeta = 0$ ), то теоретическая скорость истечения  $u_T$  была бы больше действительной:

$$u_T = \sqrt{2g \left( z_1 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} \right)} = \sqrt{2gH}. \quad (9.18)$$

В формулах (9.17) и (9.18)  $H$  — перепад гидростатических напоров на оси отверстия;  $\varphi = u_2 / u_T = 1 / \sqrt{1 + \zeta}$  — скоростной коэффициент, учитывающий снижение скорости истечения по сравнению с теоретической за счет потерь. Опыты показывают, что скорость в ядре струи равна теоретической, а наружные слои движутся медленнее, так как заторможены при взаимодействии со стенкой. Поэтому  $u_2$  в действительности является среднemasсовой скоростью в сечении 2—2. Подсчитаем расход жидкости через сечение 2—2:

$$G = Q_2 \rho = S_2 u_2 \rho = \varepsilon \varphi S_0 \rho u_T = \psi S_0 \rho \sqrt{2gH}, \quad (9.19)$$

где  $\psi = \varepsilon \varphi = G / G_T$  — коэффициент расхода — отношение действительного расхода к теоретическому  $G_T = S_0 \rho \sqrt{2gH}$ , т. е. к расходу при отсутствии потерь ( $\zeta = 0$ ;  $\varphi = 1$ ) и сжатия струи ( $\varepsilon = 1$ ). Коэффициенты  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  зависят от формы и размеров отверстия и от числа Рейнольдса. На рис. 9.6 приведена зависимость  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  от  $Re = u_T d / \nu$  для круглого отверстия в тонкой стенке, полученная из экспериментов А. Д. Альтшулем\*. При  $Re < 50$  велика роль вязкости и торможения жидкости у кромок отверстия, соответственно велик коэффициент сопротивления  $\zeta$  и мал скоростной коэффициент  $\varphi$ , а сжатие струи фактически отсутствует ( $\varepsilon \approx 1$ ) и  $\psi \approx \varphi$ . С увеличением числа Рейнольдса вместе с крутым возрастанием  $\varphi$  увеличивается  $\psi$ , достигая максимума  $\psi \approx 0,67$  при  $Re \approx 350$ , а затем уменьшается в связи с уменьшением  $\varepsilon$  (увеличением сжатия струи за счет увеличения центробежных сил). При  $Re > 5 \cdot 10^4$  значения всех коэффициентов асимптотически приближаются к значениям, соответствующим истечению идеальной жидкости при  $Re \rightarrow \infty$ ,  $\zeta \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow 1$ ,  $\varepsilon = 0,61$  и  $\psi \rightarrow 0,61$ . Для маловязких жидкостей (вода, керосин, бензин, кислоты, жидкие водород и кислород) истечение обычно происходит при больших числах Рейнольдса и в расчетах принимают  $\varepsilon = 0,63$ ;  $\zeta = 0,065$ ;  $\varphi = 0,97$ ;  $\psi = 0,61$ .

\* Величины  $\varphi$  и  $\psi$ , найденные экспериментально, автоматически учитывают имеющую место неравномерность поля скоростей в сечении струйки 2—2.

**Задача 9.4.** Определить процент снижения действительного расхода по сравнению с теоретическим при  $Re=10^6$ . Определить процент снижения расхода за счет сжатия струи и за счет гидравлического сопротивления (снижения скорости).

Несовершенное сжатие струи происходит при истечении из струйной форсунки — цилиндрической трубки с круглым

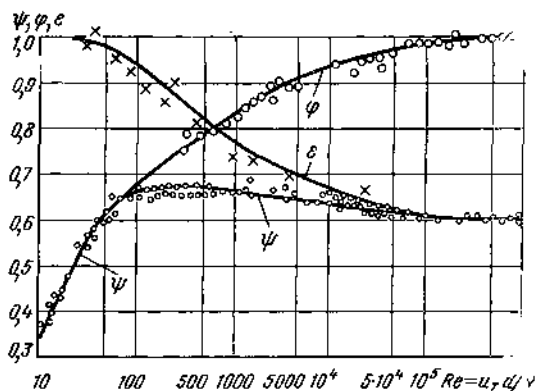


Рис. 9.6. Зависимости  $\epsilon$ ,  $\phi$  и  $\psi$  от  $Re_T$  для круглого отверстия в тонкой стенке

отверстием в центре тонкостенного днища (рис. 9.7). В этом случае струя сжимается меньше, чем при совершенном сжатии за счет направляющего действия стенок трубки, а коэффициент сжатия  $\epsilon_n$  больше  $\epsilon$  и рассчитывается по эмпирической формуле

$$\epsilon_n = \epsilon + 0,37n^2, \quad (9.20)$$

где  $n = S/S_1$  — отношение площади отверстия к площади сечения трубки. Если  $n$  не очень близко к единице, то коэффициент сопротивления  $\xi$  не зависит от  $n$  и величины  $\epsilon$  и  $\phi$  определяются по графику (см. рис. 9.6), а коэффициент расхода определяется, как  $\psi = \epsilon_n \phi$ .

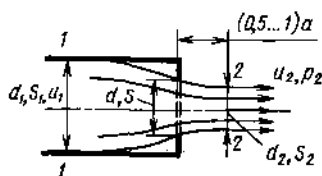


Рис. 9.7. Схема струйной форсунки

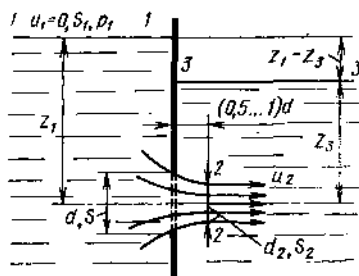


Рис. 9.8. Истечение под уровень

Скорость определяется по уравнению Бернулли (7.25) с учетом кинетической энергии жидкости в трубке (см. рис. 9.7)

$$p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_1^* = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + \zeta \frac{\rho u_2^2}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2 \frac{p_1^* - p_2}{\rho}} = \varphi \sqrt{2 \frac{p_1^* - p_2}{\rho}} \quad (9.21)$$

**Задача 9.5.** Определить давление торможения  $p_1^*$  перед соплами струйных форсунок с  $d=2 \cdot 10^{-3}$  м,  $n=0,2$  для впрыска керосина  $\mu=2 \cdot 10^{-3}$  Н · с/м<sup>2</sup>,  $\rho=820$  кг/м<sup>3</sup> в форсажную камеру ТРДФ со скоростью  $u_2=100$  м/с, если давление газов в ней  $p_2=2,5 \cdot 10^5$  Па. Определить число форсунок  $i$  при  $G=10$  кг/с. Ответ:  $p_1^*=4,6 \cdot 10^6$  Па,  $i=61$ .

Истечение через затопленное отверстие или истечение под уровень называется перетекание жидкости из одного сосуда в другой, заполненный той же жидкостью (рис. 9.8). В этом случае гидравлические сопротивления состоят из местного сопротивления затопленного отверстия —  $\zeta \rho u_2^2/2$  и «удара» Борда—Карно, на который затрачивается вся кинетическая энергия струи  $\rho u_2^2/2$ .

Для определения скорости струи в сжатом сечении 2—2 запишем уравнение Бернулли (7.25) для течения жидкости между сечениями 1—1 и 3—3. Учтя, что  $u_1 \approx 0$ ,  $u_3 \approx 0$  и поле скоростей в сечении 2—2 равномерно, получим

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = gz_3 + \frac{p_3}{\rho} + \zeta \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} = gz_3 + \frac{p_3}{\rho} + (1+\zeta) \frac{u_2^2}{2}; \text{ т. е.}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2 \left[ g(z_1 - z_3) + \frac{p_1 - p_3}{\rho} \right]} = \varphi \sqrt{2gH} \quad (9.22)$$

и

$$G = S_2 u_2 \rho = \varepsilon \varphi S_0 \rho \sqrt{2gH} = \psi S_0 \rho \sqrt{2gH}, \quad (9.23)$$

где  $H = (z_1 - z_3) + \frac{p_1 - p_3}{\rho g}$  — разность гидростатических напоров на оси отверстия до него и за ним.

В данном случае скорость истечения и расход жидкости не зависят от глубины погружения отверстия.

*Коэффициенты сжатия* —  $\varepsilon$ , *скоростной* —  $\varphi$  и *расхода* —  $\psi$ , при истечении под уровень определяются так же, как при истечении в газ.

Истечение жидкости через внешний цилиндрический насадок. Внешний цилиндрический насадок представляет собой цилиндрическую трубку или сверление в толстой стенке длиной  $l = (2 \dots 6)d$  без закругления входной кромки. Возможны два режима истечений из насадка: *a* и *b* (рис. 9.9). Режим *a* наблюдается при сравнительно малых напорах и, следовательно, скоростях истечения. Струя при входе в насадок сжимается. Окруженная завихренной жидкостью, она постепенно расширяется так, что

на выходе приобретает площадь поперечного сечения насадка. Поэтому коэффициент сжатия струи для этого режима равен единице и коэффициент расхода численно равен коэффициенту скорости  $\psi = \varphi$ . Потери напора в цилиндрическом насадке в основном являются потерями на «удар» Борда—Карно между сечениями 2—3. Осредненные значения коэффициентов для этого режима при  $Re = (u_T d / \nu) > 10^4$  следующие:

$$\epsilon = 1; \zeta = 0,5; \psi = \varphi = 1/\sqrt{1 + \zeta} = 0,82.$$

При истечении через внешний цилиндрический насадок (режим а) потери напора по сравнению с истечением через отверстие в

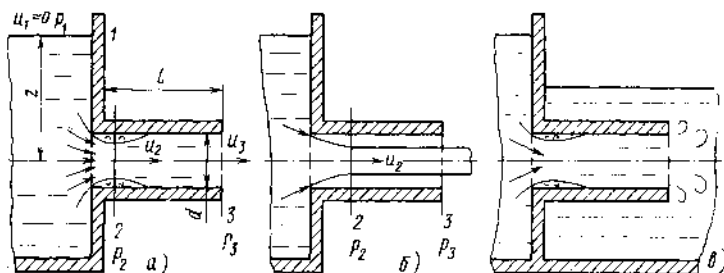


Рис. 9.9. Истечение через цилиндрические насадки при различных режимах:

а—без сжатия струи; б—с сжатием; в—«под уровень»

тонкой стенке возрастают в 7,7, скорость истечения  $u_3$  уменьшается примерно в 1,2 раза за счет возникновения дополнительных потерь. Расход увеличивается в 1,35 раза за счет того, что на выходе отсутствует сужение струи. Это значит, что скорость жидкости  $u_2$  в сечении 2—2 возрастает в 1,35 раза за счет снижения давления в этом сечении  $p_2 < p_3$  и мы имеем здесь дело с «сосущим» действием цилиндрического насадка на режиме а.

Переход истечения от режима а к режиму б. При увеличении напора  $z_1 + \frac{p_1 - p_3}{\rho g}$  скорость жидкости в сечении 2—2 увеличивается, а давление уменьшается. При некотором критическом значении напора  $\left(z_1 + \frac{p_1 - p_3}{\rho g}\right)_{кр}$  давление в сечении 2—2 достигает давления паров, насыщающих пространство при данной температуре жидкости ( $p_2 = p_t$ ). При этом начинается кипение жидкости и режим истечения а переходит в режим б. Давление в сечении 2—2 сравнивается с  $p_3$  и истечение становится точно таким же, как истечение через отверстие в тонкой стенке, т. е. скорость возрастает за счет уменьшения сопротивления, а расход уменьшается за счет сужения струи.



Для определения критического напора примем  $p_1 = p_3$  и  $p_2 = p_t$ . Составим уравнение Бернулли (7.25) для участка 2—3:

$$p_t + \frac{\rho u_{2кр}^2}{2} = p_3 + \frac{\rho u_{3кр}^2}{2} + \rho \frac{(u_{2кр} - u_{3кр})^2}{2}, \quad (9.24)$$

где  $\rho \frac{(u_{2кр} - u_{3кр})^2}{2}$  — потери полного напора на „удар“ Борда—Карно на участке 2—3 при критическом режиме истечения  $a$ . Подставив в уравнение (9.24) значения  $u_{2кр} = \frac{u_{3кр} S_3}{S_2} = \frac{u_{3кр}}{\epsilon}$  и  $u_{3кр} = \varphi \sqrt{2gz_{1кр}}$ , получим

$$z_{1кр} = \frac{p_3 - p_t}{\rho g \varphi^2 \left[ \frac{1}{\epsilon^2} - 1 - \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right)^2 \right]}.$$

Принимая  $\varphi = 0,82$ ;  $\epsilon = 0,64$ , получим

$$z_{1кр} \approx \frac{p_3 - p_t}{0,75 \rho g}.$$

При истечении воды при  $T = 293$  К, и  $p_1 = p_3 = 10^5$  Н/м<sup>2</sup> и  $p_t = 2,4 \times 10^3$  Н/м<sup>2</sup>

$$z_{1кр} = \frac{10^5 - 2,4 \cdot 10^3}{0,75 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 13,3 \text{ м.}$$

Истечение под уровень через цилиндрический насадок (см. рис. 9.9, в). При увеличении напора сверх критического в насадке сохраняется режим истечения  $a$ , но возникает кавитация, вследствие чего коэффициент сопротивления растет и расход жидкости уменьшается.

Недостатком внешнего цилиндрического насадка является неустойчивость режима истечения, т. е. возможность самопроизвольного уменьшения расхода при увеличении напора, а также повышенные гидравлические потери на режиме истечения  $a$ .

При истечении из сопла Витшинского  $\epsilon = 1$ ,  $\zeta = 0,01 \dots 0,1$   $\psi = \varphi = 0,99 \dots 0,95$ . Большие значения  $\varphi_c$  и  $\psi_c$  соответствуют большим числам Рейнольдса. Такие насадки обеспечивают максимальную скорость истечения и расход в 1,5 раза больший, чем при истечении из отверстий в тонкой стенке.

Истечение через диффузорный, т. е. расширяющийся насадок. Добавление к тонкой стенке с отверстием диффузорного насадка (рис. 9.10, а) вызывает снижение давления  $p_2 < p_3$  в минимальном сечении и соответствующее уве-

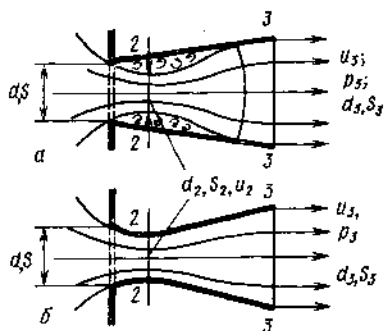


Рис. 9.10. Насадки:

а—диффузорный; б—комбинированный

личение скорости и расхода. Поэтому такие насадки называются сосущими. При неизменном диаметре отверстия  $d$  и при небольшом напоре  $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_3}{\rho g}$  добавление диффузорного насадка может увеличить расход жидкости в 2,5 раза ( $\psi=2,5$ ). При увеличении напора в узком сечении возможно возникновение кавитации, приводящей к снижению расхода. Наилучшие результаты дают диффузорные насадки при  $\theta \leq 8^\circ$ . При увеличении угла  $\theta > 8^\circ$  возможен

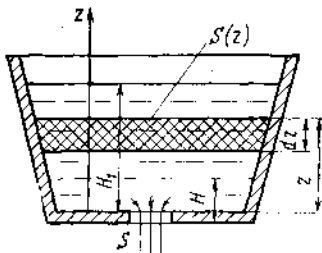


Рис. 9.11. Слив через донное отверстие

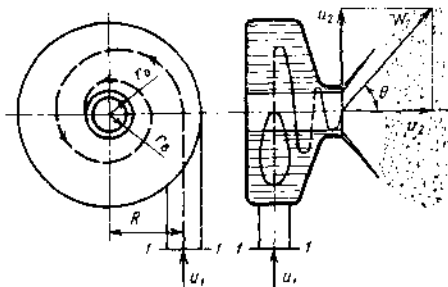


Рис. 9.12. Схема центробежной форсунки

отрыв течения от стенок, увеличение потерь и уменьшение расхода. Особенно хорошие данные имеют комбинированные насадки, сочетающие сужающееся сопло и диффузор (рис. 9.10, б), в которых вихревая зона может быть исключена и потери сведены к минимуму.

**Задача 9.6.** Вода из горного озера подается по цилиндрической трубе самооттеком. Укажите, как увеличить расход воды, не изменяя диаметра трубы и ее положения.

Истечение жидкости при переменном напоре через донное отверстие. Для случая, когда слив осуществляется через относительно небольшое отверстие  $S/S(z) \ll 1$  (рис. 9.11) напор изменяется медленно и тогда истечение элементарного объема  $dV = -S(z)dz$  можно рассматривать как установившийся процесс, происходящий при постоянной высоте столба жидкости  $z$ . Знак минус учитывает, что при принятом отсчете  $z$  от дна сосуда  $dz < 0$ . Для определения времени  $t$  опорожнения всего сосуда выразим  $dV$  по формуле (9.19) при  $p_1 = p_2$ :

$$dV = -S(z)dz = \psi S \sqrt{2gz} dt.$$

Интегрируя в пределах от  $H_1$  до текущего значения  $H$ , получим

$$t = -\frac{1}{\psi S \sqrt{2g}} \int_{H_1}^H \frac{S(z) dz}{\sqrt{z}}.$$

Для сосуда  $S(z) = \text{const}$  имеем  $t = \frac{2S(z)}{\psi S \sqrt{2g}} (V\sqrt{H_1} - V\sqrt{H})$ .

Время полного опорожнения сосуда при  $H=0$

$$t = \frac{2S(z)H_1}{\psi S \sqrt{2gH_1}}. \quad (9.25)$$

Числитель (9.25) равен удвоенному объему жидкости в начальный момент, знаменатель — объемному расходу в начальный момент истечения. Следовательно, время полного опорожнения сосуда в два раза больше времени истечения того же объема при постоянном напоре, равном начальному.

**Центробежная форсунка.** Центробежные форсунки широко применяются для распыливания топлива в камерах сгорания ГТД и ЖРД.

Центробежная форсунка состоит из камеры закручивания с сопловым отверстием на оси (рис. 9.12). Для того, чтобы закрутить жидкость, ее подают в камеру закручивания со скоростью  $u_1$  тангенциально по каналу, ось которого расположена на расстоянии  $R$  от оси сопла. В камере жидкость вращается по инерции, т. е. созданный на входе секундный момент количества движения, если не учитывать сил трения, остается постоянным до выхода из сопла

$$Gu_1R = Gu_2r_B \text{ или } u_2 = u_1R/r_B.$$

Этот закон сохранения момента количества движения (4.28) показывает, что окружная составляющая скорости жидкости на выходе из сопла  $u_2$  сильно возрастает, а в соответствии с уравнением Бернулли, давление уменьшается до давления среды, в которую впрыскивается жидкость. Центробежные силы прижимают поток к стенкам сопла и образуют тонкую пленку жидкости толщиной  $r_c - r_B$ . Внутри этого кольцевого слоя жидкости образуется газовый вихрь, вращающийся под воздействием трения по законам вращения твердого тела (см. л. 3.8). Кроме вращения с окружной скоростью  $u_2$  кольцевой слой жидкости движется вдоль сопла с поступательной скоростью  $v_2$ . Вылетая из сопла струя образует под действием центробежных сил полый конус распыла (коническую пленку) с углом  $\theta$ , величина которого определяется соотношением скоростей  $u_2$  и  $v_2$ :

$$\operatorname{tg} \theta = u_2/v_2.$$

С удалением от сопла диаметр пленки увеличивается, она утоньшается и распадается на мельчайшие капли, обеспечивая хорошее смесеобразование и сгорание. Теория центробежной форсунки разработана проф. Г. Н. Абрамовичем [1]. Она позволяет определить коэффициент расхода  $\psi$  в зависимости от размеров и формы форсунки и располагаемого напора [19].

Определение скорости и расхода несжимаемой жидкости по измерению давлений. Для определения расхода и скорости в трубопроводах используются дроссельные приборы: диафрагма, сопло и трубка Вентури (рис. 9.13). Расход и средняя скорость жидкости в трубопроводе определяются по измеренной дифференциальным пьезометром или другими манометрами разности давлений.

метрами разности давлений до дроссельного прибора  $p_1$  и сниженного давления  $p$  во втором поясе измерений.

Запишем для участка 1—2 течения через диафрагму уравнение Бернулли (4.25) с учетом гидравлических потерь, равных  $\zeta \rho u_2^2/2$  и равномерности полей скоростей ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ):

$$p_1' + \frac{\rho u_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2} + \zeta \frac{\rho u_2^2}{2}.$$

Учтем несовершенное сжатие струи в соответствии с формулами (9.15) и (9.20)  $S_2 = \epsilon_H S$  вместе с уравнением неразрывности  $u_1 S_1 = u_2 S_2$ , т. е.  $u_1 = u_2 \epsilon_H S/S_1$  и обозначая  $S/S_1 = m$ , получим

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta - \epsilon_H^2 m^2}} \sqrt{\frac{2(p_1' - p_2)}{\rho}}.$$

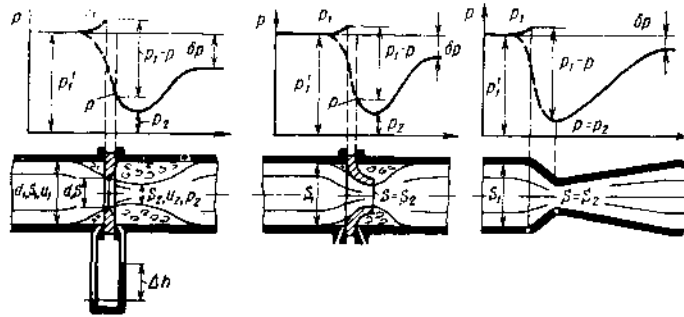


Рис. 9.13. Диафрагма, сопло и трубка Вентури

Однако, для определенности и удобства, давления измеряют не в сечениях 1 и 2, а непосредственно перед диафрагмой  $p_1$  и за ней  $p$ , где давления за счет действия центробежных сил больше, чем  $p_1'$  и  $p_2$ , поэтому при переходе к  $p_1$  и  $p$  в последнюю формулу вводится поправочный коэффициент

$$u_2 = \frac{A}{\sqrt{1 + \zeta - \epsilon_H^2 m^2}} \sqrt{\frac{2(p_1 - p)}{\rho}} \quad (9.26)$$

и 
$$G = S_2 u_2 \rho = \epsilon_H S \rho u_2 = \frac{A \epsilon_H}{\sqrt{1 + \zeta - \epsilon_H^2 m^2}} S \sqrt{2\rho(p_1 - p)}, \quad (9.27)$$

где  $\frac{A \epsilon_H}{\sqrt{1 + \zeta - \epsilon_H^2 m^2}} = \psi$  — коэффициент расхода, тогда

$$G = \psi S \sqrt{2\rho(p_1 - p)} \quad (9.28)$$

и средняя скорость в трубе

$$u_1 = G/(\rho S_1). \quad (9.29)$$

Если диафрагмы, сопла и расходомеры Вентури выполнены и смонтированы в трубопроводе в строгом соответствии со стандар-

тами, то они не требуют тарировки и коэффициенты расхода  $\psi$  в формуле (9.28) находятся в справочнике [12]. В противном случае необходима тарировка. Диафрагма наиболее проста и имеет наименьший размер, но вносит максимальные потери напора —  $\delta p$ , которые, в основном, являются потерями на «удар» Борда — Карно при расширении струи от  $S_2$  до  $S_1$ . Минимальные потери имеет расходомер Вентури. Однако он имеет максимальную длину и относительно дорог.

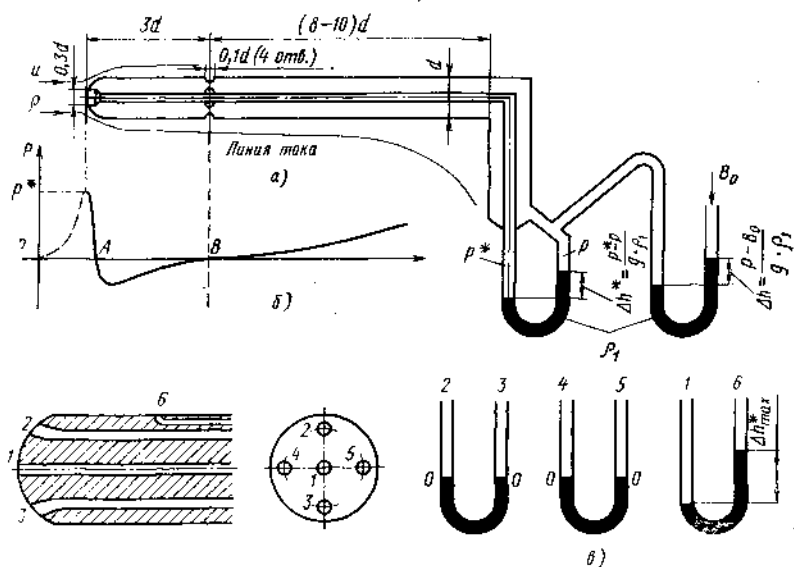


Рис. 9.14. Измерение вектора скорости:

*a*—трубка Пито—Прандтля; *б*—измерение давления по поверхности трубки; *в*—латиканальный насадок ЦАГИ

Формула (9.28) справедлива и для газов при числе  $M < 0,2$ . При больших числах  $M < 1$  необходимо вводить поправку на сжимаемость. Если для измерения перепада давлений применяется дифференциальный манометр, заполненный жидкостью, плотность которой  $\rho_n$  и в трубках над этой жидкостью находится та же жидкость, что течет в трубе и имеет плотность  $\rho < \rho_n$ , то для того, чтобы определить  $p_1 - p$  по измеренному перепаду  $\Delta h$ , следует записать уравнение равновесия столбов жидкости

$$p_1 + \rho g \Delta h = p + \rho_n g \Delta h \quad \text{и} \quad p_1 - p = g \Delta h (\rho_n - \rho)$$

и 
$$G = \psi S \sqrt{2g \Delta h (\rho_n - \rho)}. \quad (9.30)$$

Скорость жидкости в данной точке определяют с помощью трубки Пито — Прандтля, в которой объединены в одном корпусе приемники полного и статического давлений (рис. 9.14, а). Трубка Пито — Прандтля используется для определения скорости полета самолета. При измерениях приемник полного

давления ориентируется против вектора скорости. Изменение давления вдоль осевой линии перед трубкой при  $M < 1$  изображено на рис. 9.14,б пунктирной линией: к критической точке на носике полушферы скорость уменьшается до нуля, а давление возрастает до давления торможения  $p^*$  в набегающем потоке. Сплошная линия показывает изменение статического давления на поверхности трубки: линии тока сближаются, скорость увеличивается и давление на сферической поверхности снижается до статического давления в невозмущенном потоке и ниже. Затем линии тока расходятся и на расстоянии (3...5)  $d$  давление снова сравнивается со статическим в набегающем потоке. Здесь в сечении  $B$  располагаются отверстия для измерения статического давления. Располагать отверстия в сечении  $A$  было бы неправильно, так как даже незначительное смещение их привело бы к большим ошибкам при измерении. Около державки поток вновь подтормаживается и давление повышается. Скорость определяется по уравнению Бернулли (9.21):

$$u = \varphi \sqrt{2 \frac{p^* - p}{\rho}}, \quad (9.31)$$

где  $\varphi$  — коэффициент трубки Пито—Прандтля, определяется конструкцией трубки и числом Рейнольдса. Если трубка Пито—Прандтля выполнена в соответствии со стандартом, то тарировка ее не требуется, так как  $\varphi$  отличается от единицы не более, чем на 1...2%. В противном случае требуется тарировка и определение  $\varphi = f(\text{Re})$ .

При правильной установке ось трубки должна совпадать с вектором скорости (угол скоса потока должен быть равен нулю). Это требование может выполняться не очень точно, так как трубка Пито—Прандтля не особенно чувствительна к скосу потока: ее показания практически не изменяются при скосе потока на  $\pm 15^\circ$ . Поэтому трубка Пито—Прандтля удобна для определения величины скорости и не пригодна для точного определения направления вектора скорости в пространстве.

Для определения направления и величины вектора скорости в пространстве с точностью до  $0,1^\circ$  применяется пятидырочный насадок ЦАГИ (см. рис. 9.14,в). На рисунке показано положение уровней жидкости в пьезометрах при совпадении вектора скорости с осью трубки.

## Глава 10

# ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДОВ

---

В различных гидравлических системах жидкость передается по трубопроводам. Таковы, например, системы подачи топлива, смазки и охладителя в двигательных установках, нефти в нефтепроводах и т. д. При отсутствии энергетического обмена с внешней средой ( $l_{\text{тех}}=0$ ) жидкость движется по трубопроводу вследствие того, что ее потенциальная энергия в начале трубопровода больше, чем в конце. Эта разность потенциальных энергий затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений между рассматриваемыми сечениями трубопровода и, если изменяется его сечение, на изменение кинетической энергии жидкости. Повышенная потенциальная энергия жидкости в начале трубопровода может создаваться за счет: работы насоса — насосная подача; повышенного давления газа на свободную поверхность жидкости в баке — вытеснительная или баллонная подача; разности уровней жидкости — самотечная подача. Методика расчета трубопроводов одинакова для всех типов подач. Трубопроводы бывают простые — постоянного сечения, без разветвлений и сложные — различного диаметра и с разветвлениями. При расчете трубопроводов используются уравнения неразрывности, Бернулли, формулы расчета сопротивлений и экспериментальные данные.

### 10.1. ПРОСТОЙ ТРУБОПРОВОД

Пусть простой трубопровод расположен произвольно в пространстве, имеет общую длину  $l$ , диаметр  $d$ , содержит  $n$  местных сопротивлений и передает заданную жидкость ( $q, v$ ) (рис. 10.1).

Уравнение Бернулли (7.25) для участка 1—2 трубопровода при условии  $l_{\text{тех}}=0$ ,  $u_2=u_1=u$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=1$  и с учетом (6.31), (6.32) и (6.33) примет вид

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = z_2 - z_1 + \left( \zeta_{\text{тр}} \frac{l}{d} + \sum_1^n \zeta_i \right) \frac{u^2}{2g} = z_2 - z_1 + \zeta_{\text{тр.об}} \frac{u^2}{2g}, \quad (10.1)$$

где величина  $\left( \zeta_{\text{тр}} \frac{l}{d} + \sum_1^n \zeta_i \right) \frac{u^2}{2g}$  — сумма последовательно соеди-

ненных гидравлических сопротивлений трубопровода;  $\zeta_{\text{труб}}$  — их коэффициент;  $\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = H_{\text{потр}}$  — потребный напор в том случае, если подлежит определению в задаче;  $\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = H_{\text{расп}}$  — располагаемый напор, когда эта величина задана.

Задача 10.1. Укажите, на что расходуется располагаемый напор.

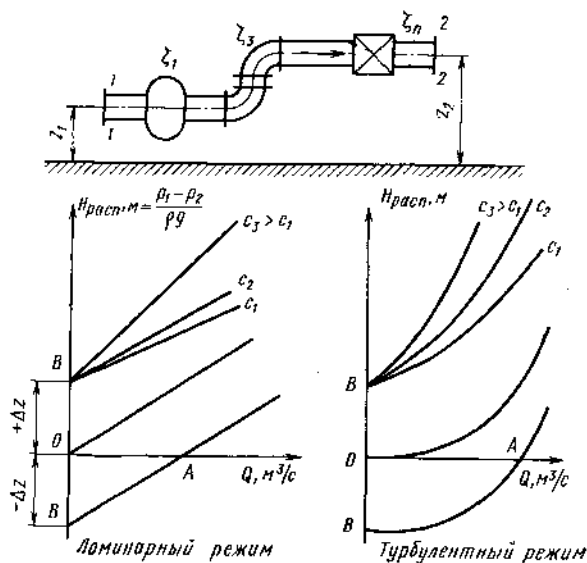


Рис. 10.1. Простой трубопровод

Выразим гидравлические потери через объемный расход  $Q \text{ м}^3/\text{с}$

$$H_{\text{потр}} = z_2 - z_1 + CQ^m. \quad (10.2)$$

Определим коэффициент пропорциональности  $C$  и показатель степени  $m$  для ламинарного течения. Учтя, что  $\zeta_{\text{тр}} = 64/\text{Re}$ ,  $\zeta = \zeta_{\text{тр}} \times l_{\text{экв}}/d$  и  $u = 4Q/(\pi d^2)$ , получим

$$CQ^m = \frac{64}{\text{Re} d} \left( l + \sum_1^n l_{\text{экв}i} \right) \frac{u^2}{2g} = \frac{128\nu \left( l + \sum_1^n l_{\text{экв}i} \right)}{\pi g d^4} Q,$$

т. е. 
$$C = \frac{128\nu \left( l + \sum_1^n l_{\text{экв}i} \right)}{\pi g d^4}; \quad m = 1. \quad (10.3)$$

Для турбулентного течения

$$CQ^m = \left( \zeta_{\text{тр}} \frac{l}{d} + \sum_1^n \zeta \right) \frac{Q^2}{2g \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)^2}, \quad \text{т. е.}$$



$$C = \left( \zeta_{тр} \frac{l}{d} + \sum_1^n \zeta_i \right) \frac{8}{g\pi^2 d^4}; \quad m=2. \quad (10.4)$$

Характеристика трубопровода или зависимость потребного напора от расхода жидкости выражается формулой (10.2). На рис. 10.1 приведены характеристики различных трубопроводов при разных  $\Delta z = z_2 - z_1$  для ламинарного и турбулентного течений.

При ламинарном режиме характеристика близка к прямой  $m \approx 1$ , при турбулентном — к параболе  $m \approx 2$ . Тангенс угла наклона касательной к характеристике тем больше, чем больше  $C$ , т. е. чем больше сопротивление трубопровода. Точка  $A$  пересечения характеристик с осью — определяет объемный расход при движении жидкости самотеком за счет разности нивелирных высот  $(z_2 - z_1) < 0$ . Потребный напор в этом случае равен нулю, т. е.  $p_1 = p_2$ . Для того, чтобы в таком трубопроводе уменьшить расход, необходим отрицательный потребный напор ( $p_2 > p_1$ ). Точки  $B$  соответствуют покою жидкости  $Q = 0$ .

Если за потребный (располагаемый) напор принимают величину

$$H'_{потр} = \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right), \quad (10.5)$$

то характеристики всех трубопроводов  $H'_{потр} = f(Q)$  будут проходить через начало координат.

Порядок расчета простого трубопровода зависит от постановки задачи.

**Задача 10.2.** Дано: Расход  $Q$ , свойства жидкости  $\rho, \nu$ , размеры трубопровода и его шероховатость, типы местных сопротивлений,  $z_2$  и  $z_1$ . Определить потребный напор  $H_{потр} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g}$ .

**Решение:** 1) определяется режим течения  $Re = ud/\nu$ , где  $u = 4Q/\pi d^2$ ; 2) определяются коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta_i$  и  $\zeta_{тр} = f(Re, K/R)$  на основании материалов, приведенных в главах 6, 7, 8 и 9; 3) определяется  $H_{потр}$  по формулам (10.2), (10.3) или (10.4).

**Задача 10.3.** Дано: свойства жидкости  $\rho, \nu$ , размеры трубопровода, шероховатость стенок, типы местных сопротивлений, располагаемый напор  $H_{расп}$ . Определить расход жидкости  $Q$ .

**Решение** задач такого типа выполняется графоаналитическим способом:

1) задается ряд значений расхода  $Q$ ; 2) для каждого значения  $Q$  определяются  $Re$ ,  $\zeta_i$ ,  $\zeta_{тр}$  и  $H_{потр}$  [см. решение задачи (10.2)]; 3) строится характеристика трубопровода  $H_{потр} = f(Q)$ ; 4) по заданной величине  $H_{расп}$  определяется искомым расход  $Q$  по характеристике.

**Задача 10.4.** Дано: расход  $Q$  и свойства жидкости  $\rho, \nu$ , типы местных сопротивлений, размеры трубопровода, кроме диаметра, относительная шероховатость, располагаемый напор  $H_{расп}$ . Определить диаметр трубопровода  $d$ .

**Решение** выполняется графоаналитическим способом: 1) задается ряд значений диаметров  $d$ ; 2) для каждого значения  $d$  определяется  $Re$ ,  $\zeta_i$ ,  $\zeta_{тр}$  и  $H_{потр}$  [см. решение задачи (10.2)]; 3) строится график  $H_{потр} = f(d)$ ; 4) по этому графику и заданному  $H_{расп}$  определяется диаметр трубопровода  $d$  и выбирается ближайший к стандартному; 5) уточняется величина расхода  $Q$  для выбранного стандартного диаметра.

Сифон — это простой самотечный трубопровод, одна часть

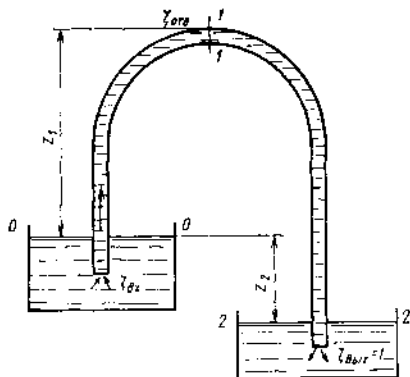


Рис. 10.2. Сифон

которого расположена выше свободной поверхности питающей его жидкости, а другая — ниже (рис. 10.2). Жидкость движется в сифоне за счет разности уровней  $z_2$ . Для того, чтобы сифон начал действовать, необходимо всю трубу заполнить жидкостью. Учтем, что для свободных поверхностей 0—0 и 2—2  $p_2 = p_0$ ,  $u_2 = u_0 = 0$  и суммарное сопротивление сифона складывается из потерь линейных и местных при входе в трубу, в отводе и при «ударе» Бorda — Карно на выходе из трубы и запишем уравнение Бернулли (7.25).

$$z_2 = \left( \zeta_{тр} \frac{l}{d} + \zeta_{вх} + \zeta_{отв} + \zeta_{вых} \right) \frac{u^2}{2g} = CQ^m, \quad (10.6)$$

где  $z_2$  представляет потребный (располагаемый) напор  $H_{потр}$ .

**Вопрос 10.5.** Чем определяется расход жидкости через сифон?

Формула (10.6) показывает, что расход жидкости через сифон не зависит от высоты ее подъема  $z_1$ . Однако при увеличении  $z_1$  давление жидкости  $p_1$  уменьшается вплоть до давления паров, насыщающих пространство, при котором в сечении 1—1 возникает кавитация и расход жидкости уменьшается вплоть до полного прекращения подачи. Предельное значение  $p_1 \geq p_t$  рассчитывается по уравнению Бернулли для участка 0—1. Сифон рассчитывается по методике расчета простых трубопроводов [см. задачи (10.2), (10.3), (10.4)].

## 10.2. СЛОЖНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

**Последовательное соединение труб.** Рассмотрим соединение трех труб различного диаметра (рис. 10.3). В этом случае расход жидкости через весь трубопровод равен расходу через каждую трубу, а сопротивление всего трубопровода равно сумме сопротивлений последовательно соединенных труб

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3; \quad l_{тр(A-B)} = l_{тр1} + l_{тр2} + l_{тр3}. \quad (10.7)$$

Выразим потребный (располагаемый) напор по формуле (10.5), учтем, что в общем случае  $u_B \neq u_A$  и  $\alpha_B \neq \alpha_A$  и запишем уравнение Бернулли (7.25) для трубопровода A—B:

$$H'_{потр} = \frac{\alpha_B u_B^2}{2g} - \frac{\alpha_A u_A^2}{2g} + \frac{1}{g} l_{тр(A-B)} = C'Q^2 + CQ^m, \quad (10.8)$$

где 
$$C' = \frac{1}{2g} \left( \frac{\alpha_B}{S_B^2} - \frac{\alpha_A}{S_A^2} \right).$$

Построим характеристики 1, 2 и 3 труб (см. рис. 10.3). Характеристику трубопровода A—B получим, складывая все три пот-

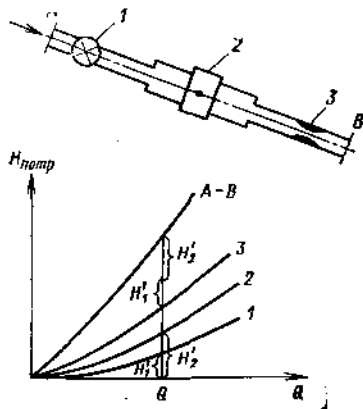


Рис. 10.3. Последовательное соединение труб

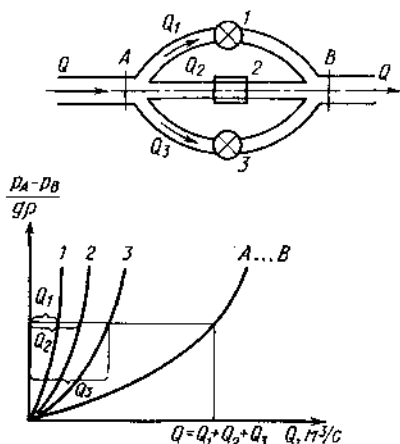


Рис. 10.4. Параллельное соединение труб

ребных напора при одинаковых расходах, как это следует из (10.7). Последовательное соединение труб рассчитывается после этого по методике расчета простого трубопровода [задачи (10.2), (10.3), (10.4)].

Параллельное соединение трубопроводов. Пусть в сечениях  $A$  и  $B$  соединяются три различных трубопровода  $1$ ,  $2$  и  $3$  (рис. 10.4). Расход жидкости  $Q$  до разветвления в сечении  $A$  и после слияния в сечении  $B$  равен сумме расходов через параллельные трубопроводы, т. е.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (10.9)$$

Суммарные гидравлические потери всего разветвления  $\frac{1}{g} l_{\text{тр}} (A-B)$  равны суммарным гидравлическим потерям каждого трубопровода  $\frac{1}{g} l_{\text{тр}i}$  и равны по уравнению Бернулли (7.25) разности полных напоров в сечениях  $A$  и  $B$  ( $H_A - H_B$ ), т. е.

$$\frac{1}{g} l_{\text{тр}} (A-B) = \frac{1}{g} l_{\text{тр}1} = \frac{1}{g} l_{\text{тр}2} = \frac{1}{g} l_{\text{тр}3} = H_A - H_B. \quad (10.10)$$

Суммарные гидравлические потери можно выразить через расходы жидкости

$$\left. \begin{aligned} H_A - H_B &= C_1 Q_1^{m_1}; \\ H_A - H_B &= C_2 Q_2^{m_2}; \\ H_A - H_B &= C_3 Q_3^{m_3}. \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

В (10.11) величины коэффициентов  $C_i$ ,  $m_i$  определяются обычно по формулам (10.3) и (10.4).

Для построения характеристики параллельного соединения труб необходимо сложить расходы (10.9) при одинаковых потерях полного напора (см. рис. 10.4). При этом характеристики отдельных труб строятся по формулам (10.11).

**Задача 10.6.** Составьте методику определения расходов жидкости в параллельно соединенных трубах  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_i$ , если заданы суммарный расход жидкости,  $q$ ,  $\nu$  размеры трубопроводов и их местные сопротивления.

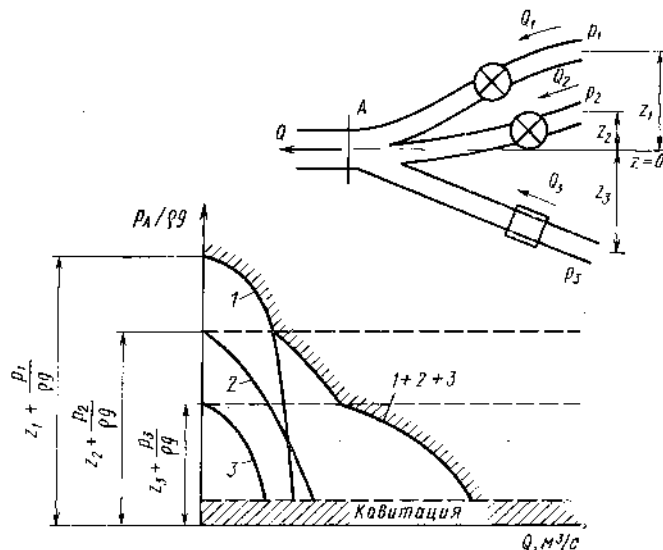


Рис. 10.5. Разветвленный трубопровод

**Разветвленный трубопровод.** Разветвленным называется трубопровод, состоящий из нескольких труб, имеющих одно общее сечение разветвления или соединения этих труб. Разветвленные трубопроводы наиболее часто применяются в авиационной технике, например подача топлива к двигателю из разных баков (рис. 10.5). Возможность обратного течения в трубах 1, 2, 3 предотвращается постановкой обратных клапанов.

Общий расход жидкости через разветвленный трубопровод равен сумме расходов через отдельные трубопроводы (10.9).

Учтем, что скорость жидкости в начале и в конце каждого трубопровода одинакова и запишем уравнение Бернулли (7.25) для первой трубы

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_A}{\rho g} + \frac{1}{g} l_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad \frac{p_A}{\rho g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - \frac{1}{g} l_{\text{тр}}$$

Выразим для труб 1, 2, 3 сумму потерь через расход жидкости и получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_A}{\rho g} &= z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - C_1 Q_1^{m_1}; \\ \frac{p_A}{\rho g} &= z_2 + \frac{p_2}{\rho g} - C_2 Q_2^{m_2}; \\ \frac{p_A}{\rho g} &= z_3 + \frac{p_3}{\rho g} - C_3 Q_3^{m_3}, \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

где  $C_i$  и  $m_i$  — определяются из формул (10.3) или (10.4) в зависимости от режима течения. Таким образом, для нашего случая получена система из четырех уравнений (10.9) и (10.12), содержащих четыре неизвестных  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $p_A$ .

Решение задач удобно выполнять графическим способом: 1) строится зависимость  $p_A/\rho g = f(Q)$  для каждого разветвления [см. рис. (10.5)]; 2) складываются расходы  $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$  при постоянных значениях  $p_A/\rho g$ .

Полученная кривая 1+2+3 является характеристикой всего разветвленного трубопровода при заданных размерах трубопроводов и их местных сопротивлениях, свойствах жидкости и значениях  $p_1, p_2, p_3$  и  $z_1, z_2, z_3$ . Как видим, с уменьшением давления  $p_A$  расход возрастает. Предел увеличения расхода обусловлен возникновением кавитации в сечении А.

Трубопроводы, состоящие из нескольких параллельных и последовательных соединений, рассчитываются графо-аналитически с использованием характеристик. Трубопровод разбивается на ряд простых. Строятся характеристики параллельно соединенных простых трубопроводов и характеристики этих соединений, затем складываются все последовательно соединенные участки и получается характеристика всего трубопровода.

### 10.3. ТРУБОПРОВОД С НАСОСНОЙ ПОДАЧЕЙ ЖИДКОСТИ

В пп. 10.1 и 10.2 были рассмотрены лишь отдельные участки трубопроводов без анализа работы всей гидравлической системы, включающей источник энергии. Исключением являлась лишь простейшая самотечная система — сифон. Рассмотрим теперь совместную работу трубопровода с насосом. Насосная подача жидкости в авиационной и ракетной технике наиболее распространена вследствие ее надежности, хороших характеристик и минимального веса.

На рис. 10.6 представлена схема топливной системы двигателя. Насос подает топливо из бака к двигателю, где оно впрыскивается через форсунку с большой скоростью в камеру сгорания. Часть трубопровода до насоса называется *всасывающей*, а за насосом — *нагнетающей* или *напорной*.

Всасывающий трубопровод. Запишем уравнение Бернулли (7.25) для всасывающего трубопровода 0—1, полагая  $u_0 = 0$ .

$$\frac{p_0}{\rho g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{u_1^2}{2g} + \frac{1}{g} l_{тр(0-1)}. \quad (10.13)$$

Уравнение (10.13) показывает, что процесс всасывания, осуществляемый насосом, создающим пониженное давление  $p_1 < p_0$ , обеспечивается давлением  $p_0$  в баке. Давление  $p_0$  расходуется на подъем топлива на высоту  $z_1$ , сообщение ему кинетической энергии  $\alpha_1 u_1^2/2g$ , преодоление всех гидравлических сопротивлений всасывающего трубопровода и сохраняется в виде давления  $p_1$ , которое долж-

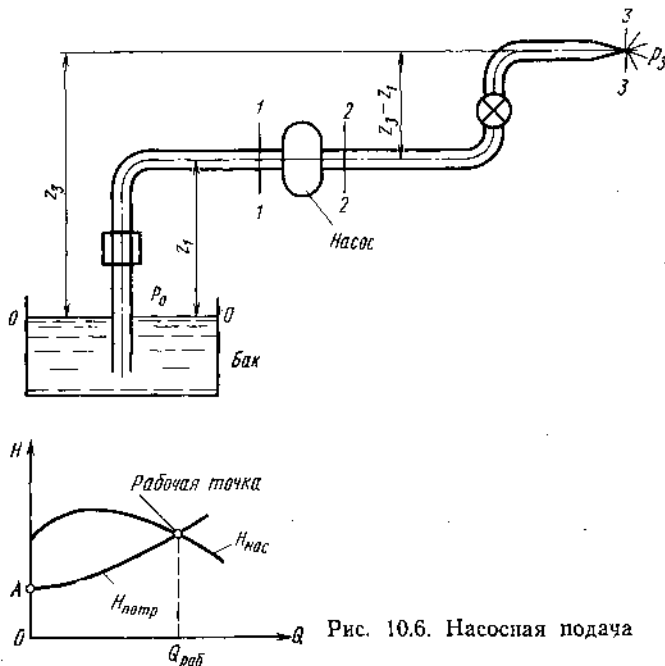


Рис. 10.6. Насосная подача

но обеспечивать бескавитационную работу насоса (см. п. 4.7). Если бак сообщается с атмосферой, то при увеличении высоты полета давление  $p_0$  уменьшается, а вместе с ним и  $p_1$ , что ограничивает высотность системы ввиду возможности возникновения кавитации. Для предотвращения кавитации следует снижать температуру топлива ( $p_t$ ) и увеличивать давление  $p_1$ , уменьшая высоту всасывания  $z_1$  и гидравлическое сопротивление всасывающего трубопровода и повышать давление  $p_0$ , наддувая бак. Наддув бака ограничен прочностью бака, а следовательно, его весом. Поэтому часто непосредственно под баком устанавливается подкачивающий насос (см. рис. 10.8), подающий топливо к основному насосу под необходимым давлением  $p_1 = p_t + \Delta p$ , где  $\Delta p$  — запас по кавитации.

Для расчета всасывающего трубопровода используется уравнение (10.13), позволяющее, например, определить потребное давление в баке  $p_0$  при заданных  $z$ ,  $p_1$ ,  $Q$  и  $l_{тр}$  и решать другие задачи.

Потребный напор — это напор, который необходимо сообщить одному килограмму топлива в насосе для обеспечения заданных параметров работы системы. Для его определения запи-

шем уравнение Бернулли (7.25) для всего трубопровода, т. е. для участка 0—3:

$$H_{\text{потр}} = \frac{1}{g} l_{\text{нас}} = z_3 + \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + \alpha_3 \frac{u_3^2}{2g} + \frac{1}{g} l_{\text{тр}(0-3)} \quad (10.14)$$

где  $l_{\text{нас}} = -l_{\text{тех}} = gH_{\text{расп}}$  — полезная работа насоса, сообщаемая одному килограмму топлива;  $p_3$  — давление газов в камере сгорания;  $l_{\text{тр}(0-3)}$  — гидравлическое сопротивление всей системы.

Выражая кинетическую энергию топлива и гидравлические потери через расход в соответствии с (10.2) и (10.11) и подставляя в (10.14), получим

$$H_{\text{потр}} = z_3 + \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + C'Q^2 + CQ^m. \quad (10.15)$$

Уравнение (10.15) является характеристикой всего трубопровода, изображенного на рис. 10.6.

Работу, которую насос сообщает жидкости или полезную работу насоса можно подсчитать по уравнению Бернулли (в Дж/кг или в м), составленного для участка 1—2 при условии  $d_1 = d_2$ ,  $u_1 = u_2$ ,  $z_1 = z_2$

$$l_{\text{нас}} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}, \quad H_{\text{нас}} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g}. \quad (10.16)$$

Формула (10.16) показывает, что работа насоса заключается в повышении давления топлива.

Характеристика насоса — это зависимость полезной работы насоса от расхода жидкости  $H_{\text{нас}} = f_2(Q)$  при постоянной частоте вращения вала насоса (см. рис. 10.6).

Установившийся режим работы гидравлической системы с насосной подачей определяется точкой пересечения *характеристики трубопровода*  $H_{\text{потр}} = f(Q)$  и *характеристики насоса*  $H_{\text{нас}} = f_2(Q)$ , которая называется *рабочей точкой* и соответствует условию  $H_{\text{потр}} = H_{\text{нас}}$ . Во время работы такой режим устанавливается и поддерживается автоматически. Режимы работы двигателей и вместе с ними расходы топлива изменяются в широком диапазоне. Поэтому топливные системы снабжаются системами регулирования, позволяющими смещать рабочие точки на меньшие и большие расходы. Например, широко применяется регулируемый перепуск части топлива помимо насоса из нагнетающей магистрали во всасывающую.

*Полезной мощностью*  $N_0$  называется механическая энергия, которую насос сообщает всей массе топлива в секунду

$$N_0 = l_{\text{нас}}G = \frac{p_2 - p_1}{\rho} G = (p_2 - p_1)Q. \quad (10.17)$$

*Мощность двигателя*, приводящего в действие насос, больше полезной ( $N > N_0$ ) на величину мощности, затраченной на преодоление гидравлических сопротивлений в насосе и сопротивлений тре-

ния в приводе и подшипниках. Эти потери учитываются *общим КПД насоса*

$$\eta = N_0/N; N = \frac{N_0}{\eta} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} G. \quad (10.18)$$

Значения полного КПД находятся в пределах 0,60 ... 0,85 для шестеренчатых и 0,7 ... 0,85 для центробежных насосов.

Замкнутый трубопровод с насосной подачей применяется в системах охлаждения и смазки двигателей или каких-либо объектов (рис. 10.7).

Уравнение Бернулли (7.25) при  $u_2 = u_1$  для участков 1—2 и 2—1 может быть записано так:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} - H_{\text{нас}} \quad \text{и} \quad \frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{g} l_{\text{тр}(2-1)}.$$

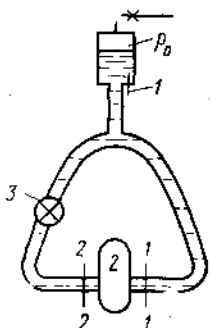


Рис. 10.7. Замкнутый трубопровод с насосной подачей:

1—компенсационный бачок;  
2—насос; 3—двигатель

Из этих уравнений получим

$$H_{\text{нас}} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{1}{g} l_{\text{тр}(1-2)} = H_{\text{потр}}, \quad (10.19)$$

т. е. напор насоса равен суммарным гидравлическим потерям системы или потребному напору.

Для замкнутого трубопровода обязателен *компенсационный или расширительный бачок*, соединенный трубкой с верхней точкой трубопровода. Без компенсационного бачка абсолютное давление внутри замкнутого трубопровода было бы неопределенным и переменным в связи с утечками жидкости и колебаниями ее температуры. В компенсационный бачок также отводятся пары жидкости, которые скапливаются в верхней части трубопровода.

**Задача 10.7.** На рис. 10.8 приведена топливная система двигателя. Керосин  $G = 0,28$  кг/с вырывается через пять струйных форсунок со скоростью  $u_4 = 100$  м/с в камеру сгорания, где давление газов  $p_{IV} = 10^6$  Па. Скоростной коэффициент  $\varphi = 0,97$ , коэффициент несовершенного сжатия струи  $\epsilon_n = 0,66$ . Давление керосина на входе в насос  $p_{II} = 1,3 \cdot 10^5$  Па обеспечивается подкачивающим насосом 2. Трубопровод технически гладкий,  $d = 12 \cdot 10^{-3}$  м,  $l = 6$  м. Полный КПД насоса  $\eta = 0,7$ . Местные сопротивления: 3 — отвод  $R/d = 2$ ,  $\delta = 90^\circ$ , 4 — кран отключения, 5 — фильтр фетровый, 6 — расходомер. Сопротивлением трубопровода от сечения III—III до сопла форсунки пренебречь.

Определить: 1) полный напор керосина и его составляющие в сечениях 0, I, II, III, IV; 2) мощность, затрачиваемую на привод насоса 2; 3) диаметр сопла струйных форсунок.

**Решение:** 1. Режим течения в трубопроводе

$$Re = \frac{ud}{\nu} = \frac{3,12 \cdot 10^{-3}}{2,45 \cdot 10^{-6}} = 14700 > 2330 \text{ — режим течения турбулентный,}$$

$$\text{где} \quad u = \frac{G}{\rho S} = \frac{4G}{\rho \pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,28}{820 \cdot 3,14 \cdot 12^2 \cdot 10^{-6}} \approx 3 \text{ м/с.}$$



2. Давление керосина на выходе из подкачивающего насоса 2 определим из уравнения Бернулли (7.25), записанного для участка I—II при  $u_{II}=u_I$  и  $\alpha_{II}=\alpha_I \approx 1$ :

$$\rho g z_1 + p_1 = \rho g z_{11} + p_{11} + \left( \zeta_{тр} \frac{l}{d} + 3\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 + \zeta_6 \right) \frac{\rho u^2}{2}, \quad (1)$$

где для  $Re=14700$  коэффициент сопротивления трения определяется по (8.30):

$$\zeta_{тр} = \frac{0,3164}{\sqrt{Re}} = \frac{0,3164}{\sqrt{14700}} \approx 0,029.$$

Коэффициент сопротивления отвода  $\zeta_{отв}$  определяется по (9.9) и рис. 9.2.

$$\zeta_{отв} = 0,73abc = 0,73 \cdot 0,18 \cdot 1 = 0,13.$$

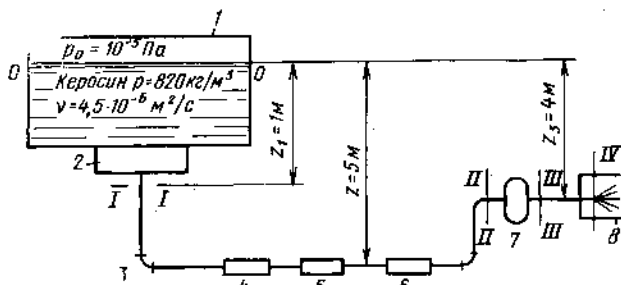


Рис. 10.8. Топливная система двигателя:

1—топливный бак; 2, 7—насосы; 3—отвод; 4—кран отключения; 5—фетровый фильтр; 6—расходомер; 8—камера сгорания

Коэффициенты местных сопротивлений 4 и 5 по рис. 9.4, полагая, что они не зависят от числа Рейнольдса при  $Re > 10^4$ :

$$\zeta_4 = 2, \quad \zeta_5 = 3,5 \quad \text{и} \quad \zeta_6 = 7 \quad (\text{по табл. 9.1}), \quad z_1 = 4 \text{ м}, \quad z_2 = 1 \text{ м}.$$

Подставляя все полученные данные в формулу (1), найдем  $p_1$ :

$$p_1 = 820 \cdot 9,81(1-4) + 1,3 \cdot 10^5 + \left( 0,029 \frac{6}{12 \cdot 10^{-3}} + 3 \cdot 0,13 + 2 + 3,5 + 7 \right) \times \\ \times \frac{820 \cdot 32}{2} = 2,07 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

3. Полный напор  $H_{III}$  на выходе из насоса 7, относительно нивелирной линии, проходящей через сопротивления 4, 5, 6, определим из уравнения Бернулли, записанного для участка III—IV:

$$H_{III} = H_{IV} + \zeta_{\phi} \frac{u_{IV}^2}{2g} = z_4 + \frac{p_{IV}}{\rho g} + \frac{u_4^2}{2g} + \zeta_{\phi} \frac{u_4^2}{2g}$$

$$\text{где} \quad \zeta_{\phi} = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = \frac{1}{0,97^2} - 1 = 0,062,$$

тогда

$$H_{III} = 1 + \frac{10^6}{820 \cdot 9,81} + \frac{100^2}{2 \cdot 9,81} + 0,062 \frac{100^2}{2 \cdot 9,81} = 675 \text{ м}.$$

4. Полный напор в сечениях 0, I, II, III, IV определим по формуле  $H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$  и по данным, приведенным в таблице, построим график изменения полного напора и его составляющих, приняв условно местные сопротивления равномерно распределенными по соответствующим участкам (рис. 10.9)

Сечение	0-0	I-I	II-II	III-III	IV-IV
$z, \text{ м}$	5,0	4,0	1,0	1,0	1
$p/\rho g, \text{ м}$	12,5	25,8	16,2	673,54	124
$u^2/2g, \text{ м}$	0	0,46	0,46	0,46	510
$H, \text{ м}$	17,2	30,26	17,66	675	635

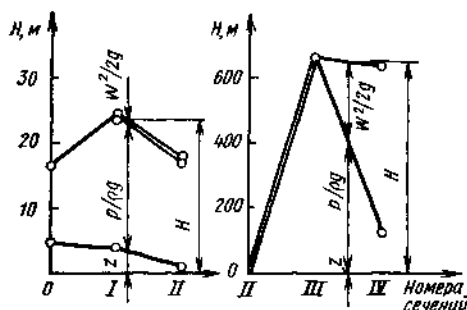


Рис. 10.9. Изменение полного напора и его составляющих вдоль топливной системы

нения Бернулли для участка II—III

$$H_{II} = H_{III} + \frac{1}{g} I_{\text{тех}} = H_{III} - \frac{1}{g} I_7;$$

$$I_7 = g(H_{III} - H_{II}) = 9,81(675 - 17,66) = 6450 \text{ Дж/кг.}$$

6. Мощность, затрачиваемая двигателем на привод насоса—регулятора

$$N = \frac{I_7 G}{\eta_7} = \frac{6450 \cdot 0,28}{0,7} = 2570 \text{ Вт} = 2,57 \text{ кВт.}$$

7. Площадь  $S_\phi$  и диаметр  $d_\phi$  сопла форсунки определяется по уравнению расхода

$$G = u_{IV} S_{IV} \rho_n = u_{IV} S_\phi \epsilon_n \rho_n,$$

$$S_\phi = \frac{G}{u_{IV} \epsilon_n \rho_n} = \frac{0,28}{100 \cdot 0,66 \cdot 820 \cdot 5} = 1,04 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$d_\phi = \sqrt{\frac{4S_\phi}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,04 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 1,15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Полный напор на участке 0—I увеличивается за счет работы подкачивающего насоса, а на участке I—II уменьшается, расходуясь на преодоление гидравлических сопротивлений. Увеличение полного напора на участке II—III соответствует работе, сообщаемой керосину в насос—регуляторе. На участке III—IV полный напор уменьшается на величину гидравлических потерь в сопле форсунки, энергия давления  $p/\rho g$  уменьшается, расходуясь в незначительной степени на преодоление гидравлического сопротивления сопла форсунки, а, в основном, превращаясь в кинетическую энергию керосина (скорость увеличивается от 3 до 100 м/с).

5. Работа  $I_7$ , сообщаемая керосину в насосе 7, определяется из урав-

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

---

Основными уравнениями газодинамики элементарной струйки при установившихся течениях совершенного газа являются уравнения состояния (1.1), неразрывности (3.21), количества движения (4.12) и (4.15), моментов количества движения (4.27), энергии (4.79), Бернулли (4.82) и второго закона термодинамики (4.97). Часть этих уравнений преобразуется в форму, удобную для газодинамических исследований и расчетов.

Ниже под внешней работой  $l$  будем понимать только техническую работу  $l_{\text{тех}} = l_{\text{турбины}} > 0$ ,  $l_{\text{тех}} = l_{\text{компр}} < 0$ .

В общем случае течение газов сопровождается изменением параметров состояния  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ , т. е. термодинамическими процессами. Классификация течений, основанная на уравнениях энергии и второго закона термодинамики.

I. Адиабатные течения — течения без теплообмена между газом и внешней средой  $dq = 0$ ;

а) идеальные адиабатные или изоэнтропные (обратимые)

$$dq = 0; dl_{\text{тех}} \geq 0; dl_{\text{тр}} = dq_{\text{тр}} = 0; ds = \frac{dq + dq_{\text{тр}}}{T} = 0. \quad (11.1)$$

Изменение параметров в этих течениях определяется из уравнения изоэнтропы

$$p = \rho^k \cdot c; \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad (11.1a)$$

б) адиабатные с потерями (необратимые)

$$dq = 0; dl_{\text{тех}} \geq 0; dl_{\text{тр}} = dq_{\text{тр}} > 0; ds > 0; \quad (11.1б)$$

в) энергетически изолированные изоэнтропные (идеальные адиабатные)

$$dq = 0; dl_{\text{тех}} = 0; dl_{\text{тр}} = dq_{\text{тр}} = 0; ds = 0. \quad (11.1в)$$

Изменение параметров определяется уравнением (11.1а);

г) энергетически изолированные с потерями (адиабатные необратимые)

$$dq = 0; dl_{\text{тех}} = 0; dl_{\text{тр}} = dq_{\text{тр}} > 0; ds > 0. \quad (11.1г)$$

II. Политропные течения при различных условиях

$$dq \geq 0; dl_{\text{тех}} \geq 0; dl_{\text{тр}} = dq_{\text{тр}} \geq 0; ds \geq 0. \quad (11.2)$$

## 11.1. УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ТЕПЛОВОЙ ФОРМЕ ИЛИ УРАВНЕНИЕ ЭНТАЛЬПИИ.

### ПАРАМЕТРЫ ЗАТОРМОЖЕННОГО ПОТОКА.

### ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ $\tau(\lambda)$ , $\pi(\lambda)$ , $\varepsilon(\lambda)$

Запишем, с небольшой перестановкой членов, интегральное уравнение энергии (4.79) для произвольного участка 1—2 элементарной струйки газа

$$q - l_{\text{тех}} = \left( u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{W_2^2}{2} \right) - \left( u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{W_1^2}{2} \right) + g(z_2 - z_1). \quad (11.3)$$

В расчетах газовых течений в лопаточных машинах, реактивных двигателях, испытательных установках и т. д. членом  $g(z_2 - z_1)$  пренебрегают, как относительно малым. Следовательно, величина  $\left( u + \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} \right)$  будет представлять полную энергию газа. Члены  $u + p/\rho$  всегда встречаются вместе, поэтому их объединяют и, как известно, называют энтальпией (теплосодержанием)  $i$ . Энтальпия является удельной потенциальной энергией газа и, с помощью формул (1.1), (1.2), (1.29) может быть представлена следующим образом

$$i = u + \frac{p}{\rho} = C_v T + RT = C_p T = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT = \frac{a^2}{\kappa - 1}. \quad (11.4)$$

Тогда уравнение энергии примет вид:

$$q - l_{\text{тех}} = i_2 - i_1 + \frac{W_2^2}{2} - \frac{W_1^2}{2} = \left( i_2 + \frac{W_2^2}{2} \right) - \left( i_1 + \frac{W_1^2}{2} \right). \quad (11.5)$$

Величина

$$i^* = i + \frac{W^2}{2} \quad (11.6)$$

является *полной удельной энергией газа* в данном сечении элементарной струйки и называется *полной энтальпией (энтальпией заторможенного потока)*. Полная энергия (энтальпия) состоит из *потенциальной*  $\left( i = u + \frac{p}{\rho} \right)$  и *кинетической*  $(W^2/2)$  энергий газа.

Полной энтальпии соответствует *полная температура*, которая также называется *температурой торможения*

$$T^* = \frac{i^*}{C_p} = T + \frac{W^2}{2C_p}. \quad (11.7)$$

В (11.7) все три параметра  $T^*$ ,  $T$  и  $W$  относятся к одному и тому же сечению струйки. С учетом (11.6) и (11.7) уравнение энтальпии\* (11.5) примет вид, Дж/кг:

$$q - l_{\text{тех}} = i_2^* - i_1^* = C_p (T_2^* - T_1^*). \quad (11.8)$$

\* В некоторых учебниках уравнения типа (11.5), (11.8) называются уравнениями теплосодержания.

Из (11.7) и (11.8) следует, что при  $C_p = \text{const}$  температура торможения, так же как и полная энтальпия, выражает полную энергию газа, но в масштабе  $C_p$ .

Дифференциальное уравнение энергии и. Уменьшим расстояние между сечениями 1 ... 2 элементарной струйки до бесконечно малой величины  $dz$ , в пределе, получим дифференциальное уравнение энтальпии

$$dq - dl_{\text{тех}} = di^* = C_p dT^*, \quad (11.9)$$

где  $dq$  и  $dl_{\text{тех}}$  — элементарное тепло и элементарная техническая работа на произвольном участке струйки  $dZ$ ;  $di^*$ ,  $dT^*$  — элементарные изменения полного теплосодержания и полной температуры.

Уравнения энтальпии (11.5), (11.8) и (11.9) являются важнейшими, так как лежат в основе решения подавляющего большинства задач. Физический смысл этих уравнений — закон сохранения и превращения энергии — изменение полной энергии газа ( $i_2^* - i_1^*$ ) или  $C_p(T_2^* - T_1^*)$  равно энергии, которой газ обменивается с внешней средой на участке 1—2. Уравнение (11.8) дает однозначный ответ об изменении важнейшего параметра  $T^*$  в любом течении. Уравнение энтальпии не содержит теплоты трения. Однако оно справедливо, как для идеальных процессов ( $l_{\text{тр}} = q_{\text{тр}} = 0$ ), так и для реальных ( $l_{\text{тр}} = q_{\text{тр}} > 0$ ). Это объясняется тем, что энергия газа, расходуемая на преодоление любых сопротивлений, полностью превращается в тепло, воспринимаемое тем же газом. Поэтому преодоление сопротивлений не может изменить полной энергии газа, а лишь вызывает необратимое превращение кинетической энергии в потенциальную. Это приводит к тому, что течения с потерями и без них при одинаковых начальных условиях развиваются различным образом. Однако для определения этой разницы одного уравнения энтальпии недостаточно: необходимо дополнительно использовать уравнение Бернулли и независимое определение гидравлических сопротивлений.

**Задача 11.1.** Определить изменение температуры торможения воздуха  $\Delta T^* = T_2^* - T_1^*$  для условий: 1)  $q = 10^6$  Дж/кг; 2)  $l_{\text{турб}} = 10^4$  Дж/кг; 3)  $q = -10^6$ ; 4)  $l_{\text{компр}} = -10^4$  Дж/кг; 5)  $q = 0$ ,  $l_{\text{тех}} = 0$ ,  $l_{\text{тр}} = 10^3$  Дж/кг;  $C_p = 1095$  Дж/(кг · К).

**Задача 11.2.** Определить полную энергию и температуру торможения воздуха в сечениях 1 и 2 элементарной струйки, если  $l_{\text{тех}(1-2)} = 0$ ,  $q_{(1-2)} = 10^5$  Дж/кг,  $W_1 = 200$  м/с,  $T_1 = 300$  К,  $W_2 = 600$  м/с,  $k = 1,4$ ,  $C_p = 1095$  Дж/(кг · К).

Ответ:  $T_1^* = 520$  К,  $i_1^* = 5,2 \cdot 10^5$ ,  $i_2^* = 6,2 \cdot 10^5$  Дж/кг,  $T_2^* = 620$  К.

**Задача 11.3.** Определить температуру торможения  $T_c$  на выходе газов из сопла ТРДФ (см. рис. 0.1). Самолет летит на высоте  $H = 25$  км, число Маха  $M = 2,5$ ,  $l_{\text{компр}} = 6 \cdot 10^4$  Дж/кг,  $q_T = 7,05 \cdot 10^5$  Дж/кг,  $l_{\text{турб}} = 6,05 \cdot 10^4$  Дж/кг,  $q_{\text{тф}} = 10^6$  Дж/кг. Нарисовать график изменения полной энергии газа ( $i^*$ ) по тракту двигателя. Ответ: при  $k = 1,4$  и  $C_p = 1000$  Дж/кг —  $T_c^* = 2190$  К.

Энергетически изолированные течения. Подставляя в уравнения энтальпии (11.9) и (11.8) условия энергетической изолированности  $dq = 0$  и  $dl_{\text{тех}} = 0$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} di^* &= 0; \quad i_2^* - i_1^* = i^* = \text{const}; \\ dT^* &= 0; \quad T_2^* - T_1^* = T^* = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

Учитывая, что сечения 1 и 2 канала выбраны произвольно, заключаем, что в энергетически изолированных течениях полная энергия газа, т. е. энтальпия торможения  $i^*$  и температура торможения  $T^*$  сохраняют постоянное значение независимо от величины потерь.

Это положение является важнейшим при исследовании энергетически изолированных течений.

Подставив значения  $i^* = i + \frac{W^2}{2}$  и  $T^* = T + \frac{W^2}{2C_p}$  в уравнение (11.10), получим

$$\left. \begin{aligned} i_2 + \frac{W_2^2}{2} = i_1 + \frac{W_1^2}{2}; \quad i_1 - i_2 = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2}; \quad -dt = d \frac{W^2}{2}; \\ T_2 + \frac{W_2^2}{2C_p} = T_1 + \frac{W_1^2}{2C_p}; \quad T_1 - T_2 = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2C_p}; \quad -dT = d \frac{W^2}{2C_p}. \end{aligned} \right\} (11.11)$$

Из анализа полученных уравнений следует, что ускорение энергетически изолированного потока происходит за счет уменьшения энтальпии газа или его температуры. Это ускорение сопровождается уменьшением давления и плотности, т. е. расширением газа. Разность давлений при ускорении энергетически изолированного потока является единственным источником ускоряющей газ силы  $R = G(W_2 - W_1)$  и силы для совершения работы по преодолению сопротивлений. Уменьшение давления при ускорении энергетически изолированного потока можно проследить и по уравнению Бернулли, которое для рассматриваемого случая принимает вид

$$-\frac{dp}{\rho} = d \frac{W^2}{2} + dl_{тр.}$$

Наоборот, торможение энергетически изолированного потока всегда сопровождается увеличением энтальпии, температуры, давления и плотности, т. е. сжатием газа.

Энтальпия торможения  $i^*$  и температура торможения  $T_n^*$  невозмущенного потока это энтальпия и температура, которые принимает газ при его полном энергетически изолированном торможении. Эти энтальпия и температура называются также полными.

Если  $W_n > 0$ , то  $i_n^* = (i_n + W_n^2/2) > i_n$  и  $T_n^* = \left(T_n + \frac{W_n^2}{2C_p}\right) > T_n$ .  
Если  $W = 0$ , то  $i = i^*$  и  $T = T^*$ .

Механизмы превращения кинетической энергии в энтальпию в энергетически изолированных потоках могут быть следующими:

1) изэнтропное сжатие газа за счет кинетической энергии при его торможении, сопровождающееся увеличением  $T$ ,  $p$ ,  $\rho$  (обратный процесс  $ds=0$ , мыслимый только для газа);

2) затрата кинетической энергии только на преодоление сопротивления. Этот процесс наблюдается на теплоизолированной плас-

тинке в пограничном слое: в этом случае скорость газа у стенки  $W_w=0$ , а температура может достигнуть значения  $T^*$  невозмущенного набегающего потока. При этом давление газа сохраняется неизменным. Такое торможение газа является необратимым, сопровождается увеличением энтропии  $ds = \frac{dq_{тр}}{T} > 0$  и называется диссипацией или рассеиванием кинетической энергии. Рассматриваемое превращение возможно как в газовых потоках, так и в потоках несжимаемой жидкости;

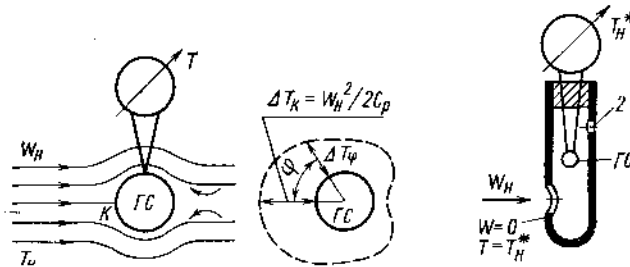


Рис. 11.1. Измерение температуры торможения в газовом потоке

3) политропное сжатие газа при его торможении, сопровождающееся преодолением сопротивлений, в результате чего возрастает энтропия и энтальпия, а давление и плотность повышаются меньше, чем при адиабатном сжатии. Такой механизм возможен только для газов.

Измерение температуры газа в потоке. Аэродинамический нагрев тел.

Рассмотрим, какую температуру примет горячий спай термомпары ГС, помещенный в газовом потоке, имеющем скорость  $W_n$ , температуру  $T_n$  и  $T_n^* = T_n + \frac{W_n^2}{2C_p}$  (рис. 11.1). Газ, текущий в центральной струйке, при подходе к критической точке К, изоэнтропно затормаживается ( $W_k=0$ ). Вся кинетическая энергия газа переходит в энтальпию, которая достигает значения полной энтальпии невозмущенного потока  $i_k = i_n^*$ , а температура — температуры торможения  $T_k = T_n^*$ , если тело является адиабатным, т. е. не участвующим в теплообмене. Итак

$$W_k = 0 \text{ и } T_k = T_n^* = T_n + \frac{W_n^2}{2C_p}. \quad (11.12)$$

Динамический добавок температуры в критической точке имеет максимальное значение  $\Delta T = W_{n2}^2 / 2C_p$  (см. рис. 11.1).

Во всех остальных точках поверхности ГС скорость газа будет также равна нулю, но уже не за счет адиабатного сжатия, а за счет трения. В этом случае также вся кинетическая энергия превратится в тепло и воспримется газом. Если бы теплообмен между заторможенным на поверхности газом и близтекущими слоями от-

существовал, то в любой точке поверхности газ имел бы температуру торможения невозмущенного потока. Однако опыты показывают, что между заторможенным на поверхности газом и близлежащими слоями возникает теплообмен, в результате которого температура газа на стенке  $T_w$  оказывается меньше  $T_n^*$ , но больше  $T_n$  ( $T_n < T_w < T_n^*$ ), и динамический добавок температуры снижастся (см. рис. 11.1). Это снижение температуры зависит от интенсивности теплообмена, который определяется свойствами жидкости и режимом течения ее около поверхности тела (п. 15.5).

Кроме того, горячий спай будет отдавать тепло окружающей среде излучением с поверхности и теплопроводностью по проводам, стойкам и т. д. и температура его может принимать неопределенную величину.

На рис. 11.1 показана схема *экранированной термопары с прососом газа*, обеспечивающей измерение температуры, близкой к температуре торможения невозмущенного потока  $T_n^*$ . Горячий спай термопары помещается в камеру торможения. Газ набегающего потока перед отверстием энергетически изолированно затормаживается до  $W \simeq 0$ . В результате адиабатного сжатия температура газа повышается до температуры торможения набегающего потока. Следовательно, горячий спай окружен неподвижным газом, температура которого равна  $T_n^*$ . Потери тепла излучением снижаются за счет уменьшения диаметра шарика горячего спая и экранирования его корпусом камеры торможения, имеющей температуру достаточно близкую к температуре торможения. Для уменьшения потерь тепла за счет теплопроводности электродов термопары они делаются малого диаметра. Для уменьшения «инерционности» термопары делается небольшое вентиляционное отверстие 2 ( $d_2 \ll d_1$ ), которое обеспечивает непрерывную смену газа около горячего спая при почти полном его торможении.

Из сказанного следует, что измерение термодинамической температуры газа в потоке неподвижным термометром принципиально невозможно.

В дальнейшем изложении будем полагать, что термопара, помещенная в газовый поток, измеряет его температуру торможения.

Аэродинамическим нагревом называется нагрев до  $T > T_n$  при движении тел в газах, вызванный адиабатным сжатием в области критических точек и трением на поверхности. В связи с тем, что этот нагрев может достигать очень больших величин, в технике вводится понятие тепловой барьер. Тепловой барьер не имеет конкретных предслов, но свидетельствует, что для полетов в атмосфере с большими скоростями необходимо применять жаростойкие материалы и организовывать охлаждение и тепловую защиту летательных аппаратов.

**Задача 11.4.** Адиабатное тело движется в воздухе, имеющем температуру  $T_n = 300$  К, со скоростями  $M_n = 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2; 5; 10; 23; 32$ . Рассчитать динамический добавок к температуре и построить графики  $\Delta T = f(M)$  в предположении, что свойства воздуха при нагреве не изменяются. Объясните, что предпринимать для того, чтобы искусственный спутник земли ( $M = 23$ ,  $W = 8000$  м/с) не сгорал при входе в плотные слои атмосферы?



Преобразование полной энтальпии в кинетическую энергию потока. Для энергетически изолированного перевода газа из состояния покоя ( $W=0$ ;  $i^*$ ;  $T^*$ ) в состояние движения с параметрами  $W$ ,  $i$ ,  $T$  необходимо израсходовать часть полной энтальпии в соответствии с уравнением (11.6)

$$i^* - i = W^2/2. \quad (11.13)$$

Отсюда получаем формулу для расчета скорости течения газа в точке любого потока по значениям  $i$  и  $i^*$  в этой точке

$$W = \sqrt{2(i^* - i)} = \sqrt{2C_p(T^* - T)} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R(T^* - T)}. \quad (11.14)$$

Максимальная скорость истечения ( $W_{\max}$ ). При энергетически изолированном течении скорость  $W_{\max}$  будет получена тогда, когда полная энтальпия целиком будет превращена в кинетическую энергию, т. е. когда газ расширится до абсолютного вакуума —  $T=0$ ,  $p=0$  и  $\rho=0$ :

$$W_{\max} = \sqrt{2i^*} = \sqrt{2C_p T^*} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R T^*}. \quad (11.15)$$

Безразмерная скорость — отношение скорости потока к максимальной скорости

$$\Lambda = W/W_{\max} \quad (11.16)$$

является, как и число  $M$ , критерием подобия газовых потоков.

Критическая скорость потока. Критическая скорость звука. Критические параметры. Критической называется скорость потока, равная местной скорости звука. При критическом (звуковом) течении все параметры потока называются критическими и отмечаются индексом  $кр$ :  $W_{кр} = a_{кр}$ ;  $M = W_{кр}/a_{кр} = 1$ ;  $i_{кр}$ ,  $T_{кр}$ ;  $\rho_{кр}$ ;  $Q_{кр}$ .

Критическая скорость устанавливается при израсходовании на ускорение газа лишь определенной части полного теплосодержания в соответствии с (1.29) и (11.14):

$$W_{кр} = a_{кр} = \sqrt{\kappa R T_{кр}} = \sqrt{2(i^* - i_{кр})} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R(T^* - T_{кр})}. \quad (11.17)$$

Из формулы (11.17) найдем критическую температуру

$$T_{кр} = \frac{2}{\kappa + 1} T^* \quad (11.18)$$

и критическую скорость звука

$$W_{кр} = a_{кр} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa + 1} R T^*}, \quad (11.19)$$

т. е. величина критической скорости звука в данном газе определяется только его температурой торможения.

Приведенная скорость — отношение скорости потока (полета) к критической скорости звука, рассчитанной по (11.19):

$$\lambda = W/a_{кр} \quad (11.20)$$

является, как и число  $M$ , важнейшим критерием подобия газовых потоков и широко используется.

**Задача 11.5.** Используя формулы (11.6), (11.7), (11.15) и (11.19), получите следующие выражения полной энтальпии

$$i^* = C_p T^* = i + W^2/2 = \frac{W_{\max}^2}{2} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{a_{кр}^2}{2} = \frac{(a^*)^2}{\kappa - 1}, \quad (11.21)$$

где  $a^* = \sqrt{\kappa R T^*}$  — скорость звука в заторможенном потоке газа.

Физический смысл чисел  $M$ ,  $\lambda$  и  $\Lambda$ . Разделим выражение (11.13) последовательно на  $i = \frac{a^2}{\kappa - 1}$  (11.14), на  $i^* = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{a_{кр}^2}{2}$  (11.21) и на  $W_{\max}^2$ , получим

$$\frac{i^* - i}{i} = \frac{T^* - T}{T} = \frac{W^2}{2i} = \frac{\kappa - 1}{2} M^2, \quad (11.22)$$

$$\frac{i^* - i}{i^*} = \frac{T^* - T}{T^*} = \frac{W^2}{2i^*} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2; \quad (11.23)$$

$$\frac{i^* - i}{W_{\max}^2} = \frac{W^2}{2W_{\max}^2} = \frac{1}{2} \Lambda. \quad (11.24)$$

Из рассмотрения формул (11.22) ... (11.24) следует, что числа  $M$ ,  $\lambda$  и  $\Lambda$  характеризуют степень преобразования полной энтальпии газа в его кинетическую энергию в данной точке любого потока, т. е. имеют одинаковый физический смысл. Поэтому, между  $M$ ,  $\lambda$  и  $\Lambda$  существует однозначная связь и задание одного из них определяет два других.

**Задача 11.6.** Докажите, что между  $M$ ,  $\lambda$  и  $\Lambda$  существует следующая связь

$$M^2 = \frac{\frac{2}{\kappa + 1} \lambda^2}{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2}; \quad \lambda^2 = \frac{\frac{\kappa + 1}{2} M^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \Lambda^2. \quad (11.25)$$

**Задача 11.7.** Для энергетически изолированного течения газов, имеющих  $\kappa = 1,4$  и  $1,25$ , определить значения  $M$ ,  $\lambda$ ,  $\Lambda$  и  $\frac{i^* - i}{i^*}$  для характерных скоростей потока —  $0$ ,  $a_{кр}$ ,  $W_{\max}$ .  
 Ответ: см. табл. 11.1.

**Задача 11.8.** Постройте графики  $\lambda = f(M)$  и  $\Lambda = f(M)$ . Определите области  $\lambda > M$  и  $\lambda < M$ .

Энергетически изолированные изоэнтропные течения. Для этих течений, удовлетворяющих условиям (11.1в), уравнения энтальпии (11.8) и Бернулли (4.52) и (4.79) записываются одинаково

W	κ=1,4				κ=1,25			
	M=λ=0	λ=W/a <sub>кр</sub>	Δ=W/W <sub>max</sub>	$\frac{i^*-i}{i^*}=1-\tau(\lambda)$	M	λ	Δ	$\frac{i^*-i}{i^*}=1-\tau(\lambda)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a <sub>кр</sub>	1	1	$\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}}=0,402$	0,17	1	1	0,333	0,14
W <sub>max</sub>	∞	$\sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}=2,45$	1	1	∞	3	1	1

$$\left. \begin{aligned}
 i_2^* &= i_1^* = i_2 + \frac{W_2^2}{2} = i_1 + \frac{W^2}{2} = \text{const} = \frac{W_{\text{max}}^2}{2}; \\
 - \int_1^2 \frac{dp}{\rho} &= i_1 - i_2 = C_p(T_1 - T_2) = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] = \\
 &= \frac{W_2^2 - W_1^2}{2}
 \end{aligned} \right\} (11.26)$$

и свидетельствуют о том, что ускорение газа сопровождается его изэнтропным расширением, торможение — изэнтропным сжатием за счет кинетической энергии газа. При полном энергетически изолированном и изэнтропном торможении до  $W=0$ ,  $M=0$ ,  $\lambda=0$  все параметры принимают значения параметров торможения  $i^*$ ,  $T^*$ ,  $p^*$ ,  $q^*$ .

Полное давление или давление торможения  $p_n^*$  и плотность заторможенного газа  $q_n^*$  в невозмущенном потоке это давление и плотность, которые принимает газ в случае его полного энергетически изолированного и изэнтропного (без потерь) торможения.

Изменение параметров газового потока от заданного состояния ( $W$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $q$ ) до параметров торможения ( $W=0$ ,  $T^*$ ,  $p^*$ ,  $q^*$ ) и обратно рассчитывается по уравнению изэнтропы (11.1а)

$$p/p^* = (T/T^*)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad q/q^* = (T/T^*)^{\frac{1}{\kappa-1}}. \quad (11.27)$$

Газодинамические функции — это безразмерные функции приведенной скорости  $\lambda$  (или  $M$  и  $\Delta$ ), представляющие отношения параметров, комплексов параметров, размеров потока, часто встречающихся в газодинамических уравнениях. Газодинамические функции, в зависимости от величины  $\lambda$  и для различных  $\kappa = C_p/C_v$  вычислены и сведены в графики и таблицы (см. приложения II—V). Применение газодинамических функций существенно сокращает вычислительную работу, упрощает теоретические выкладки и позволяет более четко и наглядно выявить физические закономерности изучаемых явлений. Поэтому газодинамические функции находят самое широкое применение в газовой динамике, теории лопаточных машин и реактивных двигателей.

Рассмотрим первую группу наиболее употребительных функций.

Газодинамические функции основных параметров газового потока  $\tau(\lambda) = T/T^*$ ,  $\pi(\lambda) = p/p^*$ ,  $\varepsilon(\lambda) = \rho/\rho^*$  определяются из (11.23) с учетом (11.27):

$$\tau(\lambda) = \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2; \quad (11.28)$$

$$\pi(\lambda) = \frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}; \quad (11.29)$$

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}. \quad (11.30)$$

Обратные отношения параметров можно получить из (11.22) и (11.27) в зависимости от числа  $M$

$$\tau(M) = \frac{T^*}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 = \frac{1}{\tau(\lambda)}; \quad (11.31)$$

$$\pi(M) = p^*/p = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \frac{1}{\pi(\lambda)}; \quad (11.32)$$

$$\varepsilon(M) = \frac{\rho^*}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = \frac{1}{\varepsilon(\lambda)}. \quad (11.33)$$

Связь между  $\tau(\lambda)$ ,  $\pi(\lambda)$ ,  $\varepsilon(\lambda)$  установим, поделив уравнение состояния для термодинамических параметров  $p = \rho RT$  на уравнение состояния для параметров торможения  $p^* = \rho^* RT^*$ :

$$\pi(\lambda) = \varepsilon(\lambda) \tau(\lambda). \quad (11.34)$$

Газодинамические функции (11.28) ... (11.33) широко используются для быстрого определения параметров в одной и той же точке любого газодинамического потока. Например, для заданной точки  $I$  следует записать  $\pi(\lambda_1) = \frac{p_1}{p_1^*} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$ , так как переход к параметрам торможения в данной точке, по определению, происходит по изоэнтропе.

Для элементарной струйки эти формулы справедливы для одного и того же сечения. В энергетически изолированном и изоэнтропном потоке все параметры торможения сохраняют неизменное значение, поэтому для любой точки  $A$  можно, например, написать

$$\pi(\lambda_A) = \frac{p_A}{p^*} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda_A^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Подчеркнем, что давление торможения в газовых потоках можно рассчитывать только по формулам (11.29) и (11.32), т. е.

$$p^* = \frac{p}{\pi(\lambda)}. \quad \text{Формула } p^* = p + \frac{\rho W^2}{2} \quad (4.58) \text{ и все из нее следующие}$$

применимы только для несжимаемой жидкости.

**Задача 11.9.** 1. Сформулируйте, что такое  $T^*$ ,  $p^*$ ,  $\rho^*$ . Подчеркните разницу в определениях. 2. Начертите графики  $\tau(\lambda)$ ,  $\pi(\lambda)$ ,  $\epsilon(\lambda)$  для  $k=1,4$  и определите критические значения этих величины (при  $\lambda=1$ ).

**Задача 11.10.** Самолет летит с  $M_H=3$  на высоте  $H=25$  км. Обратив движение, определить с помощью формул и таблиц газодинамических функций параметры невозмущенного потока воздуха

$$p_H, \rho_H^*, T_H, T_H^*, Q_H, Q_H^*, W_H, a_{кр}, \lambda_H.$$

Изображение в  $pv$ ,  $Ts$  и  $is$  координатах термодинамических процессов, сопровождающих течения газов. Состояние текущего газа с параметрами  $T_1, p_1, q_1, W_1$  изо-

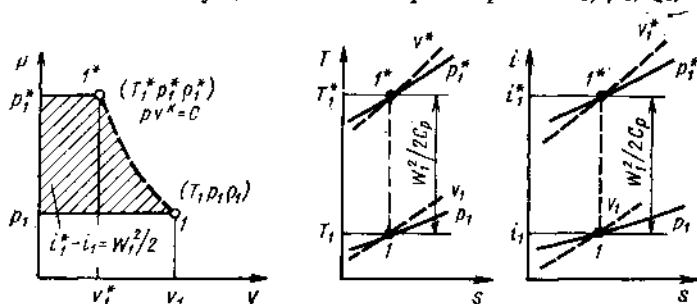


Рис. 11.2. Изображение состояния движущегося газа в координатах  $pv$ ,  $Ts$ ,  $is$

бражается в координатах  $pv$ ,  $Ts$  и  $is$  не одной точкой, а двумя ( $T_1, p_1, q_1$ ) и ( $T_1^*, p_1, q_1^*$ ). Положение точки ( $T_1, p_1, q_1$ ) определяется пересечением любых двух из четырех линий: изотермы  $T_1 = \text{const}$ , изобары  $p_1 = \text{const}$ , изохоры  $q_1 = \text{const}$  и изоэнтропы  $s_1 = \text{const}$ . Точка ( $T_1^*, p_1^*, q_1^*$ ) лежит на пересечении изоэнтропы сжатия  $s_1 = \text{const}$ , проходящей через точку ( $T_1, p_1, q_1$ ), с любой из линий  $T_1^* = \text{const}$  ( $i_1^* = \text{const}$ );  $p_1^* = \text{const}$ ;  $q_1^* = \text{const}$  (рис. 11.2).

Таким образом, для определения всех параметров потока заданного газа ( $k, R$ ) необходимо знать три параметра, например  $p, T$  и  $p^*$  или  $q, T$  и  $T^*$ , или  $q, T^*$  и  $p^*$  и т. д. Изображение термодинамических процессов, происходящих в движущемся газе, выполняется с помощью уравнений энтальпии, Бернулли и второго закона термодинамики.

## 11.2. ИЗМЕНЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ТОРМОЖЕНИЯ В ПОТОКАХ

Вторым, после температуры торможения, важнейшим параметром является давление торможения, объединяющее в себе статическое давление в потоке и основной критерий газовых течений  $\lambda (M, \Lambda)$ . Методика измерения давлений статического и торможения в газовых дозвуковых течениях ничем не отличается от описанной для несжимаемой жидкости (см. п. 4.8 и 9.4)\*. Измеренные  $p$

\* Определение давления торможения в сверхзвуковом потоке, см. п. 12.3.

и  $p^*$  служат для определения скорости течения газа. Методика определения скорости газа коренным образом отличается от методики определения скорости несжимаемой жидкости

Скорость газа в подавляющем большинстве случаев рассчитывается по эквивалентным формулам

$$W = a_{кр} \lambda; W = aM; W = W_{\max} \Lambda. \quad (11.35)$$

Приведенная скорость  $\lambda$  обычно определяется из (11.29) или из таблиц или графика  $\pi(\lambda) = p/p^*$ . Критическая скорость звука определяется из (11.19), для

чего необходимо измерить температуру торможения в точке измерения  $p$  и  $p^*$ .

Располагаемая энергия или адиабатный теплоперепад. Располагаемой энергией или адиабатным теплоперепадом  $h = i^* - i_a$  называется часть полной энергии килограмма газа, которая может быть

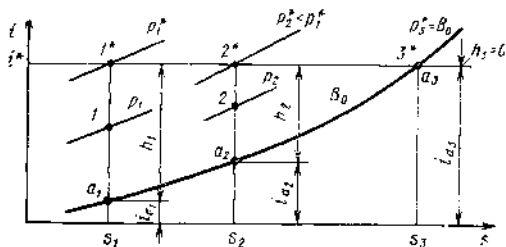


Рис. 11.3. Определение адиабатного теплоперепада

превращена в механическую работу или кинетическую энергию газа в процессе изэнтропного расширения от заторможенного состояния  $i^*(T^*)$ ,  $p^*$ ,  $q^*$  до минимального давления в системе  $B_0$  (рис. 11.3). Например, для ТРДФ (см. рис. 0.1)  $B_0$  равно давлению окружающей атмосферы. Оставшаяся часть полной энергии, равная  $i_a$ , имеет другое качество — она в заданных условиях не может быть превращена изэнтропным путем в другие виды энергии.

Величина адиабатного теплоперепада зависит от величины параметров торможения  $i^*(T^*)$  и  $p^*$  и от величины минимального давления  $B_0$ . При постоянных  $i^*$  и  $B_0$  адиабатный теплоперепад уменьшается при увеличении энтропии, или, что то же самое, при уменьшении давления торможения ( $s_2 > s_1$ ;  $p_2^* < p_1^*$  и  $h_2 < h_1$ ). При  $p^* = B_0$  адиабатный теплоперепад равен нулю. Следовательно, в энергетически изолированных течениях ( $i^* = \text{const}$ ) гидравлические сопротивления приводят к увеличению энтропии, снижению полного давления и уменьшению адиабатного теплоперепада, т. е.  $i^* = \text{const}$ ;  $dq_{тр} > 0$ ;  $ds > 0$ ;  $dp^* < 0$  и  $dh < 0$ .

Изменение полного давления вдоль оси производного потока. Для решения большинства газодинамических задач необходимо знать, как изменяются параметры заторможенного потока вдоль его оси. Изменение температуры торможения, как уже указывалось, определяется по уравнению тепло-

$$T_2^* - T_1^* = \frac{q - l_{тех}}{C_p}$$

Коэффициент сохранения полного давления

$$\sigma = p_2^*/p_1^* \quad (11.36)$$

вводится для определения изменения давления торможения на участке 1—2 произвольной элементарной струйки.

Переход от  $T_1, p_1$  к  $T_1^*$  и  $p_1^*$  и от  $T_2, p_2$  к  $T_2^*$  и  $p_2^*$  является изоэнтропным. Это позволяет заменить в формуле изменения энтропии (4.98) параметры  $T_1, p_1, T_2, p_2$  на параметры торможения  $T_1^*, p_1^*, T_2^*, p_2^*$ , т. е.

$$s_2 - s_1 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R \ln \frac{T_2^*}{T_1^*} - R \ln \frac{p_2^*}{p_1^*}. \quad (11.37)$$

Потенцируя (11.37), получим формулу, определяющую изменение давления торможения

$$\sigma = p_2^*/p_1^* = e^{-\left(\frac{s_2 - s_1}{R} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \ln \frac{T_1^*}{T_2^*}\right)}, \quad (11.38)$$

где  $e \approx 2,72$  — основание натурального логарифма.

*Изменение давления торможения зависит только от изменения энтропии и температуры торможения на рассматриваемом участке элементарной струйки. Увеличение энтропии всегда способствует уменьшению давления торможения, а увеличение температуры торможения — его увеличению.*

Коэффициент сохранения полного давления канала  $0-n \sigma_{оп} = \frac{P_n^*}{P_0^*}$ , состоящего из  $n$  последовательно соединенных сопротивлений, равен произведению коэффициентов сохранения полных давлений этих сопротивлений

$$\sigma_{оп} = p_n^*/p_0^* = p_1^*/p_0^* \cdot p_2^*/p_1^* \cdot p_3^*/p_2^* \dots \frac{p_{n-1}^*}{p_{n-2}^*} \cdot \frac{p_n^*}{p_{n-1}^*} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_{n-1} \sigma_n. \quad (11.39)$$

**Задача 11.11.** Определите характер изменения давления торможения при работе идеальных (изоэнтропных) компрессора и турбины.

Изменение параметров торможения и адиабатного теплоперепада в энергетически изолированных течениях. В этих течениях  $T_2^* T_1$  и, соответствии с (11.38) и  $p^* = Q^* R T^*$ , изменение  $p^*$  и  $Q^*$  определяется только изменением энтропии

$$\sigma = p_2^*/p_1^* = Q_2^*/Q_1^* = e^{-\left(\frac{s_2 - s_1}{R}\right)}. \quad (11.40)$$

В энергетически изолированных течениях возможны только два случая изменения  $p^*$  и  $Q^*$  (рис. 11.4):

1) в изоэнтропных течениях  $ds = \frac{dq + dq_{тп}}{T} = 0$ ,  $\sigma = 1$  и все параметры торможения и их функции, т. е.  $i^*, T^*, p^*, Q^*, a_{кр}, W_{max}$ , сохраняют неизменное значение. На рис. 11.4 эти процессы изображены пунктиром. Процессы изоэнтропного ускорения (расширения) газа  $1^*—2a$  и торможения (сжатия)  $2a—1^*$  являются обратимыми. При любом числе их повторений адиабатный теплоперепад  $h_1$  сохраняет неизменную величину;

2) в течениях с потерями  $ds = (dq_{тр}/T) > 0$  и, в соответствии с (11.40), давление и плотность заторможенного газа уменьшаются и  $\sigma < 1$ .

На рис. 11.4 энергетически изолированные реальные (с потерями) процессы ускорения (расширения) изображены сплошными

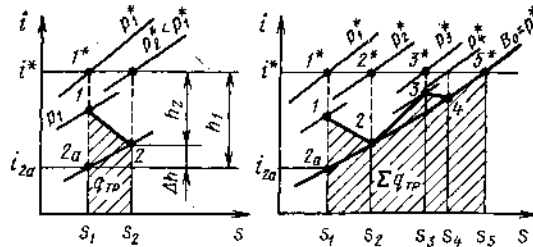


Рис. 11.4. Изменение давления торможения и адиабатного теплоперепада в энергетически изолированных течениях

линиями 1—2 и 3—4, а торможения (сжатия) — линиями 2—3 и 4—5\*. Как те, так и другие процессы протекают с увеличением энтропии, уменьшением давления торможения и снижением адиабатного теплоперепада. Если эти процессы многократно повторять, то весь адиабатный теплоперепад полностью израсходуется на преодоление сопротивлений. На рис. 11.4 показано, что в точке 5\*, где  $p_5^* = B_0$ ,  $W_5 = 0$  и  $h_5 = 0$ . Полная энергия в этих энергетически изолированных процессах не изменится —  $i_5^* = i_1^*$ , но весь начальный адиабатный теплоперепад  $h_1$  перейдет на нижний уровень, т. е. диссипирует. При заданном  $B_0$  этот газ уже нельзя будет изоэнтропно но ни ускорить, ни получить от него работу в турбине.

**Задача 11.12.** Докажите, что площадь под процессом 1—2 (см. рис. 11.4) равна  $q_{тр} C_p$ .

### 11.3. ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ И РАСХОДА. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ $q(\lambda)$ и $y(\lambda)$

Запишем уравнение неразрывности для критического сечения струйки  $S_{кр}$ ,  $W_{кр} = a_{кр}$ ,  $M = 1$ ,  $q_{кр}$  и для любого другого сечения  $S$ ,  $W$ ,  $q$ ,  $M \neq 1$ :

$$G = \rho_{кр} a_{кр} S_{кр} = \rho W S. \quad (11.41)$$

Введем газодинамическую функцию  $q(\lambda)$ , которую называют приведенным расходом:

$$q(\lambda) = \frac{\rho W}{\rho_{кр} a_{кр}} = S_{кр}/S. \quad (11.42)$$

Заменяя  $W/a_{кр} = \lambda$  и  $\rho/\rho_{кр} = \varepsilon(\lambda)/\varepsilon(1)$ , получим

$$q(\lambda) = \varepsilon(\lambda) \frac{\lambda}{\varepsilon(1)} = \lambda \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}. \quad (11.43)$$



Каждому значению  $q(\lambda)$  соответствует два значения  $\lambda$  — одно меньше, а другое больше единицы (см. приложение III). Правильное значение  $\lambda$  определяется в соответствии с условиями задачи. Максимальное значение  $q(\lambda) = 1$  имеет место при  $\lambda = 1$ .

Подставим в (11.41) из (11.42)  $qW = q_{кр} a_{кр} q(\lambda)$ , из (11.1a) и (1.1)  $q_{кр} = q^* \left( \frac{T_{кр}}{T^*} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \frac{p^*}{RT^*} \left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$  и из (11.19)  $a_{кр} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} RT^*}$ , тогда получим уравнение расхода в газодинамической форме

$$G = m p^* q(\lambda) S / \sqrt{T^*}, \quad (11.44)$$

где  $m = \sqrt{\left( \frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \frac{\kappa}{R}}$  — постоянный для данного газа коэффициент.

В табл. 11.2 приведены значения  $m$  для некоторых газов.

Газ	$\kappa$	$\frac{R, \text{ Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	$m \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} \right)^{0,5}$
Воздух	1,4	287,3	0,0404
Водород	1,4	4160	0,0106
Продукты сгорания ТРД	1,33	288,3	0,0396
Продукты сгорания ТРДФ	1,25	289	0,0388

Газодинамическая функция  $y(\lambda)$ . Подставим в (11.44) значение  $p^* = p/\pi(\lambda)$  и заменим отношение  $q(\lambda)/\pi(\lambda)$  через  $y(\lambda)$ , получим формулу для расчета расхода по статическому давлению

$$G = m p y(\lambda) S / \sqrt{T^*}, \quad (11.45)$$

где

$$y = \frac{q(\lambda)}{\pi(\lambda)} = \left( \frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \frac{\lambda}{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda^2}. \quad (11.46)$$

График  $y(\lambda)$  приведен в приложении III.

Формулы (11.44) и (11.45) используются для определения расхода газа по параметрам его состояния в рассматриваемом сечении или любого параметра по заданному расходу и другим параметрам в том же сечении. Кроме того, эти формулы широко используются как уравнение неразрывности ( $G_1 = G_2$ ) для расчета изменения того или другого параметра между сечениями 1—2 в произвольных газовых течениях.

Задача 11.13. Воздух движется в цилиндрической трубе энергетически изолированно с гидравлическими потерями, так что  $\lambda_1 = 0,1$ , а  $\lambda_2 = 1$ . Определить  $a_{кр2}/a_{кр1}$ ,  $p_2^*/p_1^*$ ,  $Q_2^*/Q_1^*$ ,  $W_2/W_1$ ,  $T_2/T_1$ ,  $p_2/p_1$ ,  $(s_2 - s_1)$ . Изобразить схему процесса в  $is$  и  $Ts$  — координатах, показав изменение адиабатного теплоперепада. Ответ:  $p_2^*/p_1^* = 0,157$ ;  $T_2/T_1 = 0,84$ ;  $p_2/p_1 = 0,084$ ;  $s_2 - s_1 = 535$  Дж/(кг · К).

**Задача 11.14.** Из сопла ТРДФ (см. рис. 0.1) вытекают отработавшие газы  $\kappa=1,25$ ,  $R=290$  Дж/(кг·К). Определить расход газа  $G$  и скорость его истечения  $W_c$  при  $S_c=1,2$  м<sup>2</sup>,  $T_c^*=2190$  К,  $p_c=10^4$  Па,  $p_c^*=10^5$  Па.  
 Ответ:  $W_c=1525$  м/с,  $G=46,5$  кг/с.

### 11.4. ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ В ПОЛНЫХ ИМПУЛЬСАХ. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ $z(\lambda)$ , $f(\lambda)$ , $r(\lambda)$

Уравнение количества движения в полных импульсах для жидкого объема 1—2 (рис. 11.5) получим, изменив на обратный знак в уравнениях (4.14) и (4.15), определяющих силу действия жидкости на стенки сосуда, т. е.

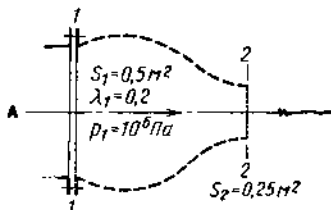


Рис. 11.5. Иллюстрация к задаче 11.15

$$R_{x \text{ вн}} = (p_2 S_2 + G W_2) - (p_1 S_1 + G W_1) = \Phi_2 - \Phi_1, \quad (11.47)$$

где  $R_{x \text{ вн}}$  — сила, действующая на жидкий объем 1—2 со стороны стенок канала и твердых тел, расположенных на этом участке и связанных с каналом.

Выразим полный импульс  $\Phi$  через приведенную скорость  $\lambda$  учитывая, что  $G = \rho W S$ ,  $\kappa p / \rho = a^2$ ,  $M^2 = \frac{W^2}{a^2} =$

$$= \frac{2}{\kappa + 1} \lambda^2$$

$$= \frac{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2}{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2} :$$

$$\Phi = G W \left( \frac{\kappa}{\kappa} \frac{p S}{\rho W S W} + 1 \right) = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} G a_{\text{кр}} \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right). \quad (11.48)$$

Критическое значение импульса определим из условия  $\lambda = 1$

$$\Phi_{\text{кр}} = p_{\text{кр}} S_{\text{кр}} + G W_{\text{кр}} = \frac{\kappa + 1}{\kappa} G a_{\text{кр}}. \quad (11.49)$$

Введем газодинамическую функцию  $z(\lambda)$

$$z(\lambda) = 2\Phi / \Phi_{\text{кр}} = \lambda + 1/\lambda. \quad (11.50)$$

$z(\lambda)$  зависит только от  $\lambda$  и не зависит от  $\kappa$ , принимает минимальное значение  $z(\lambda) = 2$  при  $\lambda = 1$ .

Введем еще две газодинамические функции —  $f(\lambda)$ , равную отношению полного импульса к полному импульсу газа, замороженного в том же сечении:

$$f(\lambda) = \Phi / \Phi^* = \Phi / (p^* S), \quad (11.51)$$

и  $r(\lambda)$ , равную отношению статической составляющей полного импульса к полному импульсу:

$$r(\lambda) = p S / \Phi. \quad (11.52)$$

Графики  $z(\lambda)$ ,  $f(\lambda)$ , и  $r(\lambda)$  приведены в приложении IV.

Следует иметь в виду, что некоторым значениям  $z(\lambda)$  и  $f(\lambda)$  соответствуют по два значения  $\lambda$  — меньше и больше единицы. Правильное значение  $\lambda$  выбирается на основании условий задачи и дополнительных уравнений.

Преобразования позволяют установить, что

$$f(\lambda) = \lambda \varepsilon(\lambda) z(\lambda) = (1 + \lambda^2) \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}; \quad (11.53)$$

$$a \quad r(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2}{(1 + \lambda^2)}. \quad (11.54)$$

Полный импульс можно выразить на основании (11.48), (11.50), (11.51) и (11.52) следующим образом

$$\Phi = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} G a_{кр} z(\lambda) = p^* f(\lambda) S = p \frac{1}{r(\lambda)} S. \quad (11.55)$$

Тогда уравнение количества движения в полных импульсах примет три эквивалентные формы

$$\begin{aligned} R_{\text{вн}} &= \frac{\kappa + 1}{2\kappa} G [a_{кр2} z(\lambda_2) - a_{кр1} z(\lambda_1)] = [p_2^* f(\lambda_2) S_2 - p_1^* f(\lambda_1) S_1] = \\ &= \left[ p_2 \frac{1}{r(\lambda_2)} S_2 - p_1 \frac{1}{r(\lambda_1)} S_1 \right]. \end{aligned} \quad (11.56)$$

Выбор уравнения определяется условиями задачи.

**Задача 11.15.** В канале, площадь сечений которого на участке  $1-2$  изменяется неизвестным образом (пунктир на рис. 11.5), воздух течет энергетически изолированно и изотропно. Для условий, обозначенных на рисунке, определить вектор равнодействующей сил, с которыми воздух действует на стенки канала. **Решение.** Искомая сила является проекцией на ось сил давления воздуха на внутренние стенки канала. Поскольку ни форма канала, ни распределение статического давления вдоль оси не известны, решить задачу интегрированием элементарных сил давления невозможно. Применим для решения уравнение количества движения (11.56), позволяющее определить искомую силу по параметрам состояния воздуха в сечениях 1 и 2. Порядок дальнейшего решения является общим для исследования всех течений и решения всех задач и состоит в применении основных уравнений газодинамики к заданным условиям.

1. Для определения изменения температуры торможения используем уравнение энтальпии (11.8). Для энергетически изолированного течения

$$q = 0, \quad I_{\text{тех}} = 0 \quad \text{и} \quad i_2^* = i_1^*, \quad T_2^* = T_1^*, \quad a_{кр2} = a_{кр1}. \quad (1)$$

2. Для определения изменения энтропии применим уравнение второго закона термодинамики (4.97). Для энергетически изолированного ( $dq = 0$ ) и изотропного ( $dq_{\text{тр}} = 0$ ) течений

$$ds = 0, \quad s_2 = s_1. \quad (2)$$

3. Для определения изменения давления торможения используем уравнение (11.38). С учетом (1) и (2) получим

$$\sigma = p_2^* / p_1^* = 1, \quad p_2^* = p_1^*. \quad (3)$$

Следовательно, для определения искомой силы удобно применить (11.56), содержащее  $p^*$ .

4. Для определения  $\lambda_2$  применим (11.44) в виде уравнения неразрывности для сечений 1—2 ( $G_2 = G_1$ ). Учтем, что  $q(\lambda_1) = q(0,2) = 0,3$  (см. приложение III), и получим

$$q(\lambda_2) = q(\lambda_1) \frac{s_1}{s_2} = 0,3 \frac{0,5}{0,25} = 0,6, \text{ т. е. } \lambda_2 = 0,4.$$

5. Для определения  $R_{x \text{ вн}}$  используем (11.56), изменив в правой части знак на обратный, так как определяется проекция силы, действующей на стенки и, подставив значения  $f(\lambda_1) = f(0,2) = 1,023$ ;  $f(\lambda_2) = f(0,4) = 1,08$  (см. приложение IV), получим

$$R_{x \text{ вн}} = p^*[f(\lambda_1) S_1 - f(\lambda_2) S_2] = 1,02 \cdot 10^6 (1,023 \cdot 0,5 - 1,08 \cdot 0,25) = \\ = 2,45 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

Сила  $R_{x \text{ вн}} > 0$ , т. е. стремится оторвать сопло от трубы.

## 11.5. ЗАКОН ОБРАЩЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Уравнение закона обращения воздействий позволяет определить какой знак должно иметь то или другое воздействие для ускорения или торможения дозвуковых и сверхзвуковых газовых потоков.

Виды воздействий. Параметры газового потока могут изменяться под влиянием следующих воздействий окружающей среды:

- 1) геометрического  $dS \leq 0$  (сужение или расширение канала);
- 2) расходного  $dG \geq 0$  (подвод или отвод массы газа);
- 3) теплового  $dq \geq 0$  (подвод или отвод тепла);
- 4) механического  $dl_{\text{тех}} \geq 0$  (работа турбины или компрессора);
- 5) гидравлических потерь  $dl_{\text{тр}} > 0$ .

Все эти воздействия входят в основные уравнения газовой динамики: изменение площади канала и расходное воздействие — в уравнение неразрывности и расхода (3.13), тепловое и механическое — в уравнение энтальпии (11.5), гидравлических потерь — в уравнение Бернулли (4.82).

Выполним совместное преобразование этих уравнений и уравнения состояния, исключим из них параметры состояния  $T$ ,  $p$ , и  $q$  и получим зависимость изменения скорости газа от пяти изучаемых воздействий.

Продифференцируем уравнение расхода  $G = qWS$ , разделим левую часть на  $G$ , а правую — на  $qWS$ , и выразим  $dq/q$

$$\frac{dq}{q} = \frac{dG}{G} - \frac{dW}{W} - \frac{dS}{S}. \quad (11.57)$$

Продифференцируем уравнение состояния  $p = qRT$  и определим  $dp/q$

$$\frac{dp}{q} = RdT + \frac{\kappa}{\kappa} RT \frac{dq}{q}. \quad (11.58)$$

Подставив в (11.58)  $dq/q$  из (11.57) и заменив  $\kappa RT$  на  $a^2$ , получим

$$\frac{dp}{q} = RdT + \frac{a^2}{\kappa} \left( \frac{dG}{G} - \frac{dW}{W} - \frac{dS}{S} \right).$$

Подставим  $RdT$  из уравнения теплосодержания  $dq - dl_{\text{тек}} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RdT + WdW$ ,

тогда  $\frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} (dq - dl_{\text{тек}} - WdW) + \frac{a^2}{\kappa} \left( \frac{dG}{G} - \frac{dW}{W} - \frac{dS}{S} \right)$ .

Подставим  $dp/\rho$  в уравнение Бернулли  $-dp/\rho = WdW + dl_{\text{тек}} + dl_{\text{тр}}$ , упростим и получим уравнение закона обращения воздействия

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = \frac{dS}{S} - \frac{dG}{G} - \frac{\kappa - 1}{a^2} dq - \frac{1}{a^2} dl_{\text{тек}} - \frac{\kappa}{a^2} dl_{\text{тр}}. \quad (11.59)$$

Пять членов правой части уравнения представляют перечисленные физические воздействия на газовый поток, ускоряющие или тормозящие его в зависимости от знака и режима течения.

Характерной особенностью первых четырех воздействий является то, что они могут изменять свой знак (например,  $dS \geq 0$ ).

Пятое — воздействие трения — имеет всегда положительный знак, являясь односторонним воздействием ( $dl_{\text{тр}} > 0$ ).

Слева расположен член уравнения  $(M^2 - 1) dW/W$ , знак которого определяет знак необходимого воздействия на поток.

Если  $dW/W > 0$ , то поток ускоряется (конфузорные течения).

Если  $dW/W < 0$ , то поток тормозится (диффузорные течения).

Знак множителя  $(M^2 - 1)$  изменяется при переходе через скорость звука. Следовательно, при заданном знаке изменения скорости потока (например, при его ускорении  $dW/W > 0$ ) знак левой части уравнения при переходе через скорость звука изменяется на обратный, что требует такого же изменения знака воздействия на поток.

Закон обращения воздействия имеет ряд эквивалентных формулировок.

1. Любое физическое воздействие одинакового знака противоположным образом влияет на дозвуковые и сверхзвуковые газовые потоки.

2. Переход через скорость звука с помощью одностороннего воздействия невозможен. Это явление называется кризисом течения и будет подробно разобрано ниже.

3. Переход через скорость звука возможен только в том случае, если в критическом сечении знак воздействия изменить на обратный.

**Задача 11.16.** Определите: 1) характер изменения скорости газовых потоков ( $M < 1$ ) и ( $M > 1$ ) в суживающемся канале и достижимые величины скорости; 2) как ускорить дозвуковой поток ( $M < 1$ ) до сверхзвукового ( $M > 1$ ) только за счет геометрического воздействия? Нарисуйте схему канала, а под ним график изменения  $T^*$  и  $T$ ,  $p^*$  и  $p$ ,  $\rho^*$  и  $\rho$ ,  $W$ ,  $a$ ,  $a_{\text{кр}}$ ,  $M$ ,  $\lambda$ , соблюдая (качественно) одинаковый масштаб для однородных параметров. Изобразите схему процесса в  $ix$ -координатах, отметив критическое состояние ( $M = \lambda = 1$ ); 3) каковы знаки прямых воздействий, ускоряющих дозвуковые и тормозящих сверхзвуковые потоки? 4) каковы знаки обратных воздействий, ускоряющих сверхзвуковые и тормозящих дозвуковые потоки?

Закон обращения воздействия отражает усиливающееся влияние сжимаемости газа на его движение при увеличении числа  $M$ .

При переходе через  $M=1$  эти количественные изменения переходят в качественные — обращаются воздействия. Поэтому закон обращения воздействия (11.59) является законом превращения количества в качество для газовых течений.

Закон обращения воздействия неприменим для несжимаемой жидкости. При  $\rho = \text{const}$   $W_2 = W_1 S_1 / S_2$ , т. е. ускорение может происходить только в сужающемся канале при воздействии одного знака  $dS < 0$ .

## 11.6. ОБЛАСТИ ТЕЧЕНИЙ ГАЗОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА $M$

Рассмотрим энергетически изолированное изоэнтропное ( $dG = -dq = dl_{\text{тех}} = dl_{\text{тр}} = 0$ ) ускорение газа в трубке тока переменного сечения  $dS \geq 0$ . В этом случае уравнение энтальпии в соответствии с (11.21) принимает вид

$$i^* = i + \frac{W^2}{2} = \frac{a^2}{\kappa - 1} + \frac{W^2}{2} = \frac{(a^*)^2}{\kappa - 1} = \frac{W_{\text{max}}^2}{2} = \text{const} \quad (11.60)$$

и показывает, что ускорение потока происходит за счет потенциальной энергии (энтальпии), т. е. сопровождается адиабатным расширением газа с уменьшением  $T(a)$ ,  $\rho$ ,  $p$ , до нуля при  $W = W_{\text{max}}$  при постоянных  $T^*$  ( $a^*$ ,  $a_{\text{тр}}$ ,  $W_{\text{max}}$ ),  $p^*$ ,  $\rho^*$ . Обратным процессом является изоэнтропное сжатие газа за счет кинетической энергии при его торможении. Этим процессам соответствует изменение газодинамических функций  $\tau(\lambda)$ ,  $\epsilon(\lambda)$  и  $\pi(\lambda)$  [см. приложение II].

Разделим члены  $a^2/(\kappa-1)$  и  $W^2/2$  уравнения (11.60) на равные величины  $(a^*)^2/(\kappa-1)$  и  $W_{\text{max}}^2/2$ , получим уравнение энтальпии в виде уравнения эллипса энергетически изолированных изоэнтропных течений

$$\frac{a^2}{(a^*)^2} + \frac{W^2}{W_{\text{max}}^2} = 1. \quad (11.61)$$

Рассмотрение эллиптической зависимости скорости звука от скорости течения (рис. 11.6) позволяет наглядно установить области течений газа, существенно различные по физическим характеристикам.

Выразим в явном виде влияние числа  $M$  и изменения скорости энергетически изолированного и изоэнтропного течения на изменение основных параметров потока. Преобразуем уравнение Бернулли —  $q dp/(qp) = -\kappa q W^2 dW/(\kappa p W)$ , заменим  $\kappa p/q$  на  $a^2$ , получим

$$dp/p = -\kappa M^2 dW/W. \quad (11.62)$$

Уравнение энтальпии (11.11) разделим на  $T$  и подставим в него  $TC_p = \frac{a^2}{\kappa - 1} \frac{W}{W}$ , получим

$$\frac{dT}{T} = 2 \frac{da}{a} = -(\kappa - 1) M^2 \frac{dW}{W}. \quad (11.63)$$

Разделим уравнение (11.58) на  $RT$  и, учтя (11.62) и (11.63), найдем

$$\frac{dq}{q} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} = -M^2 \frac{dW}{W} \quad (11.64)$$

Выразим из (11.57)  $dS/S$  и учтем, что  $dG/G=0$ , получим

$$\frac{dS}{S} = -\left(\frac{dW}{W} + \frac{dq}{q}\right) \quad (11.65)$$

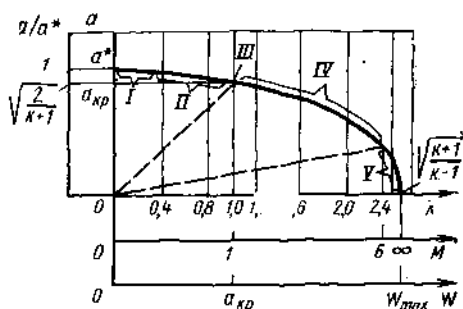


Рис. 11.6. Эллипс энергетически изолированных течений

Полученные формулы и анализ рис. 11.6 позволяют сделать важные выводы:

1. Увеличение скорости  $dW/W > 0$  в энергетически изолированном изэнтропном течении всегда сопровождается уменьшением  $T(a)$ ,  $p$ ,  $q$ , т. е. изэнтропным расширением газа, а торможение  $dW/W < 0$  — сжатием. Этот же характер изменения параметров имеет место при энергетически изолированных течениях с гидравлическими потерями.

2. При малых числах  $M < 1$  даже существенное изменение скорости потока вызывает лишь незначительное изменение параметров

$$\left| \frac{dp}{p} \right| \ll \frac{dW}{W}, \quad \left| \frac{dT}{T} \right| = 2 \left| \frac{da}{a} \right| \ll \frac{dW}{W} \quad \text{и} \quad \left| \frac{dq}{q} \right| \ll \frac{dW}{W}.$$

Это позволяет выделить область течений при  $M \ll 1$ , в которой газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость  $q \approx \text{const}$ , упрощая тем самым расчеты при допустимых погрешностях (см. область I на рис. 11.6). Предельное значение числа  $M$ , определяющего границу области I, зависит от допустимой погрешности вычисления и будет определено ниже.

3. Уравнения (11.64) и (11.65) показывают, что при ускорении дозвукового потока  $\left| \frac{dq}{q} \right| < \frac{dW}{W}$ , поэтому оно может реализоваться только в суживающемся канале при  $dS/S < 0$ . При  $M \approx 1$  сжимаемость газа становится настолько существенной, что изменение плотности равно, а по знаку обратно, изменению скорости  $dq/q = -dW/W$ . Поэтому в критическом сечении ускорение потока происходит при неизменной площади канала  $dS/S = 0$ , а в сечениях, близких к критическому, незначительное изменение площади сечения канала вызывает существенное изменение скорости. Эти особенности позволяют выделить зону дозвуковых течений, в которой сжимаемость газа играет существенную роль и должна учитываться (см. область II на рис. 11.6), и зону околозвуковых или трансзвуковых течений (см. область III на рис. 11.6). При  $M > 1$  плотность

изменяется в большей степени, чем скорость  $\left| \frac{dq}{q} \right| > |dW/W|$ , как это следует из (11.64) и (11.65). Поэтому сверхзвуковые энергетически изолированные потоки могут ускоряться только в расширяющихся каналах (см. область IV рис. 11.6).

Наконец, при  $M > 6 \dots 7$  из сверхзвуковых течений выделяется область гиперзвуковых течений, характерная тем, что скорость газа в них изменяется незначительно при существенном изменении параметров  $T(a)$ ,  $p$ ,  $q$ , а число  $M$  изменяется преимущественно за счет изменения скорости звука.

**Задача 11.17.** Число  $M$  в энергетически изолированном изоэнтропном течении воздуха изменяется в режимных областях в 4 раза: 1) от  $M_1 = 0,25$  до  $M_2 = 0,0625$ ; 2)  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 0,25$ ; 3)  $M_1 = 4$ ,  $M_2 = 1$ ; 4)  $M_1 = 25,37$ ,  $M_2 = 6,34$ . Определить, используя таблицы газодинамических функций, изменение скорости  $W_2/W_1$ , скорости звука  $a_2/a_1$  и плотности  $\rho_2/\rho_1$ , а также области течения по эллипсу (см. рис. 11.6) и указать их особенности.

Граница области течений практически несжимаемых газов. Определим предельные величины чисел  $M$  или  $\lambda$ , до которых энергетически изолированные и изоэнтропные течения газа можно рассчитывать как течения несжимаемой жидкости, не превосходя заданной погрешности  $\delta\%$  в определении параметров. Максимальная ошибка при этом может быть допущена в определении параметров торможения. При энергетически изолированном и изоэнтропном торможении *несжимаемой* жидкости плотность и температура ее не изменяются (отсутствует термодинамический процесс), т. е.  $q/q^* = 1$  и  $T/T^* = 1$ . Для сжимаемого газа такие соотношения выполняются только при  $\lambda = 0$ , так как  $\varepsilon(0) = 1$  и  $\tau(0) = 1$ . Следовательно, в расчетах изменения плотности и температуры газ можно считать несжимаемым с точностью до  $\delta\%$  при условии

$$q/q^* = \varepsilon(\lambda) = 1 - \frac{\delta\%}{100}; \quad (11.66)$$

$$T/T^* = \tau(\lambda) = 1 - \frac{\delta\%}{100}, \quad (11.67)$$

где  $\delta = \frac{q^* - q}{q^*} 100$  и  $\delta = \frac{T^* - T}{T^*} 100$ .

Разложим формулу (11.32) в ряд и пренебрежем членами, содержащими числа  $M$  в степени шесть и выше, получим:

$$\frac{p^*}{p} = 1 + \frac{\kappa}{2} M^2 + \frac{\kappa}{8} M^4 + \dots \quad (11.68)$$

Следовательно, при расчете  $p^*/p$  без учета сжимаемости газа, т. е. по формуле Бернулли  $p^*/p = \frac{1}{p} \left( p + \frac{\kappa p q}{q} \frac{M^2}{2} \right) = \frac{1}{p} \times \left( p + q \frac{W^2}{2} \right)$ , ошибка при малых числах  $M$  равна  $-\frac{\kappa}{8} M^4$ , а ошибка в процентах  $\delta\%$  будет

$$\delta\% = \frac{\frac{\kappa}{8} M^4 \cdot 100}{1 + \frac{\kappa}{2} M^2 + \frac{\kappa}{8} M^4 + \dots} \quad (11.69)$$



В таблице приведены предельные значения  $\lambda$  и  $M$  при  $\delta=2; 5$  и  $10\%$  для  $q, T$  и  $p$  при  $k=1,4$ .

Параметры	$\delta=2\%$		$\delta=5\%$		$\delta=10\%$	
	$\lambda$	$M$	$\lambda$	$M$	$\lambda$	$M$
$q$	0,22	0,2	0,35	0,32	0,50	0,47
$T$	0,35	0,32	0,55	0,52	0,78	0,75
$p$	0,68	0,65	0,78	0,75	1,0	1,0

Итак, для упрощения расчетов, газ можно принимать за несжимаемую жидкость при  $M \leq 0,2$ , допуская при этом погрешность, не превышающую  $2\%$ .

### 11.7. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ (ЗВУКОВЫХ) ВОЛН ДАВЛЕНИЯ В ГАЗОВЫХ ПОТОКАХ

На рис. 11.7 представлено положение слабых волн давления ( $dp \rightarrow 0$ ) в газовых потоках различной скорости через три секунды после включения точечного источника  $A$  ежесекундных звуковых колебаний. В неподвижном газе ( $W=0$ ) слабые волны давления распространяются со скоростью звука  $a$  в виде сферических концентрических звуковых волн во всем пространстве.

В потоке дозвуковой скорости  $W = a/2$  звуковые волны распространяются также во все стороны пространства. Из-за того, что они

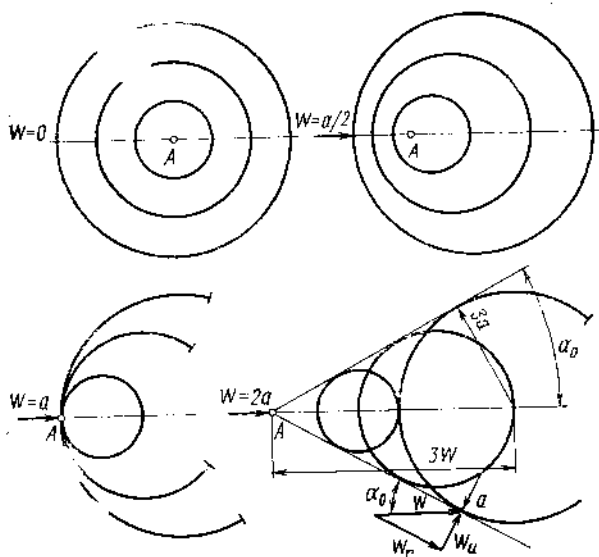


Рис. 11.7. Распространение элементарных звуковых волн в газовых потоках

сносятся потоком, их скорость относительно неподвижного наблюдателя в направлении потока ( $W+a=1,5a$ ) больше, чем вверх по потоку ( $a-W=a/2$ ). Поэтому проекции этих сферических волн на плоскость представляют собой окружности, расположенные не концентрично.

В критическом потоке ( $W_{кр}=a_{кр}$ ) звуковые волны сносятся со скоростью их распространения. Поэтому они не могут проникнуть против потока и распространяются в полупространстве за источником  $A$ .

В сверхзвуковом потоке ( $W=2a$ ) звуковые волны концентрируются внутри конуса Маха, вытянутого по потоку за источником  $A$ . Только внутри конуса Маха проявляются звуковые возмущения (слышен звук). Если источник волн является непрерывно действующим (например, игла в сверхзвуковом потоке), то на поверхность конуса Маха все волны попадают в одинаковой фазе бесконечно слабого (элементарного), а потому изоэнтропного сжатия (или расширения). Поверхность конуса Маха представляет тончайшую коническую область сжатия, толщина которой порядка длины свободного пробега молекул газа при данных условиях. *Проекции образующих конуса на поверхность называются характеристиками.*

Свойства характеристик.

1. Характеристики существуют только в сверхзвуковых течениях. В потоках с равномерным полем скоростей характеристики прямолинейны.

2. Угол  $\alpha_0$  наклона характеристики к вектору скорости невозмущенного потока тем меньше, чем больше число  $M$  (см. рис. 11.7)

$$\sin \alpha_0 = a_n/W_n = \frac{1}{M_n}. \quad (11.70)$$

При  $M=1$   $\alpha_0=90^\circ$ , а при  $M=\infty$   $\alpha_0=0$ , т. е. положение характеристик совпадает с вектором максимальной скорости.

3. До прямолинейной характеристики поток не возмущен, следовательно вдоль характеристики параметры потока не изменяются, а изменяются только при пересечении характеристики. В сверхзвуковом потоке с неравномерным полем скоростей характеристика криволинейна: касательная в данной точке составляет угол  $\alpha_0 = \arcsin(1/M)$  с вектором местной скорости (рис. 11.8).

4. Составляющая скорости набегающего потока, перпендикулярная к характеристике (см. рис. 11.7), равна местной скорости распространения звука

$$W_u = a. \quad (11.71)$$

Обратив движение, заключаем, что характеристика в направлении своей нормали распространяется всегда со скоростью звука, а конус Маха— в направлении оси со сверхзвуковой скоростью  $W = a/\sin \alpha_0$ .

5. При обтекании сверхзвуковым потоком бесконечно малого внутреннего тупого угла  $180^\circ - d\delta$ , образованного двумя плоскостя-

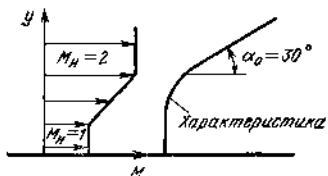


Рис. 11.8. Характеристика в неравномерном поле скоростей

ми, возникает плоская волна элементарного изоэнтропного сжатия, а при обтекании внешнего тупого угла  $180^\circ + d\delta$  — характеристика изоэнтропного разрежения (рис. 11.9).

Изменение параметров потока на характеристиках.

1. Энергетическая изолированность и изоэнтропность сжатия или расширения на характеристиках определяет постоянство параметров торможения  $T^*$ ,  $p^*$ ,  $q^*$ ,  $a_{кр}$ . В ряде случаев, например, при изучении затухания звуковых волн, необходимо учитывать их неизотропность.

2. На характеристике сжатия давление, температура и плотность газа повышаются, а на характеристике разрежения — понижаются в соответствии с уравнением адиабаты  $p = q^* \text{const}$ .

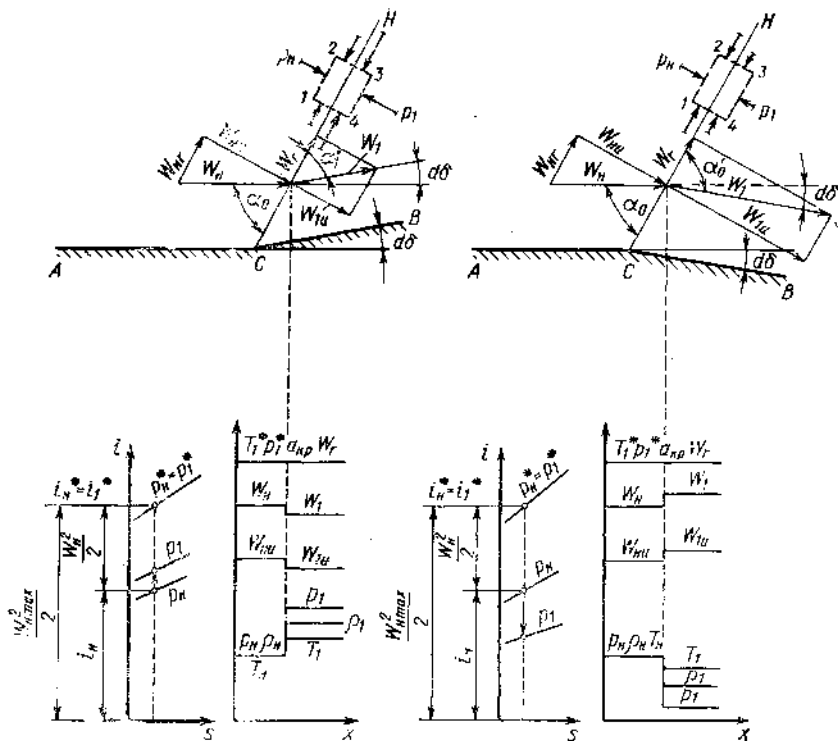


Рис. 11.9. Изменение параметров на характеристиках

3. Нормальная составляющая скорости  $W_{nu}$  на характеристике сжатия уменьшается, а на характеристике разрежения — увеличивается. Это следует из уравнения количества движения в проекциях на нормаль к характеристике, составленного для выделенных пунктиром параллелепипедов 1, 2, 3, 4 (см. рис. 11.9)

$$(p_n - p_1) dS = dG (W_{1u} - W_{nu}). \quad (11.72)$$

Для характеристики сжатия  $p_1 = p_n + dp > p_n$  и  $W_{1u} < W_{nu}$ .  
 Для характеристики разрежения  $p_1 = p_n - dp < p_n$  и  $W_{1u} > W_{nu}$ .

4. Радиальная составляющая скорости при переходе через характеристики не изменяется

$$W_{1r} = W_{nr}. \quad (11.73)$$

Это объясняется тем, что проекция на плоскость волны равнодействующей на элемент 1, 2, 3, 4 силы равна нулю.

5. Изменение составляющих скорости приводит к тому, что на характеристике сжатия вектор скорости уменьшается  $W_1 < W_n$  и отклоняется от первоначального направления на угол  $d\delta$  в ту же сторону, что и отклоняющая поверхность, так что угол между вектором скорости и характеристикой уменьшается  $\alpha'_0 = \alpha_0 - d\delta$ . На характеристике разрежения вектор скорости увеличивается  $W_1 > W_n$  и отклоняется от первоначального направления на угол  $d\delta$ , также в сторону отклоняющей пластины, но так, что угол между вектором скорости и данной характеристикой увеличивается  $\alpha'_0 = \alpha_0 + d\delta$ . Следует еще раз подчеркнуть, что при пересечении сверхзвуковым потоком одной характеристики изменение параметров настолько мало, что им обычно пренебрегают. Однако, как будет показано ниже (см. пп. 13.1, 16.3), при последовательном пересечении множества однотипных характеристик (сжатия или разрежения) происходит изоэнтропный процесс непрерывного конечного изменения параметров. Области сверхзвуковых течений, в которых давление вдоль линии тока непрерывно повышается или понижается, называются волнами сжатия и волнами разрежения, соответственно.

В экспериментах применяется оптический прибор Теплера, позволяющий определить угол между характеристикой и вектором скорости и, следовательно, найти число  $M = 1/\arcsin \alpha_0$ .

Непрерывное торможение сверхзвукового потока  $M > 1$  до дозвукового  $M < 1$  осуществимо в строго определенных условиях (см. п. 16.3). Если эти условия нарушаются, то при торможении сверхзвуковых потоков возникают скачки уплотнения или ударные волны. На них сверхзвуковой поток тормозится ударно: скорость снижается скачком, увеличиваются плотность (отсюда «скачки уплотнения»), давление и температура. Основная особенность скачков уплотнения состоит в том, что фронт их —  $\delta$  — очень тонок — порядка длины свободного пробега молекул в данных условиях и тем тоньше, чем больше число  $M$ . Для воздуха при нормальных физических условиях  $\delta \approx 18 \cdot 10^{-5}$  мм при  $M=2$  и  $\delta \approx 8 \cdot 10^{-5}$  мм при  $M=5$ .

При построении инженерной теории скачков уплотнения прием, что газ идеальный, процесс — энергетически изолирован, а скачки уплотнения — поверхности разрыва параметров потока ( $\delta=0$ ). Конечная, хотя и исчезающе малая, толщина фронта скачка уплотнения в реальном газе обусловлена влиянием вязкости, теплопроводности и диффузии.

Существенно необратимое ударное сжатие газа на скачках сопровождается специфическими ударными или волновыми потерями — ростом энтропии, уменьшением давления торможения и адиабатического теплоперепада. При полетах с  $M > 1$  перед летательными аппаратами возникают ударные волны и значительное волновое сопротивление. При входе воздуха в ВРД при  $M > 1$  также возникают скачки уплотнения, приводящие к падению полного давления и тяги. Вся техника сверхзвуковых течений связана со скачками уплотнения.

*Скачок уплотнения и ударная волна* — названия одного и того же явления. Иногда под ударной волной понимают фронт ударного сжатия газа, перемещающийся в пространстве со сверхзвуковой скоростью, а остановленную встречным сверхзвуковым потоком ударную волну — скачком уплотнения. Условность такого разделения очевидна: ударная волна перед сверхзвуковым самолетом будет скачком уплотнения для летчика.

Возникновение ударных волн связано с суммированием элементарных волн давления  $\Delta p \rightarrow 0$  (рис. 12.1, а). Сместим поршень в трубе резко вправо до упора. Воздух перед поршнем бу-

дет сжат и возникнет волна давления  $I-H$ , которая будет распространяться к открытому концу трубы. При этом распределение температуры воздуха вдоль оси трубы будет иметь вид, аналогичный распределению давления. Каждый элемент волны  $\Delta p \rightarrow 0$  представляет собой слабое возмущение, которое распространяется в пространстве с местной скоростью звука  $a = \sqrt{\kappa RT}$  к открытому концу трубы. Чем выше расположено возмущение от основания волны  $H$ , тем больше скорость его движения по предварительно

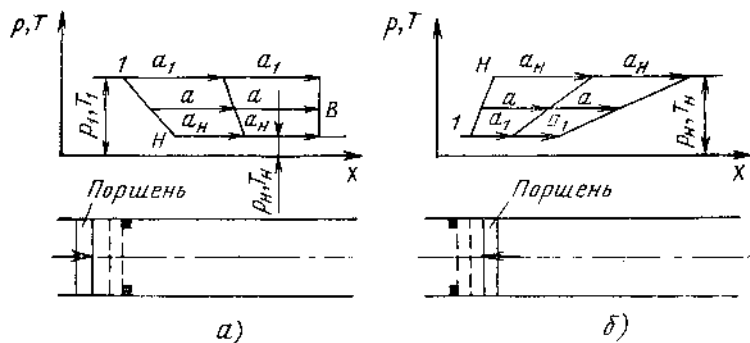


Рис. 12.1. Распространение возмущения в газе:

$a$ —волна давления;  $b$ —то же, разрежения

сжатому и разогретому газу. Откладывая вправо от волны  $I-H$  величины  $a_H = \sqrt{\kappa RT_H}$ ,  $a = \sqrt{\kappa RT}$  и  $a_1 = \sqrt{\kappa RT_1}$ , получим положенные волны давления и температуры через секунду. Повторяя такую операцию найдем, что с течением времени исходная пологая волна давления  $I-H$  самопроизвольно становится все более крутой, пока все элементарные волны давления не сложатся в поверхность разрыва ( $\Sigma \Delta p = p_1 - p_H$ ), разделяющую области, в которых давление и другие параметры разнятся на конечную величину ( $p_1 - p_H$ ), ( $T_1 - T_H$ ) и т. д. Эта поверхность и называется ударной волной и распространяется со сверхзвуковой скоростью.

Сдвинем теперь поршень резко влево (рис. 12.1, б). Возникшая при этом волна разрежения  $I-H$  начнет распространяться вправо. Так как  $T_1 < T_H$  и  $a_1 = \sqrt{\kappa RT_1} < a_H = \sqrt{\kappa RT_H}$ , то волна разрежения самопроизвольно будет становиться все более пологой, пока не исчезнет. Таким образом доказывается невозможность существования адиабатных скачков разрежения. На практике скачки разрежения наблюдаются при конденсации паров воды или газов в аэродинамических трубах, а также во фронте пламени. Но это не адиабатные скачки. Их существование объясняется подводом к газу в области пониженного давления тепла конденсации в первом случае и химической реакции — во втором. В этих случаях  $T_1 > T_H$  и  $a_1 > a_H$ .

Возникновение скачков уплотнения при обтекании тел сверхзвуковым потоком. При обтекании тел дозвуковым потоком элементарные волны давления, возникающие

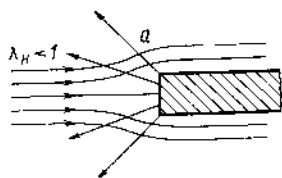


Рис. 12.2. Обтекание тела дозвуковым потоком

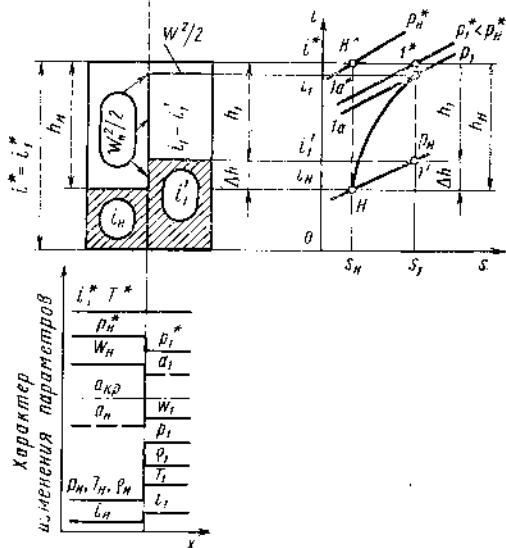
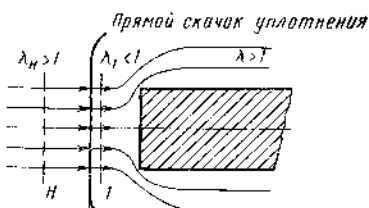


Рис. 12.3. Обтекание затупленного тела сверхзвуковым потоком

при взаимодействии потока с телом, распространяются во все стороны со скоростью звука  $a$ . Эти волны уже на достаточном расстоянии искривляют линии тока подготавливая поток для безударного обтекания тела (рис. 12.2).

При обтекании затупленного тела сверхзвуковым потоком (рис. 12.3) элементарные волны давления не могут распространяться против сверхзвукового потока ( $a < W_N$ ) и «подготавливать» его для плавного обтекания. Поэтому, как говорят, сверхзвуковой поток «слеп» натывается на препятствие так, что на некотором расстоянии от тела образуется скачок уплотнения, на котором ударно тормозится сверхзвуковой поток.

## 12.1. ПРЯМЫЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

Прямым называется скачок уплотнения, фронт которого перпендикулярен к векторам скорости перед скачком ( $\vec{W}_N$ ) и за ( $\vec{W}_1$ ) скачком. Прямой скачок возникает в тех случаях, когда скорость газа при переходе через скачок не изменяет своего направления.

Задача исследования. Задаются параметры набегающего потока  $\lambda_N > 1$ ,  $T_N^*$ ,  $p_N^*$ ,  $\kappa$ ,  $R$ . Требуется определить параметры газа за прямым скачком  $\lambda_1$ ,  $T_1^*$ ,  $p_1^*$  и т. д.

Для решения поставленной задачи выделим сечениями  $H-H$  до скачка и  $I-I$  за скачком произвольный участок элементарной струйки газа, пересекающей скачок (см. рис. 12.3). Сечения  $H-H$  и  $I-I$  расположим сколь угодно близко друг к другу. В этом случае их площади будут равны  $S_I = S_H$ , а боковая поверхность струйки равна нулю  $S_{H-I} = 0$ .

Рассмотрим для этого участка струйки основные уравнения газовой динамики:

$$\left. \begin{aligned} 1. \text{ Уравнение неразрывности } G_I = G_H. \\ 2. \text{ Уравнение энтальпии } q - l_{\text{техн}} = i_I^* - i_H^* = C_p (T_I^* - T_H^*). \\ 3. \text{ Уравнение движения в полных импульсах } R_b = \Phi_I - \Phi_H. \\ 4. \text{ Уравнение состояния } p = \rho RT. \\ 5. \text{ Уравнение второго закона термодинамики } ds = \frac{dq + dq_{\text{тр}}}{T}. \end{aligned} \right\} (12.1)$$

Постоянство полной энергии газа при переходе через прямой скачок объясняется энергетической изолированностью течения в струйке  $H-I$ , окруженной струйками с такими же параметрами. Итак, при  $q = l_{\text{техн}} = 0$  из уравнения энтальпии и формул (11.19), (11.15) и (11.8), получим

$$i_I^* = i_H^*; T_I^* = T_H^*; a_{крI} = a_{крH}; a_I^* = a_H^*; W_{\text{maxI}} = W_{\text{maxH}}. \quad (12.2)$$

Неизменность полной энтальпии показана на диаграммах (см. рис. 12.3).

Уменьшение скорости  $W_I = f(W_H)$  и приведенной скорости  $\lambda_I = f(\lambda_H)$  на прямом скачке уплотнения. На поверхность трубки тока  $H-I$  действуют только силы нормального давления, проекция которых на ось трубки равна нулю, т. е.  $R_{вн} = 0$  ( $S_{H-I} = 0$ ) и уравнение количества движения в полных импульсах для прямого скачка с учетом (11.56),  $G_I = G_H$  и  $a_{крI} = a_{крH}$  принимает вид:

$$\Phi_I = \Phi_H; z(\lambda_I) = z(\lambda_H); \lambda_I + \frac{1}{\lambda_I} = \lambda_H + \frac{1}{\lambda_H}. \quad (12.3)$$

Отсюда получаем *основное кинематическое соотношение для прямого скачка* \*

$$\lambda_H \lambda_I = 1; \lambda_I = 1/\lambda_H. \quad (12.4)$$

Подставляя значения  $\lambda_H = W_H/a_{кр}$  и  $\lambda_I = W_I/a_{крI}$ , получим

$$W_H W_I = a_{кр}^2; W_I = a_{кр}^2/W_H. \quad (12.5)$$

Из формул (12.4) и (12.5) следует, что *за прямым скачком уплотнения скорость всегда дозвуковая*:

\* Решение  $\lambda_I = \lambda_H$  соответствует течению без изменения параметров и к скачку не имеет отношения.



$$\lambda_n > 1, \text{ а } \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_n} < 1 \text{ и } W_1 = \frac{a_{кр}^2}{W_n} < a_{кр}.$$

При этом, чем больше  $W_n$  и  $\lambda_n$ , тем сильнее скачок. При  $\kappa=1,4$   $\lambda_{n \max} = 2,45$  и  $\lambda_{1 \min} = 0,407$ .

Увеличение плотности газа на прямом скачке уплотнения определим из уравнения неразрывности  $Q_1 W_1 = Q_n W_n$  с учетом (12.5) и  $\lambda_n = W_n/a_{кр}$ :

$$Q_1/Q_n = (W_n/W_1) \cdot (W_n/W_1) = \lambda_n^2. \quad (12.6)$$

Увеличение температуры газа на прямом скачке с учетом (12.2), (12.4) и  $\tau(\lambda) = T/T^*$ , будет

$$\frac{T_1}{T_n} = \frac{T_1}{T_n} \frac{T_n^*}{T_1^*} = \frac{\tau(\lambda_1)}{\tau(\lambda_n)} = \frac{\tau(1/\lambda_n)}{\tau(\lambda_n)} = \frac{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2}{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^2}. \quad (12.7)$$

Повышение давления газа на прямом скачке. Выражая расход газа в уравнении неразрывности из (11.45), получим

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{y(\lambda_n)}{y(\lambda_1)} = \frac{y(\lambda_n)}{y\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)} = \lambda_n^2 \frac{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2}{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^2}. \quad (12.8)$$

Подставляя в формулу (12.8) значение  $\lambda_n^2$  из (11.25) и производя алгебраические преобразования, получим часто используемую формулу

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_n^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1}, \quad (12.9)$$

из которой также следует, что чем больше  $M_n$ , тем сильнее скачок уплотнения: при  $M_n \rightarrow \infty$  давление также возрастает до бесконечности  $p_1/p_n \rightarrow \infty$ .

Ударная адиабата или адиабата Гюгонио. Подставляя в (12.6) значение  $\lambda_n^2$  из (11.25), преобразуя полученное совместно с (12.9), получим уравнение *ударной адиабаты*, — основное динамическое соотношение ударной волны:

$$\frac{p_1 - p_n}{Q_1 - Q_n} = \kappa \frac{p_1 + p_n}{Q_1 + Q_n} \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{Q_n} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \frac{p_n}{p_1}}{1 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} - \frac{p_n}{p_1}}. \quad (12.10)$$

Ударная адиабата устанавливает зависимость между плотностью и давлением газа до скачка и за скачком.

Отличие ударного сжатия газа от изоэнтропного (см. рис. 12.3 и 12.4). При изоэнтропном сжатии  $Q_2/Q_1 = \frac{1}{(p_2/p_1)^\kappa}$ , т. е. бесконечному увеличению давления соответствует бесконечное увеличение плотности. Ударная адиабата в координа-

тах  $is$ ,  $Ts$  и  $pv$  представляет геометрическое место точек, изображающих состояния газа за скачками различной интенсивности при заданных начальных условиях. Поэтому ударная адиабата в координатах  $is$  и  $Ts$  обращена выпуклостью вверх. При слабых скачках  $M_H \rightarrow 1$  ударная адиабата асимптотически стремится к изоэнтропе, а  $\sigma \rightarrow 1$ . С увеличением интенсивности скачков ударные потери и энтропия быстро возрастают, а  $\sigma$  уменьшается и ударная адиабата отходит от изоэнтропы. При  $M_H \rightarrow \infty$ ,  $p_1/p_H \rightarrow \infty$  ударная адиабата асимптотически стремится к предельной изохоре

$$Q_{1\max} = Q_H \lambda_{H\max}^2 = Q_H \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}. \quad (12.11)$$

При  $\kappa = 1,4$   $Q_{1\max}/Q_H = 6$ ; при  $\kappa = 1,2$   $Q_{1\max}/Q_H = 11$ .

Ограниченное увеличение плотности газа при ударном сжатии объясняется большим его разогревом (за счет потерь) по сравнению с разогревом при изоэнтропном сжатии.

Задача 12.1. Постройте графики изоэнтропы и ударной адиабаты в координатах  $Q_1/Q_H = f(p_1/p_H)$  для  $\kappa = 1,4$ . Определите изменение плотности  $Q_1/Q_H$  в этих процессах при  $p_1/p_H = 10$  и 20.

Падение полного давления на прямом скачке у плотнения. На основании (4.97) и (11.40) заключаем, что в энергетически изолированном процессе ударного сжатия, сопровождающемся волновыми потерями и ростом энтропии газа, полное давление уменьшается. Коэффициент сохранения полного давления удобнее рассчитать, пользуясь уравнением неразрывности в форме (11.44):

$$m \frac{\rho_H^* q(\lambda_H) S_H}{V T_H^*} = m \frac{\rho_1^* q(\lambda_1) S_1}{V T_1^*}.$$

При условии, что  $S_1 = S_H$ ,  $T_1^* = T_H^*$  и  $\lambda_1 = 1/\lambda_H$ , получим

$$\sigma = \frac{\rho_1^*}{\rho_H^*} = \frac{q(\lambda_H)}{q(\lambda_1)} = \frac{q(\lambda_H)}{q\left(\frac{1}{\lambda_H}\right)} = \lambda_H^2 \frac{\left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda_H^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}}{\left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{\lambda_H^2}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}}, \quad (12.12)$$

На рис. 12.4 приведена зависимость  $\sigma = f(\lambda_H)$  для прямого скачка, рассчитанная по (12.12). При  $\lambda_H \leq 1$  скачки и ударные потери отсутствуют и  $\sigma = 1$ . При малых  $\lambda_H \leq 1,25$  снижение полного давления невелико. При увеличении  $\lambda_H$  потери быстро возрастают и при  $\lambda_H = 2$  ( $M_H = 3,2$ ) —  $\sigma = 0,72$ , т. е. на скачке теряется 78% полного давления набегающего потока. При  $M_H \rightarrow \infty$  и  $\lambda_H \rightarrow \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}}$  и  $\sigma \rightarrow 0$ . Однако, при этом, потери не поглотят всего полного давления набегающего потока  $\rho_1^* = \sigma \rho_H^* \neq 0$ , так как при  $\rho_H = \text{const}$  и  $M_H \rightarrow \infty$ ,  $\rho_H^* \rightarrow \infty$ .

На основании уравнения состояния  $p^* = Q^* RT^*$  и  $T_1^* = T_H^*$  заключаем, что отношение плотностей заторможенного потока на пря-

мом скачке равно отношению полных давлений, т. е. может быть рассчитано по (12.12).

Проведенный анализ показывает, что изменение всех параметров на прямом скачке уплотнения определяется для данного  $\kappa = C_p/C_v$  только величиной  $\lambda_n$ .

Задача 12.2. Воздушный поток  $M_n = 3,16$  тормозится на прямом скачке уплотнения. Доказать, что:  $T_1^*/T_n^* = 1$ ;  $p_1^*/p_n^* = 0,286$ ;  $q_1^*/q_n^* = 0,286$ ;  $T_1/T_n = 2,27$ ;  $p_1/p_n = 11,6$ ;  $q_1/q_n = 4$ ;  $W_1/W_n = 0,25$ ;  $a_{кр1}/a_{крn} = 1$ ;  $W_{\max1}/W_{\max n} = 1$ ;  $\lambda_n = 2$ ;  $\lambda_1 = 0,5$ ;  $s_1 - s_n = 358$  Дж/кг·К.

Преобразование энергии на прямом скачке уплотнения. Сравним на диаграмме  $is$  рис. 12.3 изоэнтропное  $H-H^*$  и ударное  $H-I-I^*$  торможения одинаковых газовых потоков  $\lambda_n > 1$ . При изоэнтропном торможении  $H-H^*$  кинетическая энергия газа  $W_n^2/2 = h_n = i_n^* - i_n$  затрачивается на обратимое адиабатное сжатие газа. При этом энтропия  $s_n$ ,  $T^*$ ,  $p^*$ ,  $q^*$  и адиабатный теплоперепад  $h_n$  сохраняются неизменными и при адиабатном обратимом расширении газ вернется в исходное состояние  $H$ .

Ударное сжатие протекает с ударными потерями необратимо и лишь условно изображается линией  $H-I$ , соединяющей точки, отвечающие состоянию газа до и после скачка. На прямом скачке уплотнения при неизменной полной энергии ( $i_1^* = i_n^*$ ) кинетическая энергия набегающего потока  $W_n^2/2 = h_n = i_n^* - i_n$  частично сохраняется в виде кинетической энергии газа за скачком  $W_1^2/2 = i_1^* - i_1$ , частично превращается в теплосодержание газа  $i_1 - i_1'$  и частично диссипирует, что приводит к потере адиабатного теплоперепада  $i_1' - i_n = \Delta h = h_n - h_1$ . Этот процесс сопровождается ростом энтропии  $s_1 > s_n$  и снижением полного давления  $p_1^* < p_n^*$ . Из состояния  $i_n^*$ ,  $p_1^*$  газ не может изотропно вернуться в состояние  $H$  и приобрести исходную кинетическую энергию, а может расшириться до состояния  $I'$  и приобрести кинетическую энергию  $W_1'^2/2 = h_1 = i_1^* - i_1'$ .

Скорость распространения ударной волны в неподвижном газе. Если сверхзвуковой поток  $W_n > a$ , удерживающий ударную волну на месте (см. рис. 12.3), остановится, то ударная волна будет распространяться по неподвижному газу с той же по величине, но обратной по направлению скоростью  $W_n = -W_n$ . Поэтому для определения  $W_n$  составим уравнение неразрывности  $q_n W_n = q_1 W_1 = q W$  и количества движения  $(p_n - p_1) S = q W S (W_1 - W_n)$  для струйки  $H-I$ . Из этих уравнений найдем

$$W_n = |W_n| = \sqrt{\frac{p_1 - p_n}{q_1 - q_n} \frac{q_1}{q_n}} \quad \text{и} \quad W_1 = \sqrt{\frac{p_1 - p_n}{q_1 - q_n} \frac{q_n}{q_1}}. \quad (12.13)$$

Скорость ударной волны тем больше, чем она сильнее, т. е. чем больше  $p_1 - p_n$  и  $q_1/q_n$ . Вследствие того, что  $W_1 < W_n$ , при обращении движения за ударной волной установится массовый поток газа, скорость которого  $W_n$  будет меньше скорости ударной волны:

$$W_n = W_n - W_1 = \sqrt{\frac{(p_1 - p_n)(q_1 - q_n)}{q_1 q_n}}. \quad (12.14)$$

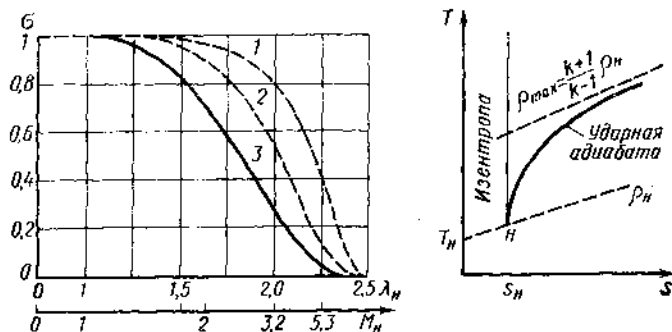


Рис. 12.4. Потери полного давления на скачках уплотнения:

1—три косых скачка+прямой; 2—косой скачок+прямой; 3—прямой скачок

Отставание массового потока от фронта волны и ударные потери приводят к тому, что ударная волна, предоставленная самой себе, быстро ослабевает и вырождается в звуковую волну

$$p_1 - p_n \rightarrow dp; \quad q_1 \rightarrow q_n; \quad W_n = \sqrt{\frac{dp}{dQ}} = a; \quad W_n = 0. \quad (12.15)$$

Как известно, за звуковой волной массовый поток газа отсутствует.

Для того, чтобы ударная волна распространялась в пространстве с постоянной скоростью, к ее фронту необходимо непрерывно подводить энергию. Например, условием постоянства скорости ударной волны перед сверхзвуковым самолетом является наличие тяги.

Другим примером стационарного распространения ударной волны является *детонационная волна*. Детонационной волной называется сочетание ударной волны и следующей за ней области экзотермической химической реакции. В ударной волне горючая газовая смесь сжимается так, что температура ее превышает температуру воспламенения. Смесь сгорает и непрерывно подпитывает энергией ударную волну. Количество энергии, выделяющееся в зоне горения, зависит от природы и состава горючей смеси. Поэтому каждой смеси соответствует своя определенная скорость детонационной волны.

## 12.2. КОСЫЕ СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

Косыми скачками уплотнения называются скачки, фронт которых составляет с вектором скорости сверхзвукового набегающего потока угол  $\alpha$ , отличный от прямого (рис. 12.5). Этот угол косого скачка, в зависимости от условий ( $M_n$ ,  $\omega_n$ ) изменяется в пределах от угла характеристики  $\alpha_0$  до  $90^\circ$ , т. е.  $\alpha_0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ . Косые скачки уплотнения возникают при обтекании сверхзвуковым

потоком плоского клина (рис. 12.5, а), внутреннего тупого угла (рис. 12.5, б) и конуса (рис. 12.5, в), а также при отсутствии отклоняющей поверхности, когда в сверхзвуковом потоке должно повыситься давление и измениться его направление. Если угол  $\omega$  отклоняющей поверхности меньше предельного значения  $\omega_{\max}$  (см. ниже), то возникают плоские или конические присоединенные косые скачки уплотнения, вершины которых совпадают с вершинами клина, внутреннего тупого угла или конуса.

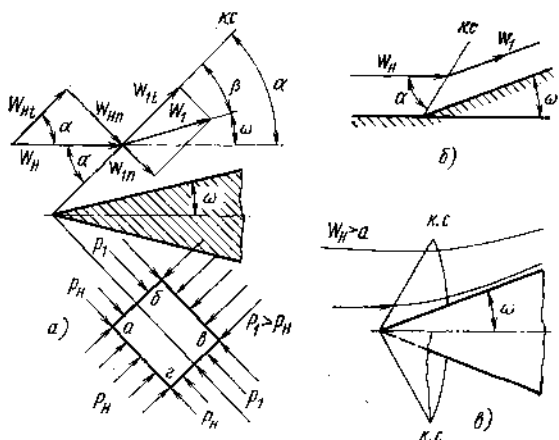


Рис. 12.5. Косые скачки уплотнения:

а—у клина; б—у внутреннего тупого угла; в—у конуса

Плоские косые скачки уплотнения имеют место в плоских воздухоборниках сверхзвуковых ВРД, в сверхзвуковых компрессорах и камерах сгорания, при обтекании крыльев сверхзвуковых летательных аппаратов. Конические скачки имеют место в осесимметричных сверхзвуковых диффузорах и при сверхзвуковых полетах заостренных осесимметричных тел.

Рассмотрим плоские косые скачки уплотнения как поверхности разрыва параметров идеального газа. Разложим вектор скорости набегающего потока  $W_n$  и потока за скачком  $W_1$  на нормальные к скачку и тангенциальные составляющие. Отметим их индексами  $n$  и  $t$  соответственно и запишем очевидные геометрические соотношения:

$$W_n^2 = W_{nn}^2 + W_{nt}^2; \quad W_1^2 = W_{1n}^2 + W_{1t}^2; \quad (12.16)$$

$$W_{nn} = W_n \sin \alpha; \quad W_{1n} = W_1 \sin \beta; \quad (12.17)$$

$$W_{nt} = W_n \cos \alpha; \quad W_{1t} = W_1 \cos \beta; \quad (12.18)$$

$$W_{nn} = W_{nt} \operatorname{tg} \alpha; \quad W_{1n} = W_{1t} \operatorname{tg} \beta; \quad (12.19)$$

$$\alpha = \omega + \beta, \quad (12.20)$$

где  $\beta$  — угол между фронтом косого скачка и вектором скорости  $W_1$ .

На косом скачке уплотнения нормальная составляющая скорости совершает скачок  $W_{1n} < W_{2n}$ , а тангенциальная составляющая не изменяется

$$W_{1t} = W_{2t}. \quad (12.21)$$

Эти утверждения доказываются так же, как для характеристики сжатия [см. формулы (11.72) и (11.73)] и позволяют сделать важный вывод: *косой скачок уплотнения можно представить как прямой скачок для нормальной составляющей скорости, сносимый вдоль фронта скачка со скоростью  $W_t$* . Поэтому косые скачки уплотнения можно рассчитывать по формулам расчета прямых скачков уплотнения, если в них заменить все параметры, включающие векторные величины —  $W_{1n}, W_1, T_{1n}^*, T_1^*, a_{кр1}, \lambda_{1n}, \lambda_1, M_{1n}, M_1, p_{1n}^*, p_1^*$ , на параметры, связанные с нормальными составляющими скоростей —  $W_{2n}, W_{1n}, T_{2n}^*, T_{1n}^*, a_{кр2}, \lambda_{2n}, \lambda_{1n}, M_{2n}, M_{1n}, p_{2n}^*, p_{1n}^*$ . Задача состоит в получении формул этой замены.

На косом скачке уплотнения энергетический обмен с внешней средой отсутствует и уравнение энтальпии  $q - I_{тех} = i_1^* - i_n^* = = C_p(T_1^* - T_n^*) = 0$  дает

$$i_1^* = i_n^*; T_1^* = T_n^*; a_{кр1} = a_{кр2}. \quad (12.22)$$

т. е. *полная энергия (температура торможения) на косом скачке уплотнения не изменяется.*

Температура частичного торможения это температура, которую примет газ не при полном его торможении, а при частичном энергетически изолированном погашении только нормальной составляющей скорости. Такую температуру покажет термометр, движущийся вдоль скачка со скоростью  $W_t$ .

Подставим в  $T^* = T + \frac{W^2}{2C_p}$  значения  $W_{2n}^2$  и  $W_1^2$  из (12.16) и получим

$$T^* = T_n^* = T_1^* = T_n + \frac{W_{2n}^2}{2C_p} + \frac{W_t^2}{2C_p} = T_1 + \frac{W_{1n}^2}{2C_p} + \frac{W_t^2}{2C_p}. \quad (12.23)$$

По определению температура частичного торможения  $T_n^* = T + \frac{W_n^2}{2C_p}$ , тогда из (12.23) с учетом (12.21) найдем

$$T_n^* = T_{2n}^* = T_{1n}^* = T_n + (W_{2n}^2 / 2C_p) = T_1 + \frac{W_{1n}^2}{2C_p} = \text{const}, \quad (12.24)$$

т. е., что *температура частичного торможения на косом скачке не изменяется.* Выразим  $T_n^*$  из (12.23) через  $T^*$

$$T_n^* = T^* - \frac{W_t^2}{2C_p} = T^* - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{W_t^2}{R}. \quad (12.25)$$

Условная критическая скорость звука это критическая скорость звука, подсчитанная по температуре частичного торможения

$$a_{крn} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} RT_n^*} \quad (12.26)$$

Подставляя в формулу (12.25) значения  $T^*$  и  $T_n^*$  из (12.19) и (12.26), найдем, что условная критическая скорость звука

$$a_{крn}^2 = a_{кр}^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} W_n^2 \quad (12.27)$$

на косом скачке, так же как  $a_{кр}$ , не изменяется.

Приведенные скорости  $\lambda_{nn}$  и  $\lambda_{1n}$  это отношение соответствующей нормальной составляющей скорости к условной критической скорости звука

$$\lambda_{nn} = W_{nn}/a_{крn}; \quad \lambda_{1n} = W_{1n}/a_{крn} \quad (12.28)$$

Вследствие того, что  $a_{крn} \neq a_{кр}$ ,  $\lambda_{nn}$  и  $\lambda_{1n}$  не являются нормальными составляющими приведенных скоростей  $\lambda_n$  и  $\lambda_1$ .

Подставляя  $W_{nn}^2$  из (12.17) и  $a_{крn}^2$  из (12.27) в  $\lambda_{nn}^2 = W_{nn}^2/a_{крn}^2$  и учитывая, что  $W_t^2 = W_n^2 \cos^2 \alpha$ , после преобразований получим

$$\lambda_{nn}^2 = \frac{\lambda_n^2 \sin^2 \alpha}{1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^2 \cos^2 \alpha} \quad (12.29)$$

Нормальные составляющие чисел  $M$  это отношение соответствующей нормальной составляющей скорости к местной скорости звука:

$$M_{nn} = W_{nn}/a_n = (W_n \sin \alpha)/a_n = M_n \sin \alpha; \quad M_{1n} = W_{1n}/a_1 = \\ = M_1 \sin \beta. \quad (12.30)$$

Для  $\lambda_n$  и  $M_n$  справедливы формулы связи (11.25) и, следовательно, по одной из заданных величин можно находить другую в таблицах газодинамических функций, не обращая внимания на индекс  $n$ .

Учитывая, что  $\tau(\lambda) = T/T^* = [\pi(\lambda)]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = [\varepsilon(\lambda)]^{\kappa-1}$ ,  $T_1^* = T_n^*$  и  $T_{1n}^* = T_{nn}^*$ , приходим к заключению, что для косых скачков справедливы следующие соотношения

$$\tau(\lambda_1)/\tau(\lambda_n) = \frac{\tau(\lambda_{1n})}{\tau(\lambda_{nn})}; \quad \pi(\lambda_1)/\pi(\lambda_n) = \pi(\lambda_{1n})/\pi(\lambda_{nn}); \\ \varepsilon(\lambda_1)/\varepsilon(\lambda_n) = \varepsilon(\lambda_{1n})/\varepsilon(\lambda_{nn}). \quad (12.31)$$

Записав уравнение состояния газа до и после скачка

$$p_n/(q_n T_n) = p_1/(q_1 T_1) = R, \quad (12.32)$$

закключаем, что соотношение между всеми скалярными параметрами до и после прямого скачка полностью сохраняется для косого скачка.

Теперь запишем формулы для расчета косых скачков уплотнения на основании формул расчета прямых скачков (12.1).

1. Основное кинематическое соотношение

$$\lambda_{1n}\lambda_{nn} = 1; W_{1n}W_{nn} = a_{крn}^2 \quad (12.33)$$

т. е. нормальная составляющая скорости за косым скачком всегда меньше скорости звука  $\lambda_{1n} = 1/\lambda_{nn}$ ,  $W_{1n} = a_{крn}^2/W_{nn}$ . Однако полная скорость за косым скачком  $W_1$  может быть как сверхзвуковой, так и дозвуковой.

Связь между  $\lambda_1$  и  $\lambda_n$  получим, используя (12.18) и (12.21):

$$\lambda_1 = \lambda_n \cos \alpha / \cos \beta, W_1 = W_n \cos \alpha / \cos \beta. \quad (12.34)$$

2. Уменьшение полного давления

$$\sigma_{ск} = \frac{p_1^*}{p_n^*} = \frac{p_{1n}^*}{p_{nn}^*} = \frac{q(\lambda_{nn})}{q(\lambda_{1n})} = \frac{q(\lambda_{nn})}{q(1/\lambda_{nn})} = \lambda_{nn}^2 \frac{\left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_{nn}^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}{\left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\lambda_{nn}^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}. \quad (12.35)$$

Несмотря на то, что  $p_n^* \neq p_{nn}^*$  и  $p_1^* \neq p_{1n}^*$ , их отношения одинаковы. Это следует из (12.31):  $\frac{p_1^*}{p_n^*} = \frac{p_{1n}^*}{p_{nn}^*} = \frac{p_1}{p_n} \frac{\pi(\lambda_{nn})}{\pi(\lambda_{1n})} = \frac{p_{1n}}{p_{nn}}$ .

3. Увеличение плотности газа

$$\rho_1/\rho_n = \lambda_{nn}^2. \quad (12.36)$$

4. Увеличение давления газа

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{y(\lambda_{nn})}{y(1/\lambda_{nn})} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_{nn}^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_n^2 \sin^2 \alpha - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}. \quad (12.37)$$

5. Увеличение температуры

$$\frac{T_1}{T_n} = \frac{\tau(\lambda_{1n})}{\tau(\lambda_{nn})} = \frac{\tau(1/\lambda_{nn})}{\tau(\lambda_{nn})} = \frac{\tau(1/\lambda_n)}{\tau(\lambda_n)}. \quad (12.38)$$

6. Ударная адиабата Гюгонио, как состоящая целиком из скалярных параметров, сохраняет ту же форму, что и для прямого скачка

$$\frac{p_1 - p_n}{\rho_1 - \rho_n} = \kappa \frac{p_1 + p_n}{\rho_1 + \rho_n}; \quad \frac{p_1}{\rho_n} = \frac{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \frac{p_n}{p_1}}{1 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{p_n}{p_1}}. \quad (12.39)$$

7. Угол между фронтом скачка и вектором скорости за скачком определим, разделив первую формулу (12.19) на вторую:

$$\operatorname{tg} \beta = (1/\lambda_{nn}^2) \operatorname{tg} \alpha. \quad (12.40)$$

Полученные соотношения показывают, что:



1. Изменение всех параметров газа на косом скачке уплотнения определяется только величиной  $\lambda_{н.н}$ , которая, в свою очередь, определяется приведенной скоростью набегающего потока  $\lambda_{н}$  и углом скачка (12.29).

2. При одинаковом  $M_{н} > 1$  ( $\lambda_{н} > 1$ ) косой скачок уплотнения всегда слабее прямого так как  $M_{н.н} = M_{н} \sin \alpha < M_{н}$  ( $\lambda_{н.н} < \lambda_{н}$ ). Например, при  $M_{н} = 3$ ,  $\sigma_{п.с} = 0,33$  (рис. 12.6). Определим по графику рис. 12.6 коэффициент сохранения полного давления для косого скачка  $\sigma_{п.с}$  при  $\alpha = 30^\circ$  и том же числе  $M_{н} = 3$ . Для этого перейдем к  $M_{н.н} = M_{н} \sin \alpha = 1,5$  и получим  $\sigma_{п.с} = 0,93$ .

Ударное сжатие газа на прямом и косом скачках уплотнения при одинаковых начальных условиях сравниваются в координатах  $Ts$  (рис. 12.6). Давление, температура и плотность на косом скачке повышаются в меньшей степени, чем на прямом, а волновые потери уменьшаются.

Система скачков уплотнения. Итак, если в полете с большим числом  $M_{н}$  перед входным отверстием диффузора ВРД возникает прямой скачок уплотнения, то потери полного давления воздушного потока оказываются так велики, что эффективная работа двигателя невозможна. Газовой динамикой разработан метод замены прямого скачка системой из нескольких более слабых косых скачков уплотнения (см. п. 16.2). При этом потери полного давления сильно снижаются. Например, при  $\lambda_{н} = 2$  ( $M_{н} \approx 3,2$ )  $\sigma_{п.с} \approx 0,28$ , а для системы из трех косых скачков и одного слабого прямого  $\sigma_{з.к.с+п.с} \approx 0,8$  (см. рис. 12.4). Замена прямых скачков уплотнения косыми приводит к снижению лобового сопротивления тел при сверхзвуковых полетах и т. д. Поэтому теория косых скачков уплотнения имеет большое практическое значение.

Расчет косых скачков. Обычно бывают известны  $\lambda_{н}$ ,  $p_{н}^*$ ,  $T_{н}^*$ ,  $\kappa$ ,  $R$  и угол отклоняющей плоскости  $\omega$ . Определению подлежат  $\lambda_{н.н}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и параметры за косым скачком. Формула (12.29) содержит два неизвестных —  $\lambda_{н.н}$  и  $\alpha$ . Поэтому к ней добавляются формулы (12.40) и (12.20). Итак, для определения  $\lambda_{н.н}$  необходимо решить совместно три уравнения

$$\lambda_{н.н}^2 = \frac{\lambda_{н}^2 \sin^2 \alpha}{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda_{н.н}^2 \cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\lambda_{н.н}^2} \operatorname{tg} \alpha \quad \text{и} \quad \alpha = \omega + \beta.$$

\* Если известен угол скачка  $\alpha$ , то  $\lambda_{н.н}$  определяется по (12.29) и по ее значению рассчитывается изменение всех параметров.

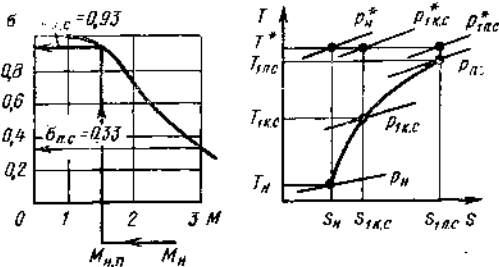


Рис. 12.6. Сравнение косого и прямого скачков

Решение для каждого заданного  $\lambda_{н}$  и  $\omega$  производится на счетно-решающей машине или методом подбора, который сводится к следующему:

1. Задаются произвольные значения угла скачка  $\alpha$  в пределах  $\alpha_0 < \alpha < 90^\circ$ , где  $\alpha_0 = \arcsin(1/M_{н})$ ;

2. Для каждого значения  $\alpha$  и заданных  $\lambda_{н}$  и  $k$  по формуле (12.29) рассчитывается  $\lambda_{н n}$ , по (12.40) — угол  $\beta$  и по (12.20) — угол  $\omega$ . Решением являются значения  $\alpha$ ,  $\lambda_{н n}$ ,  $\beta$ , соответствующие заданному углу  $\omega$ . После этого все параметры за косым скачком рассчитываются по формулам (12.35) ... (12.38).

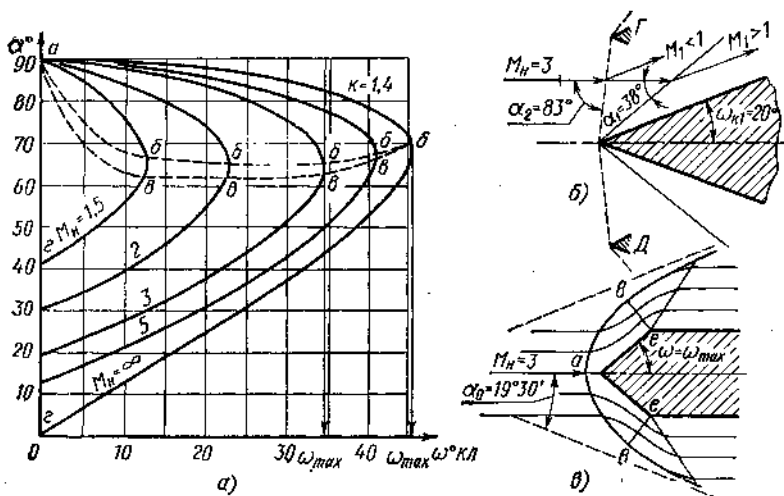


Рис. 12.7. Зависимость угла косого скачка от угла отклонения потока:

$a$ —диаграмма  $\alpha\omega$ ;  $b$ —присоединенные косые скачки;  $\delta$ —отошедшая головная волна

Расчеты упрощаются, если вместо определения  $\lambda_{н n}$  из (12.30) определить  $M_{н n} = M_{н} \sin \alpha$  и по его значению найти  $\lambda_{н n}$  по таблицам газодинамических функций для заданного  $k$ .

Для быстрого определения угла косого скачка  $\alpha$  в зависимости от заданных значений  $k = C_p/C_v$ , числа  $M_{н}$  и угла полуклина  $\omega$  строится график  $\alpha\omega$  или  $\alpha = f(\omega, M_{н})$ .

Анализ зависимости  $\alpha = f(\omega, M_{н})$  (рис. 12.7,  $a$ ). Одному и тому же числу  $M_{н}$  и углу отклонения потока  $\omega$  соответствуют два возможных положения косого скачка, например, при  $M_{н}=3$ ,  $\omega=20^\circ$ ;  $\alpha_1 \approx 38^\circ$  и  $\alpha_2 \approx 83^\circ$  (см. также рис. 12.7,  $b$ ). Скачки с меньшими углами  $\alpha$  (ветви  $\delta$ — $\delta$ ) называются *слабыми косыми скачками*, так как скорость за ними остается сверхзвуковой  $M_1 > 1$ . При  $\omega=0$  (точки  $\epsilon$ ) косые скачки уплотнения вырождаются в характеристики  $\alpha_2 = \alpha_0 = \arcsin(1/M_{н})$ , на которых отклонения потока бесконечно малы. При увеличении угла  $\omega$  слабые косые скачки становятся все сильнее и в точках  $\delta$  имеет место второй предел слабых косых скачков, за которыми  $M_1 = 1$ .

Скачки с большими углами  $\alpha$  (ветви  $b-a$ ) называются *сильными косыми скачками*, так как скорость за ними становится дозвуковой. При уменьшении угла  $\omega$  сильные косые скачки становятся все сильнее и в точке  $a$  косые скачки превращаются в самые сильные прямые скачки  $\alpha=90^\circ$  с  $\lambda_1=1/\lambda_n$ . При уменьшении числа  $M_n$  до единицы угол характеристики увеличивается до  $\alpha_0=90^\circ$ . В этом случае три точки —  $b$ ,  $v$ ,  $z$  совмещаются с точкой  $a$  (см. рис. 12.7,  $a$ ).

Опыт показывает, что в обычных условиях реализуются *устойчивые слабые косые скачки уплотнения* (сплошные линии на рис. 12.7,  $b$ ). Сильные косые скачки (пунктирные линии) возникают лишь в особых условиях, например, если в точках  $\Gamma$  и  $D$  имеются твердые тела, на которые опираются эти скачки. Если убрать тела  $\Gamma$  и  $D$ , то сильные скачки сами собой перейдут в слабые и угол уменьшится от  $\alpha_2$  до  $\alpha_1$ .

Точки  $b$  для каждого  $M_n$  (см. рис. 12.7,  $a$ ) соответствуют максимально возможному отклонению потока на присоединенных косых скачках. С увеличением  $M_n$  угол  $\omega_{\max}$  увеличивается и при  $M_n=\infty$  достигает  $46^\circ$ . Если угол полуклина  $\omega_{кл} > \omega_{\max}$ , то поворот потока на этот угол на косом скачке уплотнения оказывается невозможным и косой скачок перестраивается в отсоединенную криволинейную головную волну (см. рис. 12.7,  $v$ ). На участках отсоединенной головной волны реализуются все возможные углы косых скачков для данного  $M_n$  от  $\alpha=90^\circ$  на оси (точка  $a$ ) до  $\alpha=\alpha_0=\arcsin(1/M_n)$  в бесконечном удалении от оси. На участке  $a-v$  реализуются сильные скачки. В зоне *аве* дозвуковой поток поворачивает в сужающихся струйках тока на угол  $\omega_{кл} > \omega_{\max}$  и разгоняется к линии  $v-e$  до  $\lambda=1$ . За линией  $v-e$  поток в расширяющихся линиях тока ускоряется до сверхзвукового. За точкой  $v$  начинается область слабых косых скачков. Итак, дозвуковой поток может поворачиваться на любой угол, а сверхзвуковой на косом скачке не более, чем на  $\omega_{\max}$ . Когда же сверхзвуковой поток должен повернуться на угол больший  $\omega_{\max}$ , он переходит в дозвуковой.

Отсоединенная головная волна возникает также при сверхзвуковом обтекании затупленных тел и перед входным отверстием воздухозаборника ВРД, когда он не может пропустить весь воздух сверхзвуковой струи равного с ним поперечного сечения.

**Задача 12.3.** Воздушный поток  $M_n=3,16$ ,  $p_n^*=10^6$  Па,  $T_n^*=625$  К обтекает клин с полууглом  $\omega=20^\circ$ . Используя диаграмму  $\alpha\omega$ , доказать, что:  $\alpha=40^\circ$ ,  $T_1^*/T_n^*=1$ ,  $p_1^*/p_n^*=p_{1n}^*/p_{nn}^*=0,71$ ,  $T_1/T_n=1,7$ ,  $p_1/p_n=4,62$ ,  $q_1/q_n=2,7$ ,  $W_1/W_n=0,815$ ,  $s_1-s_n=102$  Дж/кг·К,  $p_{nn}^*=1,75 \cdot 10^5$ ,  $p_1=9,7 \cdot 10^4$  Па,  $T_{nn}^*=380$ ,  $T_1=356$  К,  $\lambda_1=1,62$ ,  $\lambda_{1n}=0,61$ ,  $a_{кр}=458$  м/с,  $a_{крn}=357$ ,  $M_{nn}=2,03$ ,  $\lambda_{nn}=1,64$ . Сопоставить результаты с результатами расчета прямого скачка (см. задачу 1.2.2) и изобразить изменение параметров в  $is$ -координатах.

**Особенности сверхзвукового осесимметричного обтекания кругового конуса.** На рис. 12.8,  $a$  и рис. 12.8,  $b$  для наглядности совмещены конические (сверху) и плоские (снизу) течения ( $M_n=2$ ) при равных полууглах конуса и

Клина  $\omega_{\text{кон}} = \omega_{\text{кл}} = 20^\circ$  (см. рис. 12.8, а) и при одинаковых углах конического и плоского скачков  $\alpha_{\text{кон}} = \alpha_{\text{кл}} = 38^\circ$  (см. рис. 12.8, б). Как это было показано ранее и как это следует из рис. 12.8, а и б, в плоском обтекании клина все параметры сверхзвукового потока изменяются только на косом скачке, за которым поток течет параллельно поверхности клина без каких-либо изменений. Упрощающим расчет обстоятельством является то, что направление скорости за плоским косым скачком заранее известно.

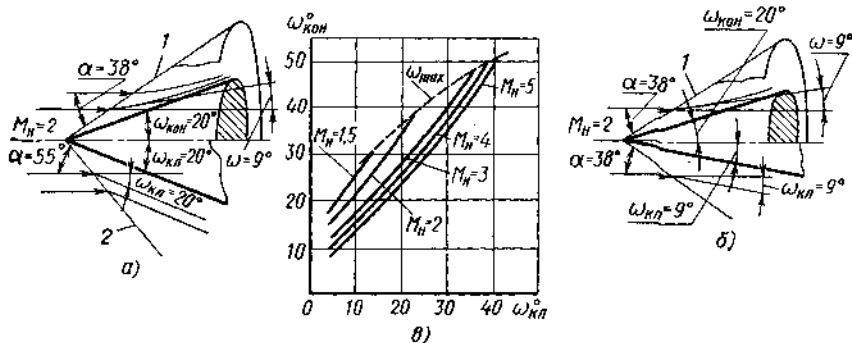


Рис. 12.8. Сравнение конических и плоских косых скачков:

1—конический косой скачок; 2—то же плоский; а—при  $\omega_{\text{кон}} = \omega_{\text{кл}}$ ; б—при одинаковых углах скачков; в—диаграмма  $\omega_{\text{кон}} = f \omega_{\text{кл}}$

Коническое течение является пространственным. Это усложняет его математический анализ и обуславливает следующие особенности. Острые конуса меньше возмущает сверхзвуковой поток, чем бесконечный плоский клин. Поэтому при одинаковых полууглах конуса и клина конический скачок слабее плоского, т. е. имеет меньший угол наклона (на рис. 12.8, а  $M_N = 2$ ,  $\omega_{\text{кон}} = \omega_{\text{кл}} = 20^\circ$ ,  $\alpha_{\text{кон}} = 38^\circ$ ,  $\alpha_{\text{кл}} = 55^\circ$ ). Вследствие того, что фронт скачка является поверхностью разрыва ( $\delta = 0$ ), скачкообразное изменение параметров на нем не зависит от формы поверхности—плоской или конической. Поэтому, если известно число  $M_N$  и угол  $\alpha$  конического скачка, то изменение всех параметров на этом коническом скачке и угол поворота потока на нем  $\omega$  могут быть рассчитаны по уже полученным формулам для плоского косого скачка (12.29), (12.40), (12.20) и т. д. Так как конический скачок слабее плоского, то угол поворота потока на нем меньше угла полуконуса  $\omega < \omega_{\text{кон}}$ . Для рассматриваемого примера  $M_N = 2$ ,  $\alpha = 38^\circ$  по диаграмме  $\alpha \omega$  (см. рис. 12.7) находим угол поворота потока  $\omega \cong 9^\circ < \omega_{\text{кон}} = 20^\circ$ . Вследствие того, что конус непроницаем для газа, поток за скачком плавно поворачивает и течет в криволинейных суживающихся каналах, образованных поверхностями тока и в бесконечности принимает направление, параллельное образующей конуса. В этих суживающихся каналах сверхзвуковой поток изэнтропно тормозится. Итак, торможение сверхзвукового потока в ко-

ническом течении складывается из ударного (на коническом скачке) и изоэнтропного (за скачком при обтекании конуса). Поэтому торможение сверхзвукового потока при коническом течении сопровождается меньшими потерями, чем при плоском. Следует иметь в виду, что уменьшение расстояния между линиями тока при течении около поверхности конуса частично компенсируется увеличением радиуса кольцевого сечения струйки и площадь поперечного сечения ее уменьшается незначительно. Поэтому, несмотря на то, что за коническим скачком при обтекании конуса поток поворачивает на достаточно большой угол ( $\Delta\omega = \omega_{\text{кон}} - \omega = 20 - 9 = 11^\circ$ ), параметры в изоэнтропном сжатии изменяются также незначительно. Учитывая все это, можно приближенно рассчитывать параметры газа по состоянию непосредственно за коническим скачком.

На рис. 12.8, б показано, что при  $M_{\text{н}} = 2$  конус с полууглом  $\omega_{\text{кон}} = 20^\circ$  и клин с  $\omega_{\text{кл}} = 9^\circ$  образуют конический и плоский скачки с одинаковыми  $\alpha = 38^\circ$ . С этой точки зрения клин с  $\omega_{\text{кл}} = 9^\circ$  можно считать при  $M_{\text{н}} = 2$  эквивалентным конусу с  $\omega_{\text{кон}} = 20^\circ$ .

На рис. 12.8, в представлена зависимость угла полуконуса от полуклина  $\omega_{\text{кон}} = f(\omega_{\text{кл}})$ , для которых конические и плоские скачки имеют одинаковую интенсивность, для чисел  $M_{\text{н}} = 1,5; 2; 3; 4$  и 5. Пунктиром на графике нанесены значения  $\omega_{\text{max}}$  для клина и конуса. При  $\omega > \omega_{\text{max}}$  возникает отошедшая криволинейная ударная волна. Из графика следует, что  $\omega_{\text{кон max}} > \omega_{\text{кл max}}$ . Например, при  $M_{\text{н}} = 2$   $\omega_{\text{кл max}} = 23^\circ$ , а  $\omega_{\text{кон max}} = 38^\circ$ .

Методика расчета конических скачков при заданных числе  $M_{\text{н}}$  и угле полуконуса  $\omega_{\text{кон}}$ :

1. По заданным  $\omega_{\text{кон}}$  и  $M_{\text{н}}$  определяется эквивалентное значение угла  $\omega_{\text{кл эквив}}$  по графику рис. 12.8, б.

2. По найденному значению  $\omega_{\text{кл эквив}}$  определяется угол конического скачка  $\alpha_{\text{кон}}$  по диаграмме  $\alpha\omega$  (см. рис. 12.7, а).

3. Конический скачок рассчитывается как плоский по заданному  $M_{\text{н}}$  и определенному  $\alpha_{\text{кон}}$ .

**Задача 12.4.** Воздушный поток  $M_{\text{н}} = 3,16$ ,  $p_{\text{н}}^* = 10^6$  Па,  $T_{\text{н}}^* = 625$  К обтекает конус с полууглом  $\omega = 20^\circ$ . Рассчитать параметры за коническим скачком и сопоставить с результатами задачи 12.3.

### 12.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ТОРМОЖЕНИЯ $p_{\text{н}}^*$ И ПРИВЕДЕННОЙ СКОРОСТИ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ

Если трубка Пито—Прандтля (см. рис. 9.14, а) установлена в сверхзвуковом потоке, то перед ней возникает ударная волна. Осевая газовая струйка ударно тормозится на центральном участке отсоединенной криволинейной ударной головной волны. Диаметр струйки, попадающей в центральное отверстие трубки Пито—Прандтля, мал. Поэтому с достаточной для практики точностью полагают, что она тормозится на прямом скачке уплотнения. За скачком  $\lambda_1 = (1/\lambda_{\text{н}}) < 1$  и давление торможения  $p_1^* = \sigma_{\text{п.с}} p_{\text{н}}^*$ . При подходе к центральному отверстию струйка полностью энерги-

чески изолированно и изэнтропно затормаживается так, что манометр, подсоединенный к трубке полного давления замерит давление торможения за прямым скачком уплотнения  $p_1^*$ . Если боковые отверстия для замера статического давления находятся на расстоянии более пяти диаметров насадки от переднего края, то, как показывают опыты, давление в них устанавливается равное статическому давлению  $p_H$  в невозмущенном сверхзвуковом потоке.

Для определения приведенной скорости  $\lambda_H$  невозмущенного сверхзвукового потока приведенной скорости  $\lambda_H$  подставим в формулу (12.12) значение  $p_H^* = p_H / \pi(\lambda_H)$ , получим

$$\frac{p_1^*}{p_H} = \frac{q(\lambda_H)}{q(1/\lambda_H)\pi(\lambda_H)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_H^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)\left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\lambda_H^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}. \quad (12.41)$$

Эта формула является разновидностью формулы Релея. Она может быть представлена графиком или таблицей  $p_1^*/p_H = f(\lambda_H)$ , по которым можно быстро определить  $\lambda_H$ , зная измеренные в эксперименте значения  $p_1^*$  и  $p_H$ .

Давление торможения определится как  $p_H^* = p_H / \pi(\lambda_H)$ , а скорость

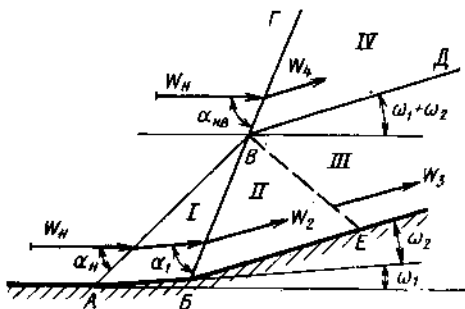
$$W_H = \lambda_H a_{кр H} = \lambda_H \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} RT_H^*}.$$

Как видим, для расчета скорости должна быть известна или измерена температура торможения  $T_H^*$  (см. рис. 11.1).

Для уменьшения возмущения сверхзвукового потока трубки Пито—Прандтля выполняются минимального диаметра с головкой в виде усеченного конуса.

## 12.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ И ОТРАЖЕНИЕ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ

Скачки взаимодействуют при их пересечении друг с другом, а также с волнами разрежения, твердыми поверхностями и границами свободных сверхзвуковых струй.



Скачками одного семейства называются скачки, поворачивающие поток в одну и ту же сторону. Скачки различных семейств поворачивают поток в разные стороны.

Пересечение двух косых скачков АВ и ВВ одного семейства (рис. 12.9) приводит к образованию выше точки пересечения В одного более сильного скачка ВЕ. Условиями равновесия такой системы являются:

Рис. 12.9. Пересечение скачков

1) равенство угла  $\omega_1 + \omega_2$  поворота потока на сильном скачке  $ВГ$  суммарному углу поворота потока на скачках  $АВ$  и  $ВВ$ ;

2) равенство статических давлений  $p_3 = p_4$  в областях  $III$  и  $IV$ .  
 Этих условий достаточно для расчета системы. Углы скачков  $\alpha_{AB}$  и  $\alpha_{BB}$  определяются по диаграмме  $\alpha\omega$  (см. рис. 12.7, а) для  $\omega_1$  и  $M_{H1}$ ,  $\omega_2$  и  $M_1$ ,  $(\omega_1 + \omega_2)$  и  $M_H$  соответственно.

При некотором сочетании углов  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $M_H$  может оказаться, что  $p_2 \neq p_4$ . В этом случае из точки  $B$  выходит отраженный скачок

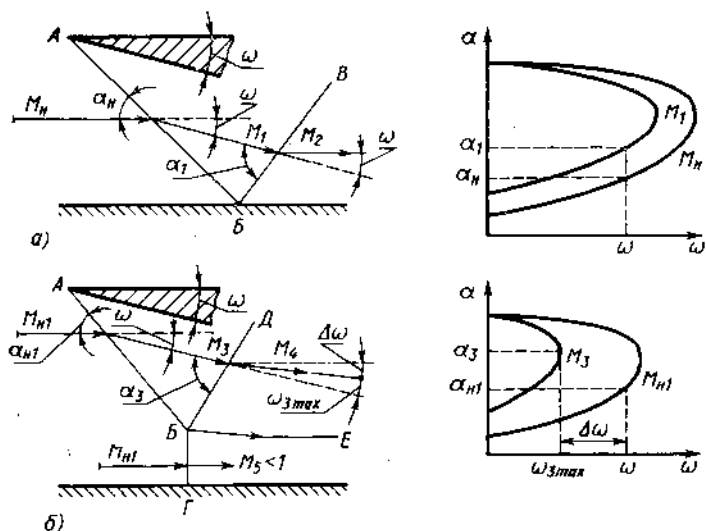


Рис. 12.10. Отражение косога скачка от твердой поверхности:

а—правильное отражение; б—маховское отражение

уплотнения  $BE$  (при  $p_2 < p_4$ ) или волна разрежения (при  $p_2 > p_4$ ), обеспечивающие условие  $p_3 = p_4$ . Этот скачок уплотнения или волна разрежения получаются очень слабыми и в приближенных расчетах не учитываются. Полное давление за системой скачков в области  $III$  получается всегда больше, чем в области  $IV$  за одним сильным скачком  $p_3^* > p_4^*$ . При  $p_3 = p_4$  это значит, что поток в области  $III$  течет с большей скоростью, чем в области  $IV$  ( $W_3 > W_4$ ), и линия тока  $BD$  является поверхностью тангенциального разрыва скоростей, которая не может препятствовать выравниванию статического давления в областях  $III$  и  $IV$ . В вязком газе вместо поверхности тангенциального разрыва возникает вихревой струйный пограничный слой с плавным изменением скорости от  $W_3$  до  $W_4$ . Вихреобразование связано с диссипацией энергии и дополнительным уменьшением полного давления.

Правильное отражение скачка от плоской стенки (рис. 12.10, а). На косом скачке уплотнения  $АВ$  сверхзвуковой поток тормозится от  $M_{H1}$  до  $M_1$  и поворачивает по часовой стрелке в сторону стенки на угол  $\omega$ . Непосредственно у стенки по-

ток повернуть не может, поэтому в точке *Б* возникает отраженный косой скачок, на котором поток  $M_1$  тормозится и поворачивает на тот же угол  $\omega$  в противоположную сторону, после чего течет с  $M_2$  параллельно стенке. Скачки *АВ* и *ВВ* принадлежат к различным семействам. Параметры этого течения могут быть определены по диаграмме  $\alpha\omega$ : по заданным  $M_H$  и  $\omega$  определяются углы  $\alpha_H$  и  $\beta = \alpha_H - \omega$ ; затем  $\lambda_1 = \lambda_H \cos \alpha / \cos \beta$  и  $M_1$ . По  $\omega$  и  $M_1$  определяется  $\alpha_1$ .

Маховское отражение (рис. 12.10, б). При некоторых сочетаниях  $\omega$  и  $M_{H1} < M_H$  может установиться такое малое  $M_3$ , для которого максимальный угол отклонения потока  $\omega_{3max}$  меньше  $\omega$ , потребного для придания потоку направления, параллельного стенке. В этом случае правильное отражение скачка оказывается невозможным и возникает маховское отражение с  $Y$ -образным скачком с тройной точкой *Б*. Точка отражения косого скачка *Б* отходит от стенки и между ней и стенкой возникает сильный скачок *БГ*, близкий к прямому. Поэтому поток, текущий около стенки, не изменяет направления и за скачком становится дозвуковым ( $M_5 < 1$ ). На косом скачке *БД* поток  $M_3$  поворачивает на угол  $\omega_{3max} = \omega - \Delta\omega$  и течет с  $M_4 > M_5$  под углом  $\Delta\omega$  к стенке. Величина  $\Delta\omega$  легко определяется в диаграмме  $\alpha\omega$ . На линии тока *БЕ* имеет место тангенциальный разрыв скорости, который в случае реальной жидкости превращается в струйный турбулентный пограничный слой. Статические давления в потоках одинаковы  $p_4 = p_5$ , а полное — больше за системой скачков  $p_4^* > p_5^*$ . Параллельно стенке направление потока получает в криволинейных линиях тока, подобных *БЕ*.

Взаимодействие скачка уплотнения *АН* с волной разрежения, т. е. с множеством характеристик, расположенных внутри угла *НСК* (рис. 12.11), приводит к постепенному уменьшению интенсивности скачка, который в точке *К* вырождается в характеристику *КД*. Это объясняется тем, что за каждой волной разрежения статическое давление уменьшается и скорость воз-

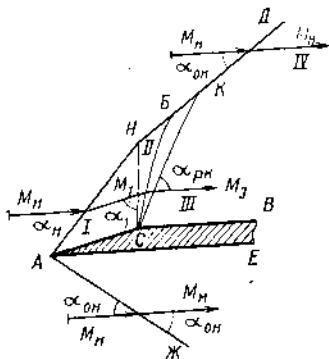


Рис. 12.11. Взаимодействие скачка уплотнения с волной разрежения

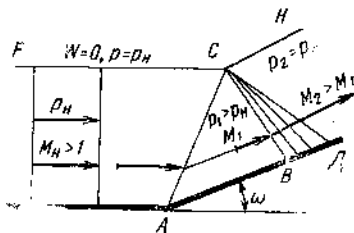


Рис. 12.12. Взаимодействие скачка с границей свободной струи



растает, например  $p_2 < p_1$  и скачок *НБ* слабее *АН*. Статическое давление на характеристике *КД* или *АЖ* не изменяется —  $p_4 = p_n$  и должно быть таким же, как в области *III*, т. е.  $p_4 = p_k = p_3 = p_n$ . Поэтому в сверхзвуковом потоке отбор статического давления для его измерения можно производить либо со стенки *АЕ*, параллельной потоку, либо с поверхности *СВ* за волной разрежения. На поверхности *АС* за косым скачком *АН* статическое давление больше, чем в набегающем потоке

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{2k}{k+1} M_n^2 \sin^2 \alpha_n - \frac{k-1}{k+1}.$$

Полное давление в области *IV* равно полному давлению в набегающем потоке  $p_4^* = p_n^*$  и больше, чем полное давление в областях *III* и *I*:  $p_4^* = p_n^* > p_3^*$ . При  $p_3 = p_n$  это соответствует  $M_n = M_4 > M_3$ .

Отражение косого скачка *АС* от границы свободной струи *FCН* (рис. 12.12). Косой скачок *АС* взаимодействует с границей струи в точке *С*. В точке *С* косой скачок отражается в виде волны разрежения *СВД*, проходя через которую сверхзвуковой поток  $M_1$  ускоряется до  $M_2$ , а давление снижается до давления окружающей среды  $p_2 = p_n$ . Иначе течение протекать не может, так как область *НСД* отделяется от окружающей среды только границей струи *СН*, которая не способна удерживать разность давлений. Граница струи отклоняется в точке *С* от своего первоначального положения на угол, равный сумме углов отклонения потока в косом скачке и в волне разрежения *СВД*.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ГАЗОВЫЙ ПОТОК

Рассмотрим ускорение и торможение газовых потоков за счет расширения и сужения каналов или трубок тока  $dS/S \geq 0$  при отсутствии остальных воздействий  $dG = dq = dl_{\text{тех}} = dl_{\text{тр}} = 0$ .

В этих энергетически изолированных и изэнтропных течениях параметры торможения и их производные  $i^*$ ,  $T^*$ ,  $p^*$ ,  $q^*$ ,  $a_{\text{кр}}$ ,  $W_{\text{max}}$ ,  $a^*$  постоянны. В соответствии с уравнением Бернулли  $dp/q = -WdW$  ускорение всегда сопровождается уменьшением статического давления, т. е. адиабатным расширением, а торможение — повышением давления или адиабатным сжатием. При этом происходит обратимое взаимопревращение кинетической и потенциальной энергий газа при неизменной его полной энергии  $i^* = i_1 + \frac{W_1^2}{2} = i_2 + \frac{W_2^2}{2} = C_p T^* = \text{const}$ . Равнодействующая сил давления  $R = G(W_2 - W_1)$  является единственной силой, ускоряющей  $R > 0$  или тормозящей  $R < 0$  газ на участке 1—2 канала рассматриваемого течения.

Уравнение закона обращения воздействия (11.59) для данного случая

$$(M^2 - 1) dW/W = dS/S \quad (13.1)$$

называется формулой Гюгонно и показывает, что дозвуковой поток  $M < 1$  ускоряется в сужающихся каналах и тормозится в расширяющихся, а сверхзвуковой поток  $M > 1$  ускоряется в расширяющихся и тормозится в сужающихся.

На практике широко используются каналы переменного сечения. Это прежде всего сопла и диффузоры реактивных двигателей и их элементов: компрессоров, камер сгорания и турбин. Изучение этих важнейших течений как одномерных при отсутствии других воздействий позволяет установить их основные закономерности, а затем оценить особенности реальных течений и потери.

### 13.1. УСКОРЕНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ ВНЕШНЕГО ТУПОГО УГЛА (ТЕЧЕНИЕ ПРАНДТЛЯ—МАЙЕРА)

Криволинейную поверхность тела всегда можно, с известным приближением, заменить граненой. Тогда расчет обтекания тела сверхзвуковым потоком сведется к расчету обтекания внутренних тупых углов (к расчету волн сжатия) и внешних тупых углов, т. е. к расчету течения Прандтля—Майера или волн расширения.

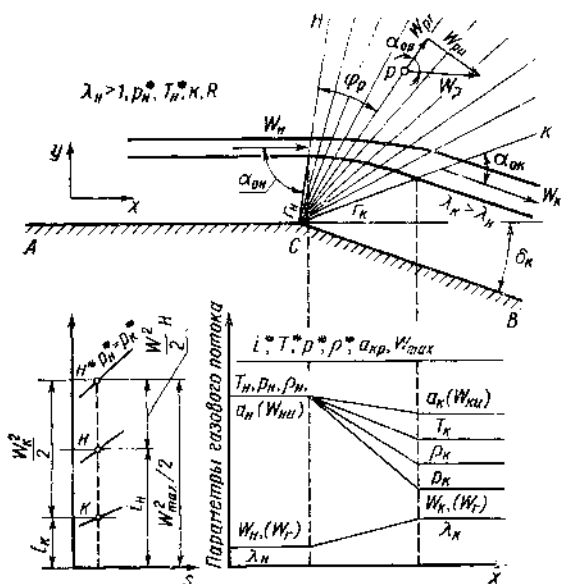


Рис. 13.1. Течение Прандтля—Майера

На рис. 13.1 представлена схема этого течения. Две полубесконечные стенки образуют внешний тупой угол  $ACB = 180^\circ + \delta_k$ . Сверхзвуковой  $\lambda_n > 1$  равномерный плоскопараллельный поток идеального газа течет вдоль стенки  $AC$  энергетически изолированно и изэнтропно.

Требуется определить изменение параметров потока при обтекании угла  $ACB$ .

Физическая картина течения. Вершина угла  $C$  является источником слабых возмущений, которые в виде бесчисленного множества прямолинейных характеристик разрежения располагаются в пределах угла  $HCK$ . Первая характеристика разрежения  $HC$  располагается под углом  $\alpha_{он} = \arcsin(1/M_n)$  к вектору скорости невозмущенного потока (см. п. 11.7). Прямолинейность характеристик указывает на неизменность всех параметров потока до встречи с ними. Конечное изэнтропное расширение газа по закону  $\rho =$

$=q^* \text{const}$ , ускорение  $\lambda_K > \lambda_u$  и поворот потока на угол  $\delta_K$  в течении Прандтля—Майера происходит только в пределах угла  $HCK$  и является результатом бесчисленного множества элементарных скачков разрежения на характеристиках (см. рис. 13.1).

Опыты показывают, что сверхзвуковое течение реального газа в области внешнего тупого угла близко следует законам изоэнтропного течения.

Расчет течения Прандтля—Майера удобно производить в полярной системе координат  $r, \varphi$  с полюсом в точке  $C$ . Параметры потока вдоль радиуса вектора не изменяются ( $\partial/\partial r = 0$ ), так как он совпадает с характеристиками. Это дает возможность заменить частные производные по  $\varphi$  на обычные  $\partial/\partial \varphi = d/d\varphi$ .

Параметры торможения в этом течении не изменяются и все остальные параметры могут быть рассчитаны по формулам  $T = T^* \tau(\lambda)$ ,  $p = p^* \pi(\lambda)$ ,  $\rho = \rho^* \epsilon(\lambda)$ ,  $W = a_{кр} \lambda$ . Поэтому задачей исследования является определение приведенной скорости  $\lambda = \lambda(\varphi)$ . Для этого используются следующие уравнения:

1) соотношение между скоростью  $W$  и ее нормальной  $W_u$  и радиальной  $W_r$  составляющими (см. рис. 13.1)

$$W^2 = W_u^2 + W_r^2, \quad (1)$$

разделив (1) на  $a_{кр}^2$ , получим

$$\lambda^2 = \lambda_u^2 + \lambda_r^2, \quad (2)$$

2) равенство нормальной составляющей скорости и местной скорости звука (см. рис. 11.7)

$$W_u = a; \quad (3)$$

3) уравнение энтальпии (11.21) для  $q = l_{тек} = 0$  с учетом (1) и (2)

$$i^* = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{W_u^2}{2} + \frac{W_r^2}{2} = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{a_{кр}^2}{2} = \text{const}; \quad (13.2)$$

4) уравнение отсутствия циркуляции скорости по любому замкнутому контуру  $a b \gamma z$  в пределах угла  $HCK$  (рис. 13.2), которое получим на основании теоремы Томсона (см. п. 3.5), условия которой полностью выполняются при течении Прандтля—Майера:

$$\Gamma_{ab\gamma z} = W_r dr + W_u (r + dr) d\varphi - (W_r + dW_r) dr - W_u r d\varphi = 0.$$

Производя сокращения, опуская члены второго порядка малости, получим уравнение отсутствия циркуляции

$$\frac{1}{a_{кр}} \frac{dW_r}{d\varphi} = \frac{1}{a_{кр}} W_u; \quad \frac{d\lambda_r}{d\varphi} = \lambda_u. \quad (13.3)$$

Разделив (13.2) на  $\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{a_{кр}^2}{2}$  и подставим  $\lambda_u$  из (13.3), получим

$$\left( \frac{d\lambda_r}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda_r^2 = 1 \quad \text{или} \quad \frac{d \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda_r \right)}{\sqrt{1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda_r^2}} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} d\varphi.$$

Интегрируя, найдем

$$\arcsin \left( \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \lambda_r \right) = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} (\varphi + c) \text{ или}$$

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \sin \left[ \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \varphi + c \right]. \quad (13.4)$$

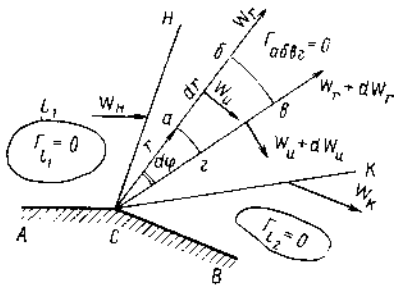


Рис. 13.2. Иллюстрация к доказательству отсутствия циркуляции скорости в пределах угла  $HCK$

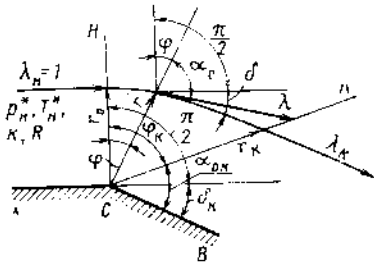


Рис. 13.3. Обтекание внешнего тупого угла звуковым потоком  $\lambda_n = 1$

Подставив в (13.3) значение  $\lambda_r$  из (13.4), найдем  $\lambda_u$  и по (2)  $\lambda = \lambda(\varphi)$ :

$$\lambda_u = \cos \left[ \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \varphi + c \right]; \quad (13.5)$$

$$\lambda^2 = \lambda_u^2 + \lambda_r^2 = \cos^2 \left[ \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \varphi + c \right] + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \sin^2 \left[ \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \varphi + c \right]. \quad (4)$$

Прибавив к правой части (4)  $\sin^2 \left[ \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \varphi + c \right]$  со знаком плюс и минус и упростив, получим искомую  $\lambda = \lambda(\varphi)$ :

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{\kappa-1} \sin^2 \left[ \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \varphi + c \right]. \quad (13.6)$$

Частный случай течения  $\lambda_n = M_n = 1$ . При  $M_n = 1$   $\sin \alpha_{0n} = 1/M_n = 1$  и первая характеристика  $CH$  перпендикулярна к вектору скорости  $W_n$  и к стенке  $AC$ . Поэтому ее удобно принять за начало отсчета углов  $\varphi$  (рис. 13.3). Подставив в (13.6)  $\varphi = 0$  и  $\lambda = \lambda_n = 1$  найдем, что постоянная интегрирования  $c = 0$  и (13.6) принимает вид

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{\kappa-1} \sin^2 \left[ \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \varphi \right], \quad (13.7)$$

позволяющий рассчитать  $\lambda$  для любого угла  $\varphi$  в пределах угла  $HCK$ .

Связь между углами характеристики  $\alpha_0$ , поворота характеристики  $\varphi$  и поворота потока  $\delta$  очевидна из рис. 13.3.

$$\delta + \frac{\pi}{2} = \alpha_0 + \varphi, \quad (13.8)$$

где 
$$\alpha_0 = \arcsin 1/M. \quad (13.9)$$

Формулы (13.7) ... (13.9) позволяют произвести полный расчет течения при  $\lambda_n = 1$  и показывают, что при увеличении  $\varphi$ , а следовательно и  $\delta$ , приведенная скорость  $\lambda$  увеличивается, а давление, температура и плотность уменьшаются вплоть до нуля (полный вакуум). При этом скорость и приведенная скорость достигают максимально возможных значений  $W_{\max} = \sqrt{2i^*}$ ,  $\lambda_{\max}^2 = \frac{k+1}{k-1} (M = \infty)$ .

Дальнейшее ускорение и поворот потока оказываются невозможными.

Предельные углы поворота характеристики и потока определим, подставив в (13.7) значение  $\lambda_{\max}^2$ , а в (13.8) — значение  $\varphi_{\max}$  и  $\alpha_0 = 0$  (при  $M = \infty$ ):

$$\varphi_{\max} = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \frac{\pi}{2}, \quad (13.10)$$

$$\delta_{\max} = \left( \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2}. \quad (13.11)$$

**Задача 13.1.** Подсчитать  $\varphi_{\max}$  и  $\delta_{\max}$  для  $k=1,67; 1,4; 1,3; 1,2$ . Ответ: для  $k=1,4$   $\varphi_{\max}=220^\circ 27'$ ,  $\delta_{\max}=130^\circ 27'$ ;  $k=1,2$ ;  $\varphi_{\max}=300^\circ$ ,  $\delta_{\max}=210^\circ$ .

Если  $\delta_k > \delta_{\max}$  и истечение происходит в вакуум, то поток поворачивает только на угол  $\delta_{\max}$  и течет не по стенке  $CB$ , а по лучу  $KC$ , соответствующему  $\delta_{\max}$  и  $\varphi_{\max}$ . Между этой характеристикой  $KC$  и стенкой  $CB$  образуется пространство  $BCK$ , в котором отсутствуют молекулы исходного потока. Это явление называется отрывом сверхзвукового потока.

Уравнение линий тока течения Прандтля—Майера при  $\lambda_n = 1$  получим, рассмотрев подобные треугольники — скоростей и криволинейный, образованный отрезком линии тока,  $dr$  и дугой  $rd\varphi$  (рис. 13.4):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dr}{rd\varphi} = \frac{W_r}{W_u} \frac{a_{кр}}{a_{кр}} = \frac{\lambda_r}{\lambda_u}. \quad (13.12)$$

Подставляя в дифференциальное уравнение линии тока (13.12) значения  $\lambda_r$  и  $\lambda_u$  из (13.4) и (13.5), разделяя переменные, учитывая что  $\sin \left( \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right) d\varphi = -\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} d \cos \left( \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right)$  и интегрируя в пределах от  $r_0$  до  $r$  и от  $\varphi=0$  до  $\varphi$ , получим уравнение линии тока

$$r = \frac{r_0}{\left[ \cos \left( \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right) \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}, \quad (13.13)$$

где  $r_0$  — радиус-вектор данной линии тока на характеристике  $HC$ .

При увеличении углов  $\varphi$  и  $\delta$  радиус-вектор линии тока увеличивается и тем в большей степени, чем больше  $r_0$ , так что сечение канала, образованного двумя поверхностями тока, увеличивается. Это, в соответствии с законом обращения воздействия (13.1), вызывает увеличение скорости сверхзвукового потока. Используя формулу (13.13) можно спроектировать плоский криволинейный канал, в котором будет ускоряться сверхзвуковой поток в течении Прандтля—Майера.

**Задача 13.2.** Определить величину радиуса — вектора линии тока для конечного  $r_0$  и  $\lambda_{\text{max}}$ .

Течение при  $\lambda_n = 1$  рассчитывается по формулам (13.7) ... (13.13) очень просто, если задан один из параметров  $\varphi$ ,  $W$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $q$ ,  $a$ ,  $\alpha_0$ , позволяющий определить  $\lambda$  или  $M$ .

**Задача 13.3.** Запишите формулы, по которым следует определять  $\lambda$  или  $M$  по каждому из приведенных выше параметров при заданном невозмущенном потоке ( $\lambda_n = 1$ ,  $k$ ,  $R$ ,  $p_n$ ,  $T_n$ ).

Однако, обычно заданным является невозмущенный поток и угол его поворота  $\delta_k$ . В этом случае расчет становится громоздким. Для упрощения расчета составлена таблица (см. приложение V) по следующей методике:

- 1) задаются произвольные значения угла  $\varphi$  от 0 до  $\varphi_{\text{max}}$ ;
- 2) по формулам (13.7), (13.9) и (13.13) определяют  $\lambda(M)$ ,  $\alpha_0$ ,  $r/r_0$  и по таблицам  $\tau(\lambda)$ ,  $\mu(\lambda)$ ,  $\varepsilon(\lambda)$ ;

- 3) по формуле (13.8) определяют угол отклонения потока  $\delta_k$ .

Расчет течения  $\lambda_n = 1$  с помощью таблиц. Значение заданного параметра находится в соответствующем вертикальном столбце таблицы. Горизонтальная строка таблицы, включающая это значение параметра, является решением задачи.

**Задача 13.4.** Звуковой воздушный поток  $M=1$ ,  $p=10^5$  Па,  $T=300$  К обтекает внешний тупой угол  $\delta_k=5^\circ$ . Определить  $\lambda_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $p_k$ ,  $T_k$ ,  $q_k$  с использованием таблицы и без нее.

Решение общей задачи при  $\lambda_n > 1$  сводится к расчету уже разобранным случаю  $\lambda_n = 1$ : принимают, что сверхзвуковой поток  $\lambda_n > 1$  получен в результате предварительного ускорения фиктивного звукового потока  $\lambda_\phi = M_\phi = 1$ ,  $p_\phi^* = p_n^*$ ,  $T_\phi^* = T_n^*$  при предварительном повороте его на фиктивный угол  $\delta_\phi$  и при повороте характеристики  $HC$  на угол  $\varphi_\phi$  (рис. 13.5). Интересующее нас течение между характеристиками  $HC$  и  $KC$  будет одинаково как для

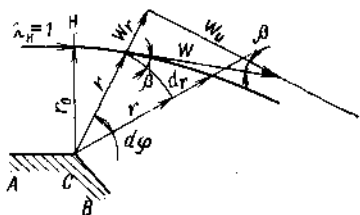


Рис. 13.4. Линия тока течения Прандтля—Майера

заданного потока  $\lambda_n > 1$ , так и для фиктивного  $\lambda_\phi = 1$ . Поэтому общий случай при  $\lambda_n > 1$  можно рассчитывать с помощью таблицы приложения V, составленной для  $\lambda_n = 1$ , следующим образом:

1. В столбце для  $\lambda$  находится заданная величина  $\lambda_n > 1$  и в горизонтальной строке находятся соответствующие ей  $\varphi_\phi$  и  $\delta_\phi$ .

2. Определяются суммарные углы  $\varphi_\Sigma = \varphi_\phi + \varphi_k$  или  $\delta_\Sigma = \delta_\phi + \delta_k$  в зависимости от того, что известно —  $\varphi_k$  или  $\delta_k$ .

3. В соответствующем столбце таблицы находится  $\varphi_\Sigma$  или  $\delta_\Sigma$ . Горизонтальная строка, содержащая эти значения, дает решение задачи. Для определения параметров потока при промежуточных углах  $\varphi_i$  и  $\delta_i$  суммарные углы определяются по тем же формулам  $\varphi_\Sigma = \varphi_\phi + \varphi_i$  и  $\delta_\Sigma = \delta_\phi + \delta_i$ .

Полученные ранее формулы максимальных углов поворота для случая  $\lambda_n > 1$  справедливы лишь для суммарных углов

$$\varphi_{\Sigma \max} = \varphi_\phi + \varphi_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \frac{\pi}{2};$$

$$\delta_{\Sigma \max} = \delta_\phi + \delta_{\text{пред}} = \left( \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} - 1 \right) \frac{\pi}{2}.$$

Максимальные углы поворота сверхзвукового потока от первоначального направления называются предельными, их величина уменьшается с увеличением  $\lambda_n > 1$ :

$$\varphi_{\text{пред}} = \varphi_{\Sigma \max} - \varphi_\phi; \quad \delta_{\text{пред}} = \delta_{\Sigma \max} - \delta_\phi.$$

**Задача 13.5.** Сверхзвуковой воздушный поток  $\lambda_n = 1,81$ ,  $p_n = 10^5$  н/м<sup>2</sup>,  $T_n = 300$  К набегает на бесконечно тонкую пластинку, установленную под углом атаки  $\delta_n = 60^\circ$ . Доказать, что  $\lambda_n = 2,371$ ,  $T_n^* = T_n^* = 660$  К,  $p_n^* = p_n^* = 1,587 \times 10^6$  Па,  $p_{n^*} = 0,997 \cdot 10^2$  Па,  $T_n = 4,6$  К,  $\rho_k = 8,32 \cdot 10^{-3}$  кг/м<sup>3</sup>,  $r_k/r_0 = 2,27 \cdot 10^2$ ,  $\delta_{\text{пред}} = 92^\circ 27'$ .

Обтекание сверхзвуковым потоком выпуклой граненой стенки — это последовательное обтекание внешних тупых углов с вершинами  $C_1, C_2 \dots C_n$  (рис. 13.6, а). Для определения конечных параметров потока расчет можно сразу произвести для  $\delta_\Sigma = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$ . Если общий угол поворота потока окажется больше предельного для заданного числа  $\lambda_n$   $\delta_\Sigma > \delta_{\text{пред}}$ , то при  $\delta_{\text{пред}}$  произойдет отрыв сверхзвукового потока при  $\rho_k$  и  $T_k = 0$ .

Обтекание плавной выпуклой поверхности можно представить как обтекание ломаной с бесконечным числом граней. В этом случае каждая точка криволинейной поверхности является источником элементарных возмущений (рис. 13.6, б). Для определения угла характеристики  $\varphi_B$ , исходящей из любой точки B поверхности, и определения всех параметров потока, на ней необходимо через исследуемую точку провести касательную и определить угол поворота потока  $\delta_B$ . Это позволит определить  $\delta_\Sigma = \delta_B + \delta_\phi$ ,  $\lambda_B$  и  $\varphi_B$ .

Расчет обтекания пластины сверхзвуковым потоком рассмотрим в качестве примера использования теорий течения Прандтля—Майера и косых скачков уплотнения.



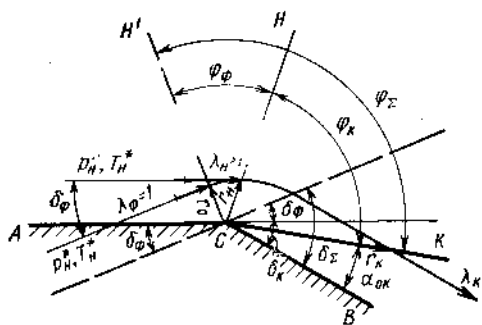


Рис. 13.5. Общий случай течения Праудтля—Майера  $\lambda_H > 1$

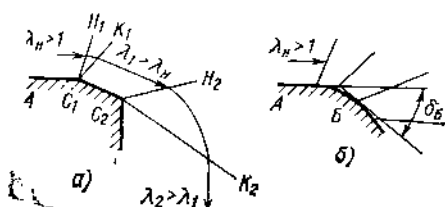


Рис. 13.6. Обтекание сверхзвуковым потоком выпуклых поверхностей:

а—ломаной; б—плавной

На рис. 13.7 представлена схема плоскопараллельного обтекания бесконечно тонкой пластины, установленной под углом атаки  $i$  к вектору скорости сверхзвукового потока  $\lambda_H > 1$ . Требуется определить подъемную силу  $R_y$ , силу лобового сопротивления  $R_x$  и их коэффициенты  $C_y$  и  $C_x$ .

С верхней стороны пластины сверхзвуковой поток отклоняется у внешнего тупого угла (точка  $C$ ) на угол  $\delta = i$ , расширяется и течет вдоль пластины  $CB$  с  $\lambda_2 > \lambda_H$  и  $p_2 < p_H$ . Единичная пластина не может развернуть безграничный поток. Поэтому за пластиной поток должен принять примерно исходное направление. Это происходит на хвостовом косом скачке уплотнения, так что  $\lambda_3 < \lambda_2$ ,  $p_3 = p_H$ .

Снизу пластины сверхзвуковой поток тормозится на косом скачке и течет вдоль  $CB$  с  $\lambda_1 < \lambda_H$  и  $p_1 > p_H$ , принимает за пластиной примерно исходное направление с  $\lambda_4 > \lambda_1$  и  $p_4 = p_H$ . Приведенная скорость  $\lambda_3 \neq \lambda_4$ . Следовательно за пластиной возникает поверхность тангенциального разрыва скоростей. Поэтому давление  $p_3 = p_4 = p_H$  и направления векторов скоростей  $W_3$  и  $W_4$  одинаково.

Полная аэродинамическая сила при заданных условиях равна разности давлений, умноженной на площадь пластины, нормальна к пластине и приложена в центре тяжести

$$R = (p_1 - p_2) S.$$

Подъемную силу и силу лобового сопротивления найдем в соответствии с определением и с рис. 13.7:

$$R_y = R \cos i = (p_1 - p_2) S \cos i \quad \text{и} \quad R_x = (p_1 - p_2) S \sin i.$$

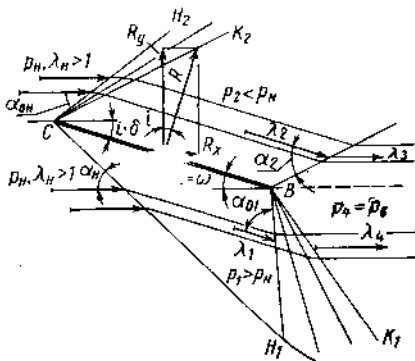


Рис. 13.7. Пластина в сверхзвуковом потоке идеального газа

Подставляя эти значения в формулы (5.18) и (5.17), деля и умножая на  $\rho_n$  и  $k$  и учитывая, что  $k \frac{\rho_n}{\rho_n} = a_n^2$ , получим

$$C_y = \frac{R_y}{\frac{\rho_n W_n^2}{2} S} = \left( \frac{p_1}{\rho_n} - \frac{p_2}{\rho_n} \right) \frac{2 \cos i}{k \frac{\rho_n W_n^2}{\rho_n}} = \left( \frac{p_1}{\rho_n} - \frac{p_2}{\rho_n} \right) \frac{2 \cos i}{k M_n^2}; \quad (13.14)$$

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho_n W_n^2}{2} S} = \left( \frac{p_1}{\rho_n} - \frac{p_2}{\rho_n} \right) \frac{2 \sin i}{k M_n^2}. \quad (13.15)$$

Проведенный анализ позволяет сделать интересные выводы:

1. Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе (4.68) справедлива и для сверхзвукового обтекания пластины идеальным газом, которое является циркуляционным ( $W_2 > W_1$ ) и подъемная сила отлична от нуля.

2. Парадокс Делаμβера — Эйлера (см. п. 4.8) не имеет места при сверхзвуковом обтекании идеальным газом пластины под углом атаки  $i$ . Это является результатом ударных потерь на скачке уплотнения. Аэродинамическое качество профиля — это отношение  $R_y/R_x$  или  $C_y/C_x$ .

Для пластины в сверхзвуковом потоке

$$K = C_y/C_x = \operatorname{ctg} i. \quad (13.16)$$

При отсутствии трения  $K$  с увеличением угла атаки монотонно уменьшается.

Теория течения Прандтля — Майера и теория косых скачков уплотнения применимы для определения  $C_y$  и  $C_x$  пластины в том случае, если ее угол атаки меньше максимальных углов поворота потока —  $i < \delta_{\max}$  и полуклина —  $i < \omega_{\max}$ . Эта область углов для  $k=1,4$  на рис. 13.8 заштрихована.

### 13.2. ОТРАЖЕНИЕ И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК

Этот раздел удобно изучить после знакомства с течением Прандтля — Майера. Закономерности отражения и пересечения характеристик будут использованы при анализе сверхзвуковых течений.

Пусть характеристика разрежения падает в точке  $H$  на стенку, параллельно которой течет сверхзвуковой поток (рис. 13.9, а). При пересечении характеристики разрежения  $SH$  поток отклоняется от

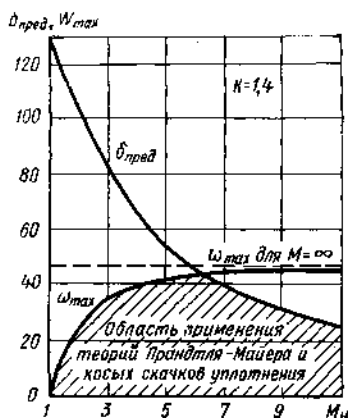


Рис. 13.8. Область применимости теорий течения Прандтля — Майера и косых скачков уплотнения для расчета обтекания тел

стенки. В результате этого между отклоненным потоком и стенкой возникнет внешний тупой угол  $180^\circ + d\delta$ , генерирующий отраженную характеристику разрежения  $HK$ , на которой поток совершает поворот по часовой стрелке на угол  $d\delta$ . Угол отраженной характеристики  $\alpha_{ок} < \alpha_{он}$ , так как  $M_K > M_H$ .

Задача 13.6. Показать, что при падении на стенку характеристики сжатия отразится характеристика сжатия и угол ее отражения будет больше угла падения.

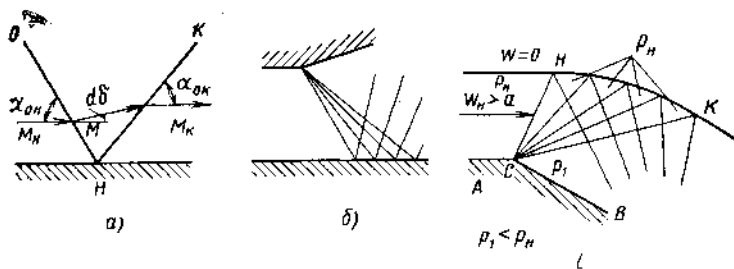


Рис. 13.9. Отражение и пересечение характеристик:

а—отражение характеристики разрежения от стенки; б—то же для волны сжатия; в—то же от границ свободной струи

Если на стенку падает волна разрежения (рис. 13.9, б), то отраженные характеристики разрежения расходятся веером, как бы продолжая падающую волну. Для того, чтобы падающие характеристики не отражались от стенки, ее необходимо спрофилировать так, чтобы в месте падения каждой характеристики стенка отклонялась бы от прежнего направления на угол поворота потока на данной характеристике.

При падении на стенку волны сжатия отражаются характеристики сжатия, при этом они сходятся. При их сложении может возникнуть ударная волна.

На рис. 13.9, в представлена схема течения в виде плоскопараллельной струи, отделенной от неподвижного газа поверхностью тангенциального разрыва скорости  $HK$ .

Волна разрежения падает из вершины тупого угла на поверхность тангенциального разрыва скорости  $HK$  и отражается в виде сходящегося пучка характеристик сжатия. Давление в невозмущенном потоке левее первой характеристики  $HC$  равно давлению  $p_H$  окружающей среды, так как граница струи не удерживает перепада давления. За характеристикой разрежения  $HC$  давление  $p_1 < p_H$ . Но вблизи границы струи давление должно быть равно давлению  $p_H$  окружающей среды. Следовательно, от точки  $H$  границы свободной струи должна отразиться характеристика сжатия, на которой давление потока повышается от  $p_1$  до  $p_H$ . Таким образом, давление по обе стороны границы струи остается  $p_H$ , а внутри струи — более низким.

Итак, при отражении характеристик от твердой стенки тип возмущения сохраняется: характеристики разрежения отражаются в

виде характеристик разрежения, а характеристики сжатия — в виде характеристик сжатия. При отражении от границы свободной струи тип возмущения изменяется на обратный.

Пересечение характеристик иллюстрирует рис. 13.10. Вершины внешних тупых углов  $C$  и  $C'$ , обращенные друг к другу, образуют волны разрежения. В пределах угла  $НСК$  располагаются характеристики разрежения первого семейства, а в пределах  $Н'С'К'$  — второго. Номера семейств назначаются произвольно.

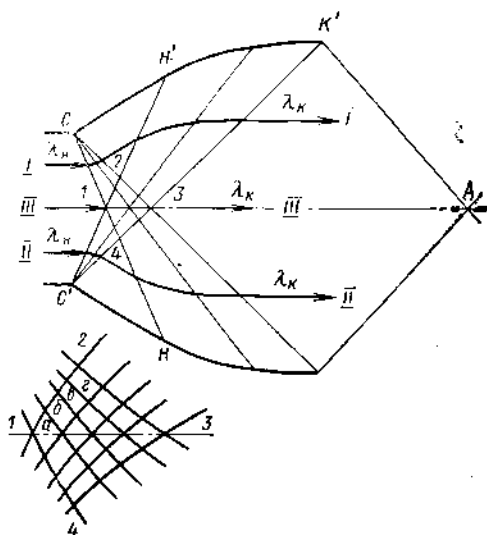


Рис. 13.10. Пересечение характеристик

Характеристики первого и второго семейств в области 1—2, 3, 4 пересекаются и взаимодействуют между собой. Сверхзвуковой поток по линии тока  $I-I$  в течении Прандтля—Майера на характеристиках первого семейства изоэнтропно расширяется, ускоряется и поворачивает против часовой стрелки. В области  $C-2-H'$  течет без изменений параллельно прямолинейной стенке  $CH'$  и затем ускоряется в течении Прандтля—Майера на характеристиках второго семейства, поворачивая по часовой стрелке до первоначального направления. Аналогично развивается течение по линии тока  $II-II$ . В области пересечения и взаимодействия характеристик (линия тока  $III-III$ ) сверхзвуковой поток последовательно пересекает характеристики то первого, то второго семейств, поворачивает то против, то по часовой стрелке, так что в общем не изменяет своего направления, а ускоряется так же, как весь остальной поток. Взаимодействие характеристик в области 1, 2, 3, 4 приводит к их искривлению (на рис. 13.10 показано в увеличенном масштабе)\*. Например, характеристика  $1-2$  искривляется потому, что поток подходит к ее различным точкам, предварительно пересекая различное количество характеристик первого семейства, т. е. при различных числах  $M$  ( $M_T > M_H > M_\delta > M_a$ ), следовательно, под различными углами  $\alpha_{0r} < \alpha_{0в} < \alpha_{0б} < \alpha_{0а} < \alpha_{0п}$ . Стенки канала спрофилированы так, что характеристики не отражаются. Поэтому в области  $3-K-A-K$ , ограниченной последними характеристиками волн

\* В области взаимодействия падающих и отраженных характеристик также имеет место их искривление и по той же причине. На рис. 13,9, 13,9,в это искривление условно не показано.

разрежения  $З—К'$  и  $З—К$  и отходящими от кромок сопла  $К'—А$  и  $К—А$ , сверхзвуковой поток однороден. Эта область называется ромбом измерений, так как в сверхзвуковых аэродинамических трубах в эту область устанавливают исследуемые модели. Рассмотренный пример иллюстрирует *метод характеристик*, применяемый для профилирования сверхзвуковых частей сопел Лавала.

### 13.3. УСКОРЕНИЕ ДОЗВУКОВОГО ПОТОКА В СУЖАЮЩЕМСЯ СОПЛЕ ПРИ ОДНОМЕРНОМ ИДЕАЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ

Сосуд неограниченной емкости, в котором сохраняются постоянными параметры заторможенного газа  $T^*$ ,  $p^*$  (рис. 13.11), соединен сужающимся соплом с внешней средой, в которой давление заданной величины  $p_H$  может устанавливаться с помощью отсасывающего вентилятора. Отметим параметры потока на срезе сопла индексом  $c$ , а в произвольном сечении — индексом  $x$ . Рас-

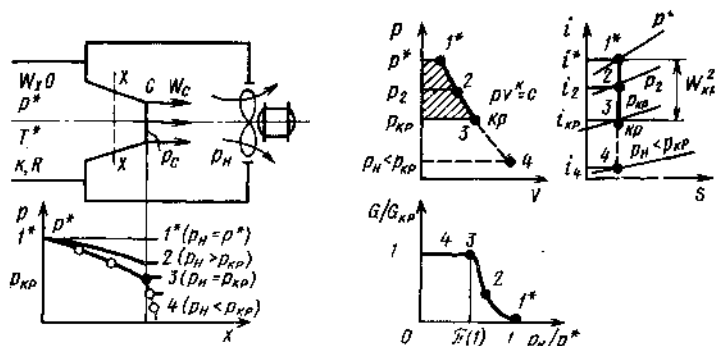


Рис. 13.11. Режимы истечения из сужающегося сопла

смотрим влияние располагаемого отношения давлений  $p_H/p^*$  на распределение параметров вдоль сопла и на их величину на срезе сопла.

В связи с энергетической изолированностью и изоэнтропностью течения при любом режиме истечения, параметры торможения сохраняют постоянное значение  $T_x^* = T_c^* = T^*$ ,  $p_x^* = p_c^* = p^*$ . Поэтому режим истечения из сопла определяется величиной

$$\pi(\lambda_c) = p_c/p_c^* = p_c/p^*, \quad (13.17)$$

позволяющей определить  $\lambda_c$  и, следовательно, все параметры. Таким образом задача исследования сводится к определению  $p_c = f(p_H/p^*)$ .

В теории сопел используются также обратные величины: располагаемое отношение давлений  $\pi_{с\text{расп}}^* = p^*/p_H$  и отношение давлений сопла  $\pi_0^* = p_c^*/p_c$ .

Возможные режимы работы сужающегося сопла:

1.  $p_n/p^* = 1$ . Перепада давления нет. Давление во всем тракте сопла постоянно —  $p = p_c = p^* = p_n$ ;  $\pi(\lambda_c) = p_c/p^* = p^*/p^* = 1$ ,  $\lambda_c = 0$  и истечение отсутствует. На графиках рис. 13.11 это состояние отмечено точками  $I^*$ .

2.  $1 > p_n/p^* > \pi(1) = p_{кр}/p^*$ . Располагаемое отношение давлений меньше критического и может обеспечить только дозвуковую скорость истечения  $W_c < a$ . При дозвуковых скоростях истечения давление на срезе сопла равно давлению в окружающей среде  $p_c = p_n$ . Это равенство поддерживается автоматически: если давление на срезе сопла окажется больше или меньше давления окружающей среды, то волны разрежения или давления из окружающей среды со скоростью звука, большей скорости истечения, достигнут среза сопла и восстановят  $p_c = p_n$ . Это важнейшее условие позволяет определить  $\lambda_c$  по  $\pi(\lambda_c) = p_c/p_c^* = p_n/p^*$ . В рассматриваемой области  $p_n/p^* > \pi(1)$  уменьшение  $p_c = p_n$  от  $p^*$  до  $p_3 = p_{кр}$  приводит к изменению распределения давления и скорости внутри сопла — к увеличению  $dW/dx$ , абсолютного значения  $dp/dx < 0$ , скорости  $W_c$ , приведенной скорости  $\lambda_c$  и расхода газа  $G$  (см. рис. 13.11). Процесс расширения газа в сопле изображен в координатах  $pv$  и  $is$  линией  $I^* - 2$ .

3.  $p_n/p^* = p_{н\ кр}/p^* = p_{с\ кр}/p^* = \pi(1)$ . Критическое отношение давлений обеспечивает истечение со скоростью звука  $W_{с\ кр} = a_{кр}$ ,  $\lambda_c = M_c = 1$ ,  $G = G_{кр} = G_{max}$ . Критическое отношение давлений  $\pi(1) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$  зависит только от величины показателя адиабаты  $k$ . Для воздуха ( $k = 1,4$ ) —  $\pi(1) = 0,528$ , т. е.  $p_{с\ кр}^* = p_c^*/p_{с\ кр} = 1,89$ .

Задача 13.7. Построить график  $p_{с\ кр}^* = f(k)$ , отметив на нем характерные точки для  $k = 1,67; 1,4; 1,33; 1,25$ .

4.  $p_n/p^* < \pi(1)$ . Сверхкритическое отношение давлений. В этой области перепадов в сопле реализуется критическое истечение  $I^* - 3$ . Давление на срезе сопла остается критическим, большим давления окружающей среды  $p_c = p_3 = p^* \pi(1) > p_n$ . В соответствии с этим действительным перепадом давлений на сопле ( $p_{с\ кр}/p_c^*$ ) поток ускоряется лишь до скорости звука  $\lambda_c = 1$ . Остающаяся часть располагаемого перепада давлений  $p_{з\ кр} - p_n$  и теплосодержания  $i_{кр} - i_4$  для ускорения потока в сужающемся сопле не может быть использована и диссипирует в окружающем пространстве. Поэтому на диаграммах рис. 13.11 эти перепады изображены пунктиром. При  $p_n/p^* < \pi(1)$  сопло оказывается изолированным от внешней среды. Это явление называется *запиранием сопла* и *кризисом геометрического воздействия*. Это явление соответствует закону обращения воздействия (13.1): максимальная скорость в сужающемся сопле может быть получена только на срезе и не может превышать скорость звука. Физически это объясняется тем, что при снижении давления в окружающей среде до  $p_n < p_{кр}$  волны пониженного давления не достигают среза сопла, так как сносятся потоком, истекающим

щим из сопла с той же скоростью звука. Поэтому в сопле сохраняется критический режим истечения с неизменными скоростью истечения и расходом (см. рис. 13.11).

С этим явлением очень часто приходится иметь дело на практике. Так кризис оказывает существенное влияние на работу ВРД.

При работе на критическом режиме сопло может быть использовано в качестве простейшего регулятора, поддерживающего постоянный расход газа при переменном  $p_n < p_{кр}$ .

**Задача 13.8.** Предложите возможные способы использования перепада давлений  $p_{кр} - p_c$  для ускорения потока за сужающимся соплом до  $\lambda > 1$ .

**Методика расчета сужающегося сопла при заданных  $p^*$ ,  $p_n$ ,  $T^*$  и  $S_c$ .**

1. Определяются  $p_c$  и  $\lambda_c$  на срезе сопла. Отношение  $p_n/p^*$  сравнивается с  $\pi(1)$ . Возможны только два случая дозвукового и звукового истечения:

1)  $p_n/p^* > \pi(1)$  — режим истечения дозвуковой и давление на срезе сопла равно давлению окружающей среды  $p_c = p_n$ , поэтому

$$\pi(\lambda_c) = p_c/p^* = p_n/p^*. \quad (13.18)$$

По величине  $\pi(\lambda_c)$  определяется  $\lambda_c$ .

2)  $p_n/p^* \leq \pi(1)$  — режим истечения критический  $\lambda_c = 1$ :

$$p_c = p_{кр} = p^* \pi(1) \geq p_n.$$

II. Определяются параметры потока на срезе сопла и в произвольном сечении  $x$ , где площадь сечения  $S_x$ :

$$q(\lambda_x) = q(\lambda_c) S_c/S_x, \quad T = T^* \tau(\lambda_c), \quad p = p^* \pi(\lambda_c),$$

$$Q = Q^* \epsilon(\lambda_c), \quad W = \lambda a_{кр}, \quad G = m p^* q(\lambda_c) S / \sqrt{T^*}.$$

По последней формуле определяется площадь сечения сопла при заданном расходе.

**Задача 13.9.** Самолет с ТРД летит на высоте  $H = 12$  км с  $M_n = 0,8$ . Определить тягу  $R$  двигателя, если газ  $k = 1,4$ ,  $R = 287$  Дж/кг · К,  $p^* = 10^5$  Па,  $T^* = 1000$  К исткает энергетически изолированно и изэнтропно из сужающегося сопла  $S_c = 0,2$  м<sup>2</sup>. Расходом топлива пренебречь.

Ответ:  $R = 1,4 \cdot 10^4$  Н.

### 13.4. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛЕ С ГОРЛОМ. СОПЛО ЛАВАЛЯ

Определим возможные режимы энергетически изолированного  $q = l_{тех} = 0$ ,  $T^* = \text{const}$ ,  $a_{кр} = \text{const}$  одномерного и изэнтропного  $ds = 0$ ,  $p^* = \text{const}$ ,  $p_{кр} = p^* \pi(1) = \text{const}$  течения воздуха в канале с горлом, например  $S_1 = S_2 = 2S_r$  (рис. 13.12).

Используем уравнение закона обращения воздействия (13.1):

$$(M^2 - 1) dW/W = dS/S$$

и уравнение неразрывности  $G_1 = G_T = G_2$ , подставив в него  $G$  из (11.44), получим

$$q(\lambda_1) = q(\lambda_2) = -\frac{S_T}{S_1} q(\lambda_T) = 0,5q(\lambda_T). \quad (1)$$

Каждый возможный режим течения при заданных  $p^*$  и  $T^*$  определяется условиями на входе ( $M_1$  или  $p_1/p^*$ ) и располагаемым отношением давлений  $p_2/p^*$ . При  $p_2 = p_1 = p^*$ ,  $\pi(\lambda_1) = \pi(\lambda_2) = 1$  и  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  — течение отсутствует. Течение возникает при  $p_2 < p^*$ .

Режим I—I. Сверхзвуковой поток  $M_1 > 1$  в соответствии с (13.1) изэнтропно тормозится в сужающемся канале ( $p_T > p_1$ ), но в горле остается сверхзвуковым  $\lambda_T > 1$ ; так как  $p_2/p^* = p_1/p^*$ , в расширяющейся части сверхзвуковой поток изэнтропно ускоряется и в сечении 2 принимает параметры такие же, как в сечении I. Режим I—I можно назвать *режимом сверхзвуковой трубки Вентури*.

Режим II—II. Сверхзвуковой поток  $M_1 > 1$  изэнтропно тормозится в сужающемся канале до скорости звука и, уже как дозвуковой поток, продолжает тормозиться в расширяющемся канале. В соответствии с формулой (1) при  $S_2 = S_1$ ,  $q(\lambda_2) = q(\lambda_1) = 0,5$ , но  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ . Значение  $\lambda_1$  находится в сверхзвуковой области,  $\lambda_1 = 1,72$ , а  $\lambda_2$  — в дозвуковой,  $\lambda_2 = 0,33$  и  $p_1 = p^* \pi(\lambda) = 0,09p^*$ , а  $p_2 = p^* \pi(\lambda_2) = 0,94p^* > p_1$ .

Режим II—II представляет собой режим работы *сверхзвукового изэнтропного диффузора*, называемого также *обращенным соплом Лавала*.

Режим III—III. Дозвуковой поток  $M_1 < 1$  ускоряется (см. 13.1) в сужающемся канале и изэнтропно расширяется ( $p_T < p_1$ ), но в горле остается дозвуковым  $\lambda_T < 1$ ; так как  $p_2/p^* = p_1/p^*$ , то в расширяющейся части дозвуковой поток обратимо тормозится и в сечении 2 принимает такие же параметры, как в сечении I. Режим III—III это режим работы *трубки Вентури* (см. рис. 9.13).

Сверхзвуковое сопло Лавала (1889 г.). Режим IV—IV рассмотрим более подробно, так как он реализуется в сверхзвуковых соплах Лавала, широко применяемых в реактивных двигателях, газовых и паровых турбинах и т. д.

Дозвуковой поток  $M_1 < 1$  ускоряется в сужающемся канале до скорости звука в горле  $\lambda_T = 1$ . Таким образом, в идеальном сопле Лавала критическое сечение или сечение перехода  $\lambda = M = 1$  совпадает с горлом сопла. Затем сверхзвуковой поток продолжает ускоряться в расширяющейся сверхзвуковой части сопла Лавала до

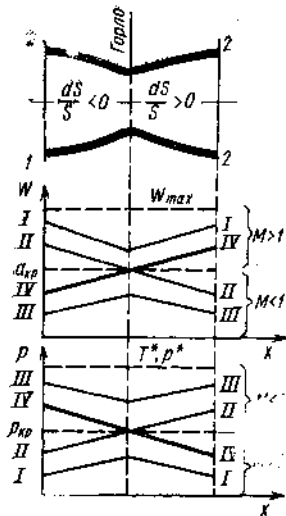


Рис. 13.12. Режимы течения газа в канале с горлом



$\lambda_2 > 1$ . Это обеспечивается соответствующим перепадом давления  $p_1 > p_T > p_2$ .

**Задача 13.10.** Для сопла Лавала  $S_2 = S_1 = 2S_{кр}$ , работающего на режиме  $IV-IV$ , доказать, что  $\lambda_1 = 0,33$ ,  $\lambda_2 = 1,72$ ,  $p_T/p^* = 0,528$ ,  $p_1/p_2 = 10,4$  при  $\kappa = 1,4$ .

Расчет идеального сопла Лавала на расчетном режиме работы. Расчетным называется режим сверхзвукового истечения газа  $\lambda_c > 1$  при  $p_c = p_n$ .

Расход газа через сопло определяется критическим сечением

$$G = m p^* q(\lambda_T) S_T / \sqrt{T^*} = m p^* S_{кр} / \sqrt{T^*}. \quad (13.19)$$

При заданных  $G$ ,  $m$ ,  $p^*$  и  $T^*$  по (13.19) рассчитывается  $S_{кр}$ .

Формула (13.19) позволяет сделать важный вывод о том, что при заданных  $p^*$  и  $T^*$ , расход газа через канал с горлом максимален при максимальном значении  $q(\lambda_T) = 1$ , т. е. при совпадении сечения перелома  $\lambda = M = 1$  с сечением горла ( $S_T = S_{кр}$ ). Расход газа через канал с горлом снижается при любом отклонении величины  $\lambda_T$  от единицы.

Площадь сечения  $S_x$  по заданному  $\lambda_x$  (или наоборот) рассчитывается по уравнению неразрывности для сечения  $x$  и критического

$$S_x = \frac{S_{кр}}{q(\lambda_x)} q(\lambda_T) = \frac{S_{кр}}{q(\lambda_x)}. \quad (13.20)$$

Параметры газа рассчитываются обычно так:

$$T_x = T^* \tau(\lambda_x); \quad q_x = q^*(\lambda_x); \quad W_x = \lambda_x a_{кр}.$$

Приведенная методика расчета идеальных течений применима для приближенного расчета реальных хорошо спрофилированных сопел Лавала, так как гидравлические потери в них невелики.

**Задача 13.11.** Для условий задачи 13.9 определить тягу ТРД, снабженного расчетным соплом Лавала ( $p_c = p_n$ ), с  $S_{кр} = 0,2$  м<sup>2</sup>.

Ответ:  $R = 1,47 \cdot 10^4$  Н.

Режимы работы сопла Лавала. При неизменных  $p^*$ ,  $T^*$ ,  $S_{кр}$ ,  $S_c$  в зависимости от давления  $p_n$  окружающей среды, сопло Лавала может работать на режимах расчетном, недорасширения, перерасширения, смешанном и дозвуковом (рис. 13.13).

1. Расчетный режим — давление на срезе сопла равно давлению окружающей среды  $p_{ср} = p_n$ . Изменение скорости и давления газа в сопле изображено линиями  $I-II-I$ . За соплом сверхзвуковая струя сечением  $S_c$  течет со скоростью  $W_{ср}$  при давлении  $p_{ср} = p_n$ , не смешиваясь с окружающей средой, так как рассматривается идеальный газ. При истечении реального газа скорость его по мере удаления от сопла уменьшается за счет турбулентного смешения с окружающим газом.

2. Режим недорасширения — давление на срезе сопла больше давления окружающей среды  $p_{сд} > p_n$ . Степенью нерасчетности называется величина  $n = p_{сд}/p_n$ . Изменение скорости и давления газа в тракте сопла на режиме недорасширения полностью совпадает с расчетным (линия  $I-II-I$ ) и давление на срезе сопла и скорость истечения остаются расчетными  $p_{ср}$  и  $W_{ср}$ : волны пониженного

давления из окружающей среды не могут достичь среза сопла — они сносятся сверхзвуковым потоком. Избыточное давление  $p_{ср} - p_{н2}$  расходуется на увеличение скорости сверхзвукового потока идеального газа, но уже за срезом сопла.

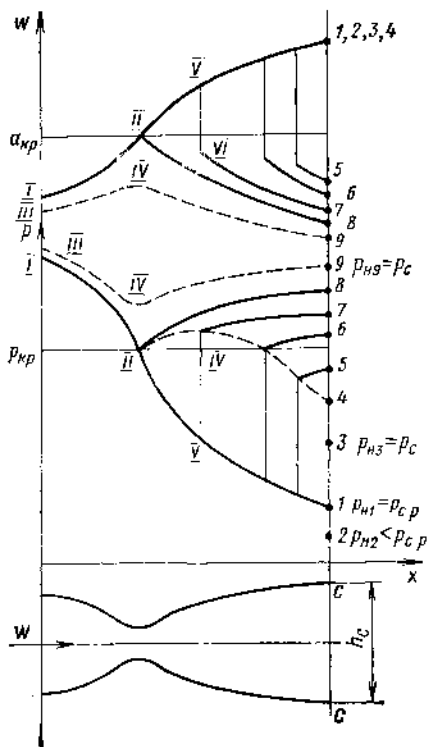


Рис. 13.13. Режимы работы сопла Лавала

струи  $HK$  и  $H_1K_1$  не могут выдержать перепад давления  $p_{н2} - p_{н1}$ . Поэтому волны разрежения отражаются от них в виде волн сжатия  $H_1C_1'K_1$  с такой же интенсивностью, как и волны раз-

режения идеального газа при истечении из плоского сопла Лавала при недорасширении показана на рис. 13.14. Такую же структуру имеет осесимметричная сверхзвуковая струя при малой степени недорасширения  $n = p_c/p_{н} \rightarrow 1$ . Кромки сопла  $C$  и  $C_1$  создают волны разрежения  $HCK$  и  $H_1C_1K_1$ , на которых недорасширенный сверхзвуковой поток изэнтропно ускоряется, поворачивая на угол  $\delta$  (см. линию тока  $L-T$ ). Область течения  $II$  отделена от внешней среды границей свободной струи  $C_1H$  и  $CH_1$ , поэтому давление в ней равно давлению окружающей среды  $p_{II} = p_{н2} \pi(\lambda_{II}) = p_{н2}/p^*$ , т. е. в этой области весь перепад давления использован для ускорения потока. Угол поворота потока  $\delta$  можно рассчитать по формулам теории течения Прандтля — Майера. Далее поток ускоряется на втором семействе характеристик  $HCK$ , поворачивает на угол  $\delta$  в обратную сторону и течет параллельно оси при  $p_{III} < p_{II} = p_{н2}$  и  $\lambda_{III} > \lambda_{II}$ . Границы свободной

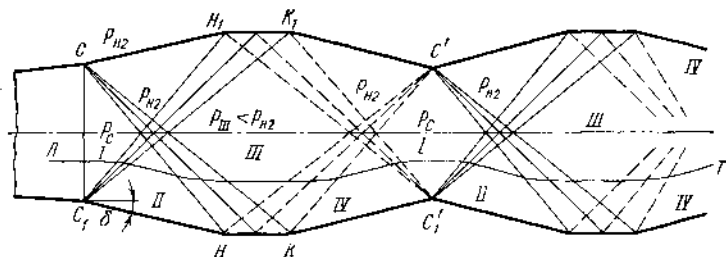
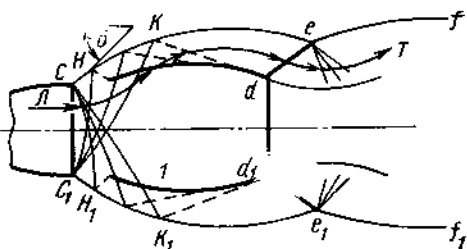


Рис. 13.14. Схема плоской сверхзвуковой недорасширенной струи идеального газа

режения. На этих волнах сжатия поток последовательно сжимается и поворачивается так, что в области *IV* приобретает такие же параметры, как и в области *II*, а в области *I* — как на срезе сопла. Полученная структура называется *бочкой* и в дальнейшем повторяется бесконечное число раз. Течение реальной жидкости сопровождается турбулентным смешением с внешней средой и диссипацией энергии. Это приводит к тому, что после 10 ... 15 бочек струя становится изобарной, т. е. давление в ней сравнивается с давлением в окружающей среде. При больших степенях недорасширения  $n = p_c/p_n > 2$  вместе с изоэнтронными волнами расширения и сжатия в осесимметричной струе возникают скачки уплотнения (рис. 13.15). В этом случае недорасширенный сверхзвуковой поток поворачивает на характеристиках около кромок *C*

Рис. 13.15. Схема осесимметричной сверхзвуковой недорасширенной струи идеального газа:

*I* — висячий скачок; ЛТ — линия тока; *d—d<sub>1</sub>* — диск Маха; *d—e* и *d<sub>1</sub>—e<sub>1</sub>* — отраженный скачок; *C<sub>1</sub>NK* и *C<sub>1</sub>N<sub>1</sub>K<sub>1</sub>* — волны разрежения; --- — волны сжатия; *C<sub>1</sub>NKef* и *C<sub>1</sub>N<sub>1</sub>(K<sub>e1</sub>f<sub>1</sub>)* — граница струи



и *C<sub>1</sub>* сопла на больший угол  $\delta$  и течет вдоль границ струи *C<sub>1</sub>NK<sub>1</sub>* и *C<sub>1</sub>N<sub>1</sub>K<sub>1</sub>e<sub>1</sub>* с давлением, равным давлению  $p_n$  окружающей среды. В областях, прилегающих к оси струи, поток сильно перерасширяется —  $p_{осев} \ll p_n$ .

Из-за отклонения границы струи на больший угол  $\delta$  и ее искривления, характеристики сжатия (отраженные от границы струи) образуют сходящийся узкий пучок, направленный к оси. *Висячий скачок уплотнения I* есть результат сложения характеристик сжатия. Возникновение висячего скачка уплотнения в осесимметричной струе объясняется сверхзвуковым радиальным растеканием сильно перерасширенного газа из центральных областей в периферийные, где давление равно давлению окружающей среды. Этот скачок является поверхностью вращения, при приближении к соплу ослабевает и не доходит до кромок сопла, поэтому и называется висячим. В осесимметричном течении криволинейный висячий скачок не может правильно, регулярно отразиться от оси, поэтому возникает как бы маховское отражение от оси в виде прямого скачка *d—d<sub>1</sub>*, который называется *диск Маха* и за которым течение становится дозвуковым. От диска Маха *d—d<sub>1</sub>* отходит кольцевой скачок *d—e*, который отражается от границы струи (точки *e*) в виде волн разрежения. В сечении *e—e<sub>1</sub>* заканчивается первая бочка и начинается подобная ей вторая, за ней третья и т. д. Для того, чтобы в сечении *e—e<sub>1</sub>* возникла вторая бочка, необходимы недорасширенный сверхзвуковой поток в этом сечении ( $p_e > p_n$ ) и ( $W_e \geq a_e$ ). Периферийный поток (линия Л—Т) является сверхзвуковым — он пе-

ресекает два косых скачка: за висячим скачком давление становится атмосферным  $p_{\text{н}}$ , за скачком  $d—e p > p_{\text{н}}$  и поток направляется к оси, образуя сужающийся жидкий контур, в котором дозвуковой поток ускоряется до скорости звука в минимальном сечении. Затем, периферийный поток поворачивает в волнах разрежения, выходящих из точек ( $e—e_1$ ), ускоряется и образует расширяющийся контур, в котором внутренний поток принимает сверхзвуковую скорость. Потери полного давления в скачках уплотнения предшествующих бочек приводят к ослаблению последующих скачков: уменьшаются давление в начале, перерасширение в средней части, диаметр максимального сечения. Постепенно струя становится изобарной. При большой степени нерасчетности  $n = p_c/p_{\text{н}} > 5$  потери на скачках первой бочки настолько велики, что давление в сечении  $e—e_1$  равно окружающему. Поэтому последующие бочки отсутствуют — имеет место изобарная сверхзвуковая струя.

При недорасширенном истечении из сужающегося сопла имеют место подобные структуры сверхзвуковых струй с той лишь разницей, что первые характеристики разрежения лежат в плоскости среза сопла и поэтому искривление границы струи начинается от кромок сопла.

3. Режим перерасширения — давление на срезе сопла меньше давления окружающей среды  $p_c < p_{\text{н}}$ . До некоторого предела повышение давления окружающей среды ( $p_{\text{н}}$  на рис. 13.13) не влияет на течение по соплу, которое остается расчетным (линия I—II—I—4): волны повышенного давления сносятся сверхзвуковым потоком, истекающим из сопла.

Возможность перерасширения сверхзвукового потока в сопле Лавала широко используется в аэродинамических трубах для получения сверхзвуковых скоростей  $\pi(\lambda_c) = p_c/p^*$  больших, чем это соответствует располагаемому отношению давлений  $\pi(\lambda_{\text{н}}) = p_{\text{н}}/p^* (p_{\text{н}} > p_c \text{ и } \lambda_c > \lambda_{\text{н}})$ .

Структура плоско-параллельной струи за соплом при давлении окружающей среды  $p_{\text{н}}$  показана на рис. 13.16, а. Перерасширенная струя (линия тока Л—Т) сжимается ударно на косых скачках уплотнения СВ и С<sub>1</sub>В до давления окружающей среды  $p_2 = p_{\text{н}}$  и течет к оси в области 2, отделенной от окружающей среды границей свободной струи СА и С<sub>1</sub>А<sub>1</sub>. Вторично эта струя ударно сжимается на отраженных скачках ВА и ВА<sub>1</sub>, принимает осевое направление и давление  $p_1 > p_{\text{н}}$ . Косые скачки ВА и ВА<sub>1</sub> отражаются от границы струи в виде волн разрежения АНК и А<sub>1</sub>Н<sub>1</sub>К<sub>1</sub> и образовавшийся недорасширенный сверхзвуковой поток в дальнейшем приобретает уже разобранный структуру (см. рис. 13.16 а и 13.14).

С повышением давления окружающей среды увеличивается угол косых скачков СВ и С<sub>1</sub>В, уменьшается скорость потока за ними и увеличивается угол поворота на скачках ВА и ВА<sub>1</sub>, который необходим для придания потоку осевого направления в области 1. Когда этот угол  $\omega$  становится больше  $\omega_{\text{max}}$  (см. п. 12.2), система косых скачков перестраивается в так называемую мостообразную (рис. 13.16, б) с прямым скачком в области оси и отраженными скачками

ВА и  $B_1A_1$  (правильное отражение косого скачка от оси переходит в маховское). При дальнейшем повышении  $p_n$  размер прямой ударной волны  $BB_1$  увеличивается и она приближается к срезу сопла. При  $\frac{p_{n4}}{p_c} = \lambda_c^2 \frac{\tau(1/\lambda_c)}{\tau(\lambda_c)} = \frac{2k}{k+1} M_c^2 \frac{k-1}{k+1}$  (см. п. 12) сверхзвуковое истечение оказывается невозможным и прямой скачок уплотнения размещается на срезе сопла Лавалья, за которым поток уже дозвуковой. При дальнейшем повышении давления до  $p_{n5} \dots p_{n8}$  (см. рис.

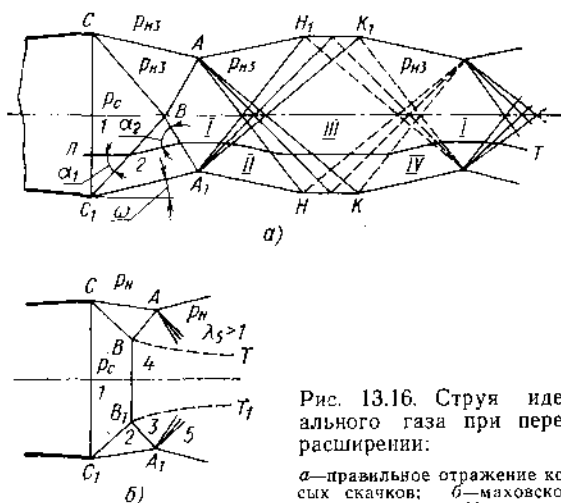


Рис. 13.16. Струя идеального газа при перерасширении:  
 а—правильное отражение косых скачков; б—маховское отражение (диск Маха)

13.13) ударная волна перемещается внутрь сопла, так как скорость ее распространения сверхзвуковая. Например, при  $p_{n7}$  реализуется течение дозвуковое в сужающейся части сопла, сверхзвуковое на участке II—V в расширяющейся части до ударной волны и дозвуковое на участке VI—7 за ударной волной. Наконец, при  $p_{n8}$  скачок доходит до критического сечения и исчезает. При  $p_{n9}$  устанавливается режим полностью дозвукового течения трубки Вентури. На режимах  $p_{n4} \dots p_{n9}$  дозвукового истечения из сопла Лавалья давление на срезе сопла равно давлению окружающей среды.

Режимы истечения из сопла Лавалья и тяга реактивного двигателя. При постоянном давлении  $p_n$  окружающей среды рассмотренные режимы работы сопла Лавалья можно получить с помощью изменения полного давления  $p^*$  от его расчетного значения. При сверхзвуковом течении в расширяющейся части приведенная скорость в любом сечении  $x$  сопла определяется только отношением площадей  $q(\lambda_x) = S_{кр}/S_x$ . Поэтому, при увеличении  $p^*$  на входе в сопло, статическое давление  $p_x = p^* \pi(\lambda_x)$  повысится во всех сечениях и установится режим недорасширения  $p_c > p_n$ , а при уменьшении  $p^*$  — режим перерасширения. На режиме недорасширения, полученном за счет увеличения давления торможения, тяга возрастет, по сравнению с тягой на расчетном режи-

ме, вследствие увеличения расхода газа и возникновения положительной разности давлений ( $p_c - p_H$ ) (4.19). На режиме перерасширения с пониженным  $p^*$ , тяга уменьшается за счет снижения расхода и отрицательного члена ( $p_c - p_H$ ).

На рис. 13.17, б показано, что при неизменных  $p^*$ ,  $p_H$  и  $S_{кр}$  режим недорасширения можно получить, укоротив сверхзвуковую часть сопла Лавала.

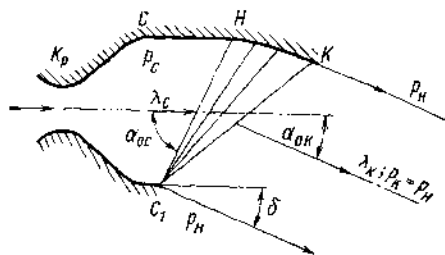
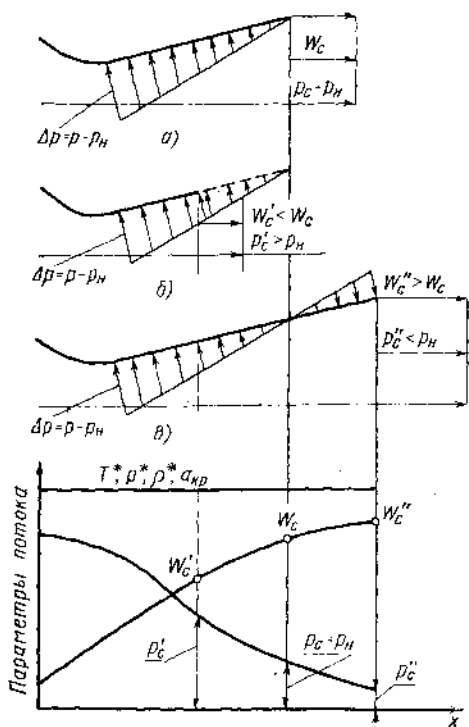


Рис. 13.18. Сопло с косым срезом

Рис. 13.17. Расчетное, укороченное и удлиненное сопла Лавала:

а—расчетное сопло; б—то же с недорасширением; в—то же с перерасширением

вую часть сопла Лавала, уменьшив  $S_c$ , по сравнению с расчетной величиной (рис. 13.17, а). Это приводит к уменьшению тяги двигателя, так как исключается часть сопла (см. пункт 1 на рис. 13.17, б), на которой избыточное, по сравнению с атмосферным, давление  $\Delta p = p - p_H$  создает положительную составляющую тяги.

Следовательно, уменьшение скорости истечения не компенсируется полностью увеличением давления на срезе сопла (4.19). В определенных пределах укороченные сопла вызывают лишь незначительное снижение тяги, поэтому они широко используются для уменьшения их веса и габаритов.

Режим перерасширения получается при удлинении сверхзвуковой части сопла Лавала по сравнению с расчетной (рис. 13.17, в). При этом тяга двигателя также снижается, так как добавляется участок сопла, на котором внешнее избыточное давление создает отрицательную составляющую тяги: величина отрицательного члена  $p_c'' - p_H$  не компенсируется увеличением скорости истечения. В космосе  $p_H = 0$  и увеличение площади выходного сечения сопла вплоть до бесконечности ( $S_c \rightarrow \infty$ ;  $W_c \rightarrow W_{max}$ ) будет приводить к увеличению тяги, если, конечно, не принимать во внимание увеличение гидравлических потерь.

**Задача 13.12.** Гипотетический ракетный двигатель с идеальным соплом Лаваля  $S_{кр} = 0,01 \text{ м}^2$ ,  $p^* = 10^7 \text{ Па}$ ,  $T^* = 2500 \text{ К}$ ,  $k = 1,4$ ,  $R = 287 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$  работает на высоте  $H = 30 \text{ км}$ . Определить тягу  $R$  и площадь среза сопла  $S_c$  при расчетном режиме работы  $p_c = p_n$ , а также процент  $\delta R$  снижения тяги при уменьшении площади среза сопла в 10 раз и  $\delta R_{кр}$  при использовании сужающегося сопла. Ответ:  $S_c = 1,59 \text{ м}^2$ ,  $R = 1,73 \cdot 10^5 \text{ Н}$ ;  $\delta R = 3,9$ ;  $\delta R_{кр} = 26,5\%$ .

### 13.5. СОПЛО С КОСЫМ СРЕЗОМ

При недорасширенном истечении из плоского сопла Лаваля использованный в укороченном сопле перепад давления  $p_c - p_n$  затрачивается на увеличение скорости вне сопла (см. рис. 13.14). При этом этот поток поворачивает около кромок  $C$  и  $C_1$  сопла на угол  $\delta$ , определяемый в теории течения Прандтля—Майера. В газовых и паровых турбинах для получения потока максимальной скорости, отклоненного на угол  $\delta$  от осевого направления, используются сопла Лаваля или сужающиеся сопла с косым срезом, в которых плоскость среза сопла не перпендикулярна оси потока (рис. 13.18).

Рассмотрим схему и работу расчетного сопла Лаваля с косым срезом. В области  $CC_1H$  сверхзвуковой недорасширенный поток ( $\lambda_c > 1$ ,  $p_c > p_n$ ) течет параллельно плоской стенке  $CH$ . Кромка  $C_1$  сопла генерирует волну разрежения  $HC_1K$ . Первая характеристика  $C_1H$  располагается под углом  $\alpha_{oc} = \arcsin(1/M_c)$ , а последняя  $C_1K$  при расчетном режиме совпадает с косым срезом сопла. Козырек  $HK$  спроектирован по уравнению (13.13), т. е. воспроизводит линию тока течения Прандтля—Майера. Поэтому характеристики разрежения, падающие на поверхность козырька  $HK$ , не отражаются. Весь поток в течении Праудтля—Майера (см. п. 13.1) в пределах угла  $HC_1K$  расширяется до  $p = p_k = p_n$  и ускоряется до  $\lambda(\lambda_k) = p_n/p^*$  и поворачивает от оси на угол  $\delta$ .

Если вся стенка  $СК$  плоская, то возникают отраженные характеристики разрежения и струя принимает более сложную конфигурацию, которую можно рассчитать, используя метод характеристик. Однако приближенный расчет может быть выполнен по теории течения Прандтля—Майера. Также более сложными для расчета оказываются нерасчетные режимы истечения.

При сужающемся сопле с косым срезом первая характеристика перпендикулярна  $W_c = a_{кр}$ .

**Задача 13.13.** Приняв  $h_{кр} = 10^{-2} \text{ м}$ ;  $\lambda_c = 1,2$ ;  $p_c = 10^6 \text{ Па}$ ;  $T_c = 1000 \text{ К}$ ;  $p_n = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ;  $k = 1,4$ ;  $R = 287 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$  (см. рис. 13.18); доказать, что  $C_1C = 1,05 \cdot 10^{-2}$ ;  $C_1H = 1,33 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $C_1K = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ;  $\lambda_k = 1,43$ ;  $\alpha_{oc} = 52^\circ 30'$ ;  $\alpha_{ок} = 18^\circ 20'$ ;  $T_k = 872 \text{ К}$ ;  $\delta = 10^\circ$ .

Реальные течения в сужающихся соплах и в соплах Лаваля рассматриваются в п. 15.7.

## ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ГАЗОВЫЙ ПОТОК РАСХОДНОЕ, ТЕПЛОВОЕ, МЕХАНИЧЕСКОЕ, ТРЕНИЯ И КОМБИНИРОВАННОЕ

---

Каждое воздействие будем рассматривать в одномерной постановке и при отсутствии других воздействий. Исключение составит рассмотрение комбинированного воздействия.

Прямую задачу сформулируем следующим образом:

Дано: 1. Площадь сечения канала  $S = \text{const}$ .

2. Совершенный газ  $\kappa$ ,  $R$ ,  $C_p$ .

3. Неизменяемые параметры торможения газа в сечении  $1-1$  до воздействия  $T_1^*$ ,  $p_1^*$ .

4. Приведенная скорость  $\lambda_1$ , которая может самопроизвольно изменяться до  $\lambda_1'$  при воздействии, превышающем критическую величину (см. ниже).

5. Величина воздействия.

6. Давления  $p_1$  и  $p_2$ , необходимые для осуществления данного течения.

Определим изменение параметров газа на участке  $1-2$ , вызванное заданным воздействием, т. е.  $\lambda_1'$ ,  $T_2^*$ ,  $p_2^*$ ,  $\lambda_2$ ,  $p_2$ ,  $T_2$ ,  $Q_2$ ,  $W_2$ ,  $G_1'$ ,  $G_2$ . Одновременно рассмотрим обратную задачу — определение величины воздействия для получения заданных параметров в сечении  $2-2$ .

Кризис воздействия (запирание канала) для любого воздействия состоит в том, что дозвуковой поток, в соответствии с уравнением (11.59) закона обращения воздействия, за счет воздействия одного знака можно разогнать только до скорости звука, которая поэтому может установиться только на срезе канала. Величина критического воздействия для данного газа определяется величиной  $\lambda_1$ . При дальнейшем увеличении воздействия на срезе трубы сохраняется критическое истечение  $\lambda_2 = 1$ , а расход газа в сечении  $1-1$  снижается и вместе с ним приведенная скорость до  $\lambda_1'$ , для которой новая величина воздействия является критической.

Сверхзвуковое сопло. Критическое течение  $\lambda = 1$  можно получить и в промежуточном критическом сечении трубы, если за этим сечением изменить знак воздействия на обратный и продолжать ускорять уже сверхзвуковой поток. Так можно получить расходное, механическое и тепловое сверхзвуковые сопла и диффузоры. С помощью однозначного воздействия трения невозможно осуществить плавный переход через скорость звука.



Если при торможении сверхзвукового потока увеличить воздействие сверх критического, то в промежуточном сечении трубы возникает прямой скачок уплотнения, переводящий скачком сверхзвуковой поток в дозвуковой, который затем ускоряется до  $\lambda_2=1$  тем же воздействием, которое тормозило сверхзвуковой поток. При этом общая изоэнтропность течения на скачке нарушается, а исходный расход газа  $G_1$  и  $\lambda_1 > 1$  до определенного предела не изменяются.

## 14.1. РАСХОДНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Расходное воздействие заключается в подводе к газовому потоку ( $dG > 0$ ) или отводе от него ( $dG < 0$ ) через перфорированные стенки трубы массы газа с параметрами, которые имеет основной поток в соответствующих сечениях (рис. 14.1).

В соответствии с (11.59) уравнение закона обращения расходного воздействия принимает вид

$$(M^2 - 1) dW/W = -dG/G \quad (14.1)$$

и мы заключаем, что дозвуковой поток ускоряется при подводе массы ( $dG > 0$ ), а сверхзвуковой — при отводе ( $dG < 0$ ). Для торможения знаки должны быть изменены на обратные. Расходное сверхзвуковое сопло (см. рис. 14.1) можно представить как ряд концентрических сопел Лавала с общим критическим сечением, образованных не твердыми стенками, а поверхностями тока.

Учитывая энергетическую изолированность и изоэнтропность течения и уравнения (11.8) и (11.40), приходим к выводу о постоянстве вдоль трубы параметров торможения  $T_1^*$ ,  $p_1^*$ ,  $q_1^*$ ,  $a_{кр1}$  и т. д. Следовательно, для определения всех параметров в произвольном сечении 2—2 необходимо знать только зависимость  $\lambda_2 = f(\lambda_1 \text{ и } \Delta G)$ , которую определим, сопоставив уравнения расхода (11.44) для сечений 1—1 и 2—2

$$q(\lambda_2) = q(\lambda_1) \frac{G_2}{G_1}, \quad (14.2)$$

где  $G_2 = G_1 \pm \Delta G$ .

Критический подвод газа  $\Delta G_{кр}$  к потокам с параметрами  $p_1^*$ ,  $T_1^*$ ,  $\lambda_1$ , при котором сверхзвуковой поток тормозится, а дозвуковой ускоряется до скорости звука, найдем, положив в (14.2)

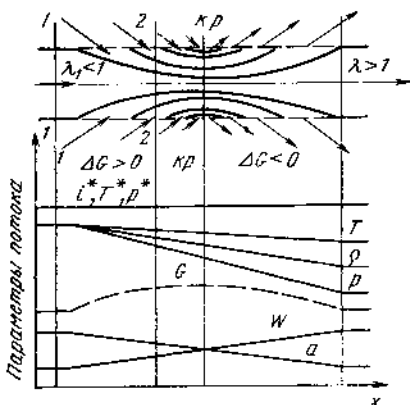


Рис. 14.1. Сверхзвуковое расходное сопло

$$\lambda_2 = 1, \quad q(\lambda_2) = 1, \quad G_2 = G_1 + \Delta G_{кр} = m \frac{p_1^* q(1) S}{\sqrt{T_1^*}}$$

$$\Delta G_{кр} = G_1 \left( \frac{1}{q(\lambda_1)} - 1 \right), \quad (14.3)$$

где  $G_1 = m \frac{p_1^* q(\lambda_1) S}{\sqrt{T_1^*}}$  — расход основного газа через сечение  $I-I$ .

Формулами (14.2) и (14.3) следует пользоваться совместно с (14.1) и отдельно для дозвуковой и сверхзвуковой областей, так как каждому значению  $q(\lambda)$  соответствует два значения  $\lambda < 1$  и  $\lambda > 1$ .

При  $0 < \Delta G < \Delta G_{кр}$  сверхзвуковой поток тормозится, но остается сверхзвуковым, а дозвуковой ускоряется, но остается дозвуковым.

При  $\Delta G > \Delta G_{кр}$  в промежуточном сечении сверхзвукового потока возникает ударная волна, за которой дозвуковой поток ускоряется. Этот вопрос здесь подробно не рассматривается.

При  $\Delta G > \Delta G_{кр}$  и дозвуковом течении в сечении 2—2 сохраняется кризис  $q(\lambda_2) = 1$ , но расход основного газа и приведенная скорость в сечении  $I-I$  снижаются до  $G_1'$  и  $\lambda_1'$ . Подставляя эти значения в (14.2), получим выражение для определения  $\lambda_1'$ :

$$q(\lambda_1') = 1 - \frac{\Delta G \sqrt{T^*}}{m p^* S} = 1 - \frac{\Delta G}{G_{кр}}. \quad (14.4)$$

Таким образом, при  $\Delta G = G_{кр} = m \frac{p_1^* q(1) S}{\sqrt{T_1^*}}$ ,  $q(\lambda_1') = 0$ ,  $\lambda_1' = 0$  и

подача в трубу исходного газа прекращается. Увеличить подачу дополнительного газа сверх  $G_{кр}$  при заданных  $p^*$ ,  $T^*$  и  $S$  невозможно.

Если при заданном направлении массообмена к сечению  $I-I$  подать сверхзвуковой поток, то канал обратится в сверхзвуковой диффузор.

**Задача 14.1.** При заданном направлении массообмена (см. рис. 14.1) к сечению  $I-I$  подается сверхзвуковой поток  $\lambda_1 > 1$ . Изобразите изменение параметров потока и  $is$ -диаграмму процесса.

Расходное воздействие встречается в различных смесителях, а также используется для ускорения и регулирования сверхзвукового потока в некоторых аэродинамических трубах. С помощью отбора газа от сверхзвукового потока удобно получать различные числа  $M > 1$ , так как при таком регулировании в сверхзвуковом потоке скачки уплотнения не возникают.

**Задача 14.2.** Приняв  $S = 0,02 \text{ м}^2$ ,  $p_1^* = 10^5 \text{ Па}$ ;  $T_1^* = 1600 \text{ К}$ ;  $\lambda_1 = 0,2$  и на выходе из сопла  $\lambda_2 = 2$  (см. рис. 14.1), доказать, что  $\Delta G_{кр} = 14$ ;  $G_{кр} = 20,3$  и  $\Delta G = -16,3 \text{ кг/с}$ ,  $p_1 = 9,8 \cdot 10^5$ ;  $p_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ Па}$ ;  $T_2 = 533 \text{ К}$ .

## 14.2. МЕХАНИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Рассмотрим подвод механической энергии к газовому потоку в изоэнтропном (идеальном) компрессоре  $l_{\text{тех}} < 0$ ,  $ds = 0$  и отвод — в изоэнтропной (идеальной) турбине  $l_{\text{тех}} > 0$ ,  $ds = 0$ .

Уравнение (11.58) для механического воздействия принимает вид

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = -\frac{1}{a^2} dl_{\text{тех}} \quad (14.5)$$

На основании (14.5) заключаем, что в сверхзвуковом механическом сопле (рис. 14.2) дозвуковой поток ускоряется до  $\lambda = 1$ , совершая работу на колесах турбины, а за критическим сечением сверхзвуковой поток ускоряется при подводе к нему механической энергии в компрессоре. В сверхзвуковом диффузоре сверхзвуковой поток тормозится, совершая работу в турбине, а дозвуковой — при подводе к нему механической энергии в компрессоре.

Температуру торможения  $T_2^*$  в произвольном сечении канала 2—2 определим из уравнения энтальпии

$$\begin{aligned} T_2^* &= T_1^* - \frac{l_{\text{тех}}}{C_p} = T_1^* + \frac{l_k}{C_p} = \\ &= T_1^* - \frac{l_T}{C_p}. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Давление торможения  $p_2^*$  и плотность заторможенного газа  $\rho_2^*$  определим из уравнения изэнтропы

$$p_2^* = p_1^* \left( \frac{T_2^*}{T_1^*} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad \rho_2^* = \rho_1^* \left( \frac{T_2^*}{T_1^*} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = \rho_1^* \left( \frac{p_2^*}{p_1^*} \right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (14.7)$$

Итак, все параметры торможения уменьшаются при совершении газом работы в турбине и увеличиваются при подводе механической энергии в компрессоре, проходя через минимум в критическом сечении.

Приведенную скорость в произвольном сечении 2—2 определим из сопоставления уравнений (11.44) для сечений 1—1 и 2—2.

$$\frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)} = \frac{p_1^*}{p_2^*} \left( \frac{T_2^*}{T_1^*} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{T_2^*}{T_1^*} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \quad (14.8)$$

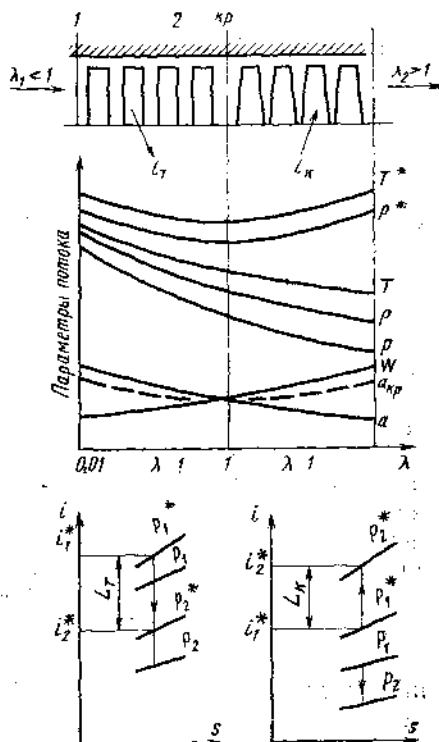


Рис. 14.2. Сверхзвуковое механическое сопло

или, с учетом (14.6), получим

$$q(\lambda_2) = q(\lambda_1) \left( 1 - \frac{l_{\text{тех}}}{C_p r_1^*} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}. \quad (14.9)$$

По (14.9) можно определить величину и знак  $l_{\text{тех}}$  для получения заданной  $\lambda_2$  или  $\lambda_2$  по заданной  $l_{\text{тех}}$ . Все остальные параметры потока в сечении 2—2 рассчитываются по формулам (11.28 ... 11.30).

На практике сверхзвуковые механические сопло и диффузор не реализуются прежде всего потому, что ударные волны, возникающие при сверхзвуковом обтекании лопастей машин делают процесс принципиально не изоэнтропным. Однако элементы механического воздействия всегда встречаются в лопаточных машинах.

**Задача 14.3.** Изобразите схему сверхзвукового механического диффузора, изменение параметров газа вдоль тракта и в  $is$ -координатах.

### 14.3. ТЕПЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Подвод тепла к движущемуся газу — один из основных процессов в реактивных двигателях — осуществляется в камерах сгорания. Процессы подвода и отвода тепла происходят в различных теплообменных аппаратах.

При тепловом воздействии имеют место два важнейших явления, предсказанные Г. Н. Абрамовичем в 1946 г.: тепловой кризис и тепловое сопротивление, заключающееся в снижении полного давления при подводе тепла к движущемуся газу [1]. Уравнение (11.59) для теплового воздействия

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = -\frac{\kappa - 1}{a^2} dq \quad (14.10)$$

показывает принципиальную возможность осуществления сверхзвукового теплового сопла, в котором дозвуковой поток разгоняется до скорости звука за счет подвода критического количества тепла, а сверхзвуковой поток за критическим сечением ускоряется за счет отвода тепла (рис. 14.3). Если при показанном на рис. 14.3 направлении теплообмена на вход подать сверхзвуковой поток, то может быть осуществлен сверхзвуковой тепловой диффузор.

В отличие от изоэнтропных геометрических, расходного и механического воздействий тепловое воздействие сопровождается изменением энтропии  $ds = dq/T \geq 0$  и процесс уже не описывается уравнением изоэнтропы.

Показатель политропы термодинамического процесса в тепловом сопле. Разделим уравнение Бернулли  $dp/q = -WdW$  на уравнение неразрывности  $dq/q = -dW/W$  и полученное  $dp/dq = W^2$  сопоставим с уравнением политропы, известным из термодинамики  $\frac{dp}{dq} = n \frac{p}{q} \frac{\kappa}{\kappa} = n \frac{a^2}{\kappa}$ , получим формулу, определяющую показатель политропы

$$n = \kappa M^2. \quad (14.11)$$

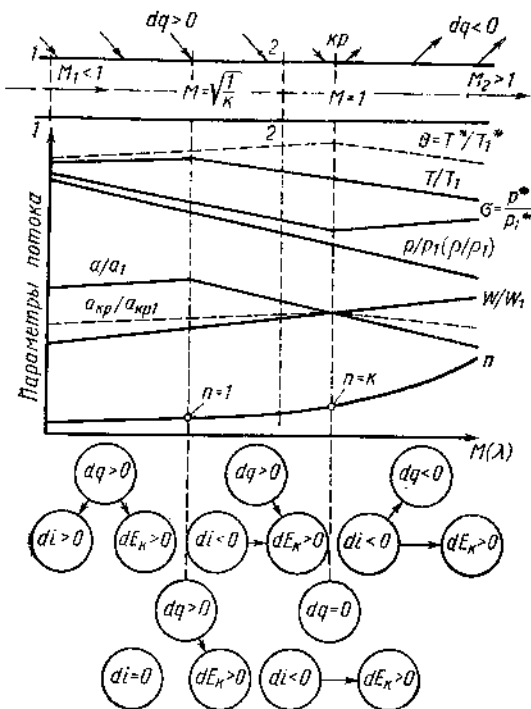


Рис. 14.3. Сверхзвуковое тепловое сопло

Рисунки 14.3 и 14.4 иллюстрируют непрерывное изменение показателя политропы в тепловом сопле и происходящее взаимопревращение энергии на его характерных участках.

В области  $0 < M < \sqrt{\frac{1}{k}} = 0,85$  (до  $\lambda = 0,87$ ), где  $0 < n < 1$  и подводимое тепло затрачивается на увеличение энтальпии (температуры)

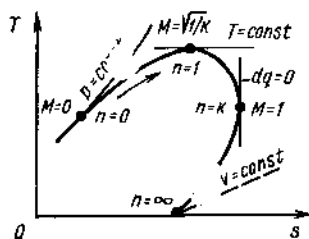


Рис. 14.4. Изменение показателя политропы  $n$  в тепловом сверхзвуковом сопле

и кинетической энергии направленного движения газа  $E_k = W^2/2$ .

В сечении где  $M = \sqrt{\frac{1}{k}}$   $n=1$  процесс изотермичен. Температура достигает максимума и все подводимое тепло идет на увеличение кинетической энергии.

В области  $\sqrt{\frac{1}{k}} < M < 1$  при  $1 < n < k$  кинетическая энергия увеличивается как за счет подводимого тепла, так и за счет уменьшения энтальпии (температуры). Это объясняется интенсивным расширением газа за счет увеличения сжимаемости с ростом числа  $M$ .

В критическом сечении  $M=1$ ,  $n=k$  теплообмен с внешней средой отсутствует и ускорение газа осуществляется только за счет уменьшения энтальпии.

В области  $M > 1$ ,  $n > k$  увеличение кинетической энергии и отвод тепла происходит за счет уменьшения энтальпии, вызванного интенсивным расширением газа.

Расчет параметров газового потока в произвольном сечении 2—2 при тепловом воздействии одного знака.

1. Температура торможения определяется из уравнения энтальпии

$$T_2^* = T_1^* + \frac{q}{C_p}, \quad (14.12)$$

увеличивается при подводе тепла  $q > 0$  и уменьшается при отводе  $q < 0$ , достигая максимума при  $M = 1$ . Следовательно максимумы  $T$  и  $T^*$  в сверхзвуковом тепловом сопле не совпадают.

Для расчета  $\lambda_2$  и изменения всех остальных параметров используем уравнение количества движения в полных импульсах (11.56). Для данного случая  $R_b = 0$  и  $\Phi_2 = \Phi_1$ . Подставляя в это равенство различные выражения полных импульсов из (14.56) и учитывая, что  $a_{кр2}/a_{кр1} = \sqrt{T_2^*/T_1^*}$ , получим следующие формулы

2. Подогрева или охлаждения газа

$$\theta = T_2^*/T_1^* = [z(\lambda_1)]^2/[z(\lambda_2)]^2. \quad (14.13)$$

3. Относительного количества тепла

$$\bar{q} = q/i_1^* = \frac{i_2^* - i_1^*}{i_1^*} = \frac{T_2^*}{T_1^*} - 1 = \frac{[z(\lambda_1)]^2}{[z(\lambda_2)]^2} - 1. \quad (14.14)$$

4. Коэффициента сохранения полного давления

$$\sigma = p_2^*/p_1^* = f(\lambda_1)/f(\lambda_2). \quad (14.15)$$

5. Отношения статических давлений

$$p_2/p_1 = r(\lambda_2)/r(\lambda_1). \quad (14.16)$$

6. Отношения температур

$$T_2/T_1 = T_2^*/T_1^* \cdot \tau(\lambda_2)/\tau(\lambda_1) = [z(\lambda_1)]^2/[z(\lambda_2)]^2 \cdot \tau(\lambda_2)/\tau(\lambda_1). \quad (14.17)$$

7. Отношения плотностей и скоростей

$$Q_2/Q_1 = W_1/W_2 = p_2/p_1 \cdot T_1/T_2 = z(\lambda_2)/z(\lambda_1)\lambda_1/\lambda_2. \quad (14.18)$$

Как видим, изменение всех параметров потока при тепловом воздействии для заданного  $k = C_p/C_v$  определяется только  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Тепловой кризис возникает при критическом подогреве  $\theta_{кр} = T_{2кр}^*/T_1^*$ .

Подставив в формулы (14.13) ... (14.17) значения  $\lambda_2 = 1$  и  $k = 1,4$ , получим формулы для определения критического подогрева и критических параметров

$$\left. \begin{aligned} \theta_{кр} &= \frac{T_{2кр}^*}{T_1^*} = \frac{[z(\lambda_1)]^2}{4}; & \bar{q}_{кр} &= \theta_{кр} - 1; \\ \sigma_{кр} &= \frac{p_{2кр}^*}{p_1^*} = \frac{f(\lambda_1)}{1,27}; & \frac{p_{2кр}}{p_1} &= \frac{0,417}{r(\lambda_1)}; \\ \frac{T_{2кр}}{T_1} &= 0,208 \frac{[z(\lambda_1)]^2}{\tau(\lambda_1)}; & \frac{Q_{2кр}}{Q_2} &= \frac{W_1}{a_{2кр}} = \frac{2\lambda_1}{z(\lambda_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (14.19)$$

Как видим,  $\theta_{кр}$  и  $\bar{q}_{кр}$  зависят только от  $\lambda_1$ , а отношения остальных параметров — только от  $\lambda_1$  и  $k = C_p/C_v$ . На рис. 14.5 представлена зависимость  $\theta_{кр} = f(\lambda_1)$ . Под кривой расположена область подогревов  $\theta < \theta_{кр}$ , соответствующих  $\lambda_2 < 1$ , а над кривой — заштрихованная область неосуществимых при данных  $\lambda_1$  подогревов. При этих подогревах  $\theta > \theta_{кр}$  на срезе трубы сохраняется кризис  $\lambda_2 = 1$ , а расход газа  $G_1$  и  $\lambda_1$  автоматически снижаются до  $G_1'$  и  $\lambda_1'$ , для которых данный подогрев будет критическим. Как видим, при уменьшении  $\lambda_1$  величина  $\theta_{кр}$  резко увеличивается. Запирание камеры сгорания ТРД не допускается, так как происходящее при этом уменьшение расхода воздуха может нарушить его нормальную работу. Для

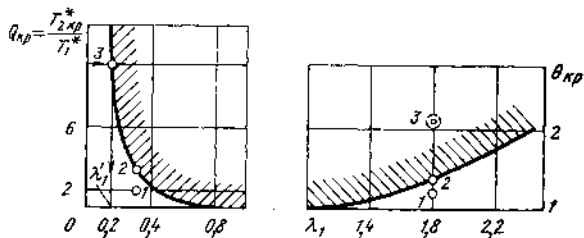


Рис. 14.5. Зависимость критического подогрева от  $\lambda_1$

предотвращения запирания камеры сгорания при заданном подогреве, необходимо снижать  $\lambda_1$  так, чтобы  $\theta < \theta_{кр}$  и  $\lambda_2 < 1$ . Однако, при заданных  $p^*$  и  $T^*$ , это приводит к увеличению ее габаритов и массы.

Методика решения задач.

I. Определяется величина критического подогрева по  $\lambda_1$  из (14.19).

II. Заданный подогрев сравнивается с критическим. Если:

1)  $\theta_1 < \theta_{кр}$ , то дозвуковой поток ускоряется, но остается дозвуковым, а сверхзвуковой тормозится, но остается сверхзвуковым  $\lambda_2 > 1$ . Величина  $\lambda_2$  определяется из (14.13) или (14.14). Остальные параметры определяются из (14.15) ... (14.18).

2)  $\theta_2 = \theta_{кр}$ , то при дозвуковом и сверхзвуковом течениях  $\lambda_2 = 1$ . Параметры рассчитываются из (14.19).

3)  $\theta_3 > \theta_{кр}$ , то на срезе трубы сохраняется кризис  $\lambda_2 = 1$ , но при дозвуковом течении расход и приведенная скорость в начале трубы снижаются до  $G_1'$  и  $\lambda_1'$ . Значение  $\lambda_1'$  определяется из первой формулы (14.19):

$$z(\lambda_1') = 2\sqrt{\theta_3}. \quad (14.20)$$

Остальные параметры определяются из (14.19) при замене в них  $\lambda_1$  на  $\lambda_1'$ .

Если  $\lambda_1 > 1$  при  $\theta_3 > \theta_{кр}$ , то в промежуточном сечении теплового диффузора возникает прямой скачок уплотнения, за которым дозвуковой поток ускоряется до  $\lambda_2 = 1$ .

**Задача 14.4.** Воздух поступает в цилиндрическую камеру сгорания  $\lambda_1 = 0,3$ ;  $p_1^* = 10^6$  Па;  $T_1^* = 400$  К;  $S = 0,1$  м<sup>2</sup>. Необходимо осуществить три различных подогрева воздуха —  $\theta_1 = 2$ ,  $\theta_2 = 3,3$ ,  $\theta_3 = 10$ . Доказать, что при  $\theta_1 = 2$  —  $\lambda_2 = 0,48$ ;  $\lambda_1' = \lambda_1 = 0,3$ ;  $G_1' = G_1 = 93$  кг/с;  $\sigma = 0,945$ ; при  $\theta_2 = 3,3$ ;  $\lambda_2 = 1$ ;  $\lambda_1' = \lambda_1 = 0,3$ ;  $G_1' = 93$  кг/с;  $\sigma = 0,825$ ; при  $\theta_3 = 10$ ;  $\lambda_2 = 1$ ;  $\lambda_1' = 0,16$ ;  $G_1' = 64$  кг/с;  $\sigma = 0,8$ .

Тепловое сопротивление. Сопоставление формул (14.15) и (14.10) с изменением  $f(\lambda)$  [см. приложение IV] показывает, что при подводе тепла как к дозвуковому, так и к сверхзвуковому потоку, полное давление уменьшается и  $\sigma = p_2^*/p_1^* < 1$ .

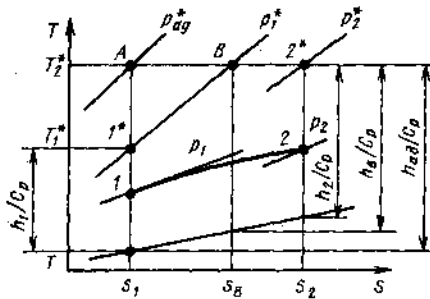


Рис. 14.6. Иллюстрация к объяснению природы теплового сопротивления

Уменьшение полного давления при подводе тепла к движущемуся газу является специфическим тепловым сопротивлением. При отводе тепла от движущегося газа полное давление возрастает. Чем больше подогрев, тем больше снижение полного давления. Для дозвукового потока  $\sigma_{\text{н.п.}} = \left[ \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} \right]_{\lambda_2=1}^{\lambda_1=0} = 0,79$  ( $k=1,4$ ).

При подводе тепла к сверхзвуковому потоку  $\sigma_{\text{н.п.}} = \left[ \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} \right]_{\lambda_2=1}^{\lambda_1 \rightarrow \lambda_{\text{max}}} = 0$ .

Природа теплового сопротивления может быть выяснена с использованием  $ts$ -диаграммы (рис. 14.6) и второго закона термодинамики (4.97), который для конечного процесса без гидравлических потерь принимает вид  $\Delta s = \int_1^2 \frac{dq}{T}$ . Это уравнение

показывает, что при одинаковом количестве подводимого тепла увеличение энтропии тем больше, чем ниже среднеинтегральная величина температуры этого процесса.

Подведем к заторможенному газу при  $p_1^* = \text{const}$  тепло  $q = C_p(T_2^* - T_1^*) =$  площади  $(S_1 - 1^* - B - S_B)$ ; при этом располагаемая энергия возрастет от  $h_1$  до  $h_B$ . Подведем теперь то же тепло к движущемуся газу  $q = C_p(T_2^* - T_1^*) =$  площади  $(S_1 - 1 - 2 - S_2) =$  площади  $(S_1 - 1^* - B - S_B)$ . Так как тепло подводится при более низкой температуре, то в соответствии с (4.97) энтропия увеличивается  $(S_2 - S_1) > (S_B - S_1)$  и возникает тепловое сопротивление  $p_2^* < p_1^*$ , а располагаемая энергия возрастает в меньшей степени  $h_1 < h_2 < h_B$ . Максимально возможное увеличение располагаемой энергии  $h_{\text{ад}} = h_1 + C_p(T_2^* - T_1^*)$  произойдет при изэнтропном подводе механической энергии в компрессоре по адиабате  $1^* - A$ . При

этом полное давление увеличивается  $p_2^*/p_1^* = (T_2^*/T_1^*)^{\frac{k}{k-1}}$ . В этом принципиальное отличие механической энергии, которая может



быть без остатка превращена в любые другие виды энергии, от тепла.

Только в энергетически изолированных течениях снижение полного давления указывает на уменьшение располагаемой энергии газа. При подводе тепла к движущемуся газу располагаемая энергия его увеличивается. Именно в этом состоит назначение камеры сгорания. Уменьшение полного давления при этом указывает только на то, что располагаемая энергия повышается на меньшую величину, чем при подводе того же количества тепла к неподвижному газу при  $p^* = \text{const}$  и при более высокой температуре. Для снижения теплового сопротивления необходимо подводить тепло при минимальном значении  $\lambda_1$ , т. е. при максимальной температуре. Этот способ снижения теплового сопротивления ограничивается увеличением массы и габаритов камеры.

#### 14.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ ТРЕНИЯ

Трение сопровождает все реальные течения. В этом параграфе рассматриваются течения вязкого газа в трубе. Величину воздействия трения будем изменять с помощью изменения длины трубы.

Уравнение (11.59) для данного случая

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = -\frac{\kappa}{a^2} dl_{\text{тр}} \quad (14.21)$$

показывает, что дозвуковой поток  $M < 1$  под воздействием трения ускоряется  $dW > 0$ , а сверхзвуковой — тормозится  $dW < 0$ . В связи с тем, что воздействие трения имеет только положительный знак  $l_{\text{тр}} = q_{\text{тр}} > 0$ , ускорение дозвукового потока и торможение сверхзвукового может происходить только до скорости звука. Плавный переход через скорость звука за счет трения невозможен. Поэтому скорость звука может устанавливаться только на срезе трубы.

Температура торможения при воздействии трения не изменяется —  $T_1^* = T_2^* = T^* = \text{const}$  и  $a_{\text{кр}} = \text{const}$  по причине энергетической изолированности течения и в соответствии с уравнением энтальпии (11.8).

Давление и плотность заторможенного газа при воздействии трения уменьшаются, что объясняется увеличением энтропии  $ds = dq_{\text{тр}}/T > 0$  и следует из (11.38) и  $p^* = \rho^* RT^*$ . Для определения  $p_2^*$  и  $\rho_2^*$  в произвольном сечении 2—2 трубы используем уравнение неразрывности (11.44)

$$\sigma = p_2^*/p_1^* = \rho_2^*/\rho_1^* = q(\lambda_1)/q(\lambda_2). \quad (14.22)$$

При известных  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$  все остальные параметры определяются по (11.28 ... 11.30).

Приведенная скорость в произвольном сечении и 2—2 трубы. Подставим в (14.21) значение

$$M^2 = \frac{2}{\kappa + 1} \lambda^2 \left/ \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \lambda^2 \right) \right., \quad \frac{dW}{W} \frac{a_{\text{кр}}}{a_{\text{кр}}} = \frac{d\lambda}{\lambda} \quad \text{и} \quad dl_{\text{тр}} = \zeta_{\text{тр}} \frac{dx}{d} \frac{W^2}{2} \quad \text{см.}$$

(6.34). После преобразования получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{d\lambda}{\lambda^3} = - \frac{\kappa}{\kappa + 1} \frac{\zeta_{\text{тр}}}{d} dx, \quad (14.23)$$

где  $dx$  — элемент длины трубы, на котором коэффициент сопротивления трения равен  $\zeta_{\text{тр}} = \text{const}$ .

В большинстве практически важных турбулентных течений газа в шероховатых трубах коэффициент сопротивления трения не зави-

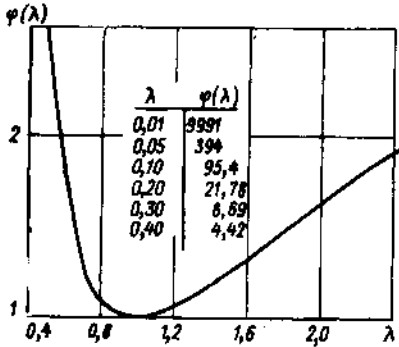


Рис. 14.7. Газодинамическая функция  $\varphi(\lambda) = 1/\lambda^2 + \ln \lambda^2$

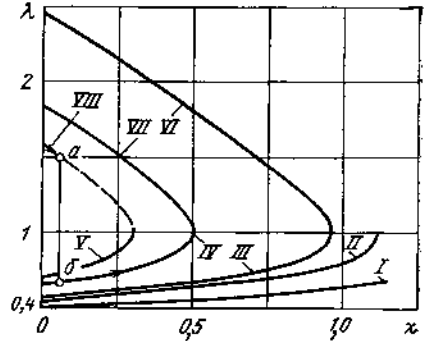


Рис. 14.8. Зависимость  $\lambda_2 = f(\lambda_1, \chi)$

сит от числа Рейнольдса, а в технически гладких трубах лишь слабо зависит от него (8.30). Кроме того, при заданном течении число Рейнольдса  $Re = \rho Wd/\mu$  изменяется вдоль трубы только в связи с изменением  $\mu$  за счет относительно небольшого изменения температуры (1.15). Примем  $\zeta_{\text{тр}}$  вдоль данной трубы постоянным и проинтегрируем (14.23) в пределах от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$  и от 0 до  $x$ , получим

$$\left( \frac{1}{\lambda_1^2} + \ln \lambda_1^2 \right) - \left( \frac{1}{\lambda_2^2} + \ln \lambda_2^2 \right) = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{\zeta_{\text{тр}}}{d} x = \chi, \quad (14.24)$$

где  $\chi$  — приведенная длина трубы — характеризует особенности газа и течения:  $\left( \frac{1}{\lambda^2} + \ln \lambda^2 \right) = \varphi(\lambda)$  — газодинамическая функция (рис. 14.7). Приняв эти обозначения, придадим (14.24) более краткую форму

$$\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2) = \chi. \quad (14.25)$$

Критическую приведенную длину трубы определим из (14.25) при  $\lambda_2 = 1$  и  $\varphi(\lambda_2) = 1$

$$\chi_{\text{кр}} = \varphi(\lambda_1) - 1. \quad (14.26)$$

На рис. 14.8 приведены графики  $\lambda_2 = f(\lambda_1; \chi)$ , рассчитанные по (14.25). Величина  $\lambda_1$  отложена по оси ординат при  $\chi = 0$ . Каждому  $\lambda_1$  соответствует определенная критическая приведенная длина тру-

бы  $\chi_{кр}$ , при которой на срезе трубы устанавливается  $\lambda_2 = 1$  и труба оказывается «запертой». Этот режим называется кризисом воздействия трения. При дальнейшем увеличении длины трубы  $\chi_{кр} > \chi_{кр}$  на ее срезе сохраняется кризис  $\lambda_2 = 1$  и  $W_2 = a_{кр}$ , но плотность газа уменьшается из-за дополнительного уменьшения давления. Расход газа снижается  $G_{1кр} < G_1$  и  $\lambda_1$  изменяется до  $\lambda_1'$ : если  $\lambda_1 < 1$ , то  $\lambda_1' < \lambda_1$ , а если  $\lambda_1 > 1$ , то  $\lambda_1' > \lambda_1$ , что соответствует уменьшению  $q(\lambda_1')$  и, следовательно, расхода. Величина  $\lambda_1'$  определяется из (14.26). Чем короче труба, тем большую величину имеет  $\lambda_1 < 1$  и тем меньшую  $\lambda_1 > 1$ , при которых на срезе устанавливается кризис. При  $\chi = 0$  труба превращается в отверстие, для которого  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ . В этом случае расход газа достигает максимальной величины

$$G_{max} = m \frac{p_1^* S}{\sqrt{T^*}}. \text{ При } \chi \rightarrow \infty \lambda_1 \rightarrow 0 \text{ и } G_1 \rightarrow 0.$$

Рассмотрим возможные режимы течения по трубе заданной длины  $\chi = 0,5$ . При  $\lambda_1 = 0,5; 0,55$  и  $0,57$  (кривые *I, II, III*) в трубе реализуются дозвуковые течения. Величины  $\lambda_2$  рассчитываются из (14.25). При  $\lambda_1 = 0,65$  на срезе трубы  $\chi = 0,5$  устанавливается скорость звука  $\lambda_2 = 1$  (кривая *IV*). При этом расход достигает максимальной для данных условий величины. Дальнейшее увеличение  $\lambda_1$  и расхода для данной трубы невозможно, например, режим *V* для  $\chi = 0,5$  неосуществим.

При  $\lambda_1 = 2,45$  течение в трубах  $\chi = 0,5$  все сверхзвуковое  $\lambda_2 \approx 1,8$  (режим *VI*). Уменьшая  $\lambda_1$ , т. е. увеличивая расход, приходим при  $\lambda_1 = 1,83$  к *VII* критическому режиму  $\lambda_2 = 1$ . Дальнейшее снижение приведенной скорости на входе, например, до  $\lambda_1 = 1,6$  приводит к режиму *VIII*, при котором непрерывное торможение сверхзвукового потока невозможно, так как оно привело бы к кризису в промежуточном сечении трубы. Поэтому сверхзвуковой поток плавно тормозится лишь на части трубы, до некоторого сечения, в котором возникает прямой скачок уплотнения  $a-b$ . За прямым скачком дозвуковой поток ускоряется до  $\lambda_2 = 1$  на срезе трубы. Положение скачка в трубе определяется основным кинематическим соотношением для прямого скачка  $\lambda_a \lambda_b = 1$ . В действительности возникает не прямой скачок уплотнения, а система скачков. Однако, как показывают исследования, их суммарный эффект близок к эффекту, вызываемому рассмотренным прямым скачком.

Термодинамический процесс при течении с трением протекает при переменном показателе политропы  $n$ , как и процесс при подводе тепла. Продифференцируем уравнения политропы  $T = q^{n-1} \text{const}$ , неразрывности  $qW = \text{const}$  и температуры торможения  $T^* = T + \frac{W^2}{2\kappa} = \text{const}$ . Получим соответственно  $\frac{dT}{T} =$

$$= (n-1) \frac{dq}{q}; \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dW}{W}; \quad dT = -(\kappa-1) \frac{W dW}{\kappa R}.$$

Решая совместно эти уравнения и заменяя  $\kappa R T = a^2$ , найдем, что

$$n = 1 + (\kappa-1) M^2. \quad (14.27)$$

На рис. 14.9 представлено изменение параметров газа и показателя политропы в трубе для течения с трением в зависимости от  $\lambda_2$ . Принято для дозвукового потока  $\lambda_1=0,1$  для сверхзвукового —  $\lambda_1=2,051$  и  $k=1,4$ . Разрыв между графиками для дозвукового и сверхзвукового потоков подчеркивает невозможность плавного перехода

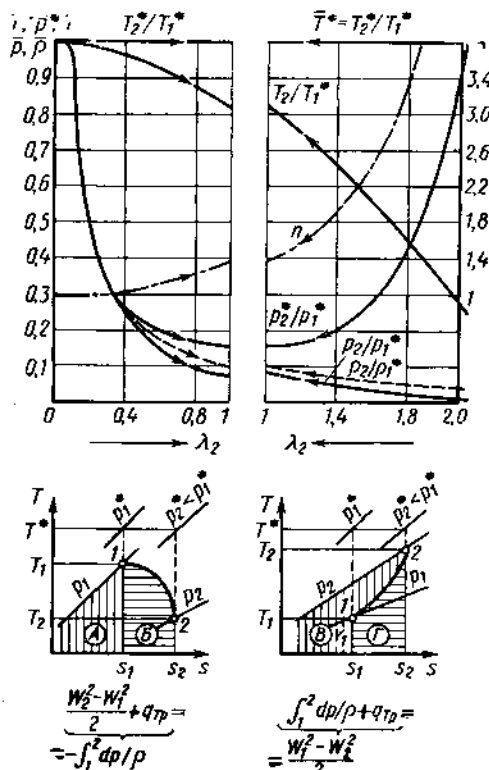


Рис. 14.9. Изменение параметров газового потока при воздействии трения

рен. Затем показатель политропы уменьшается и при  $\lambda_2=1$   $n=k$ .

Уменьшение кинетической энергии газа  $\frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$  (сумма площадей

$B$  и  $\Gamma$  диаграммы  $Ts$  сверхзвукового течения) расходуется на совершение работы трения (площадь  $\Gamma=q_{тр}$ ) и на работу проталки-

вания газа в области с большим давлением (площадь  $B = \int_1^2 \frac{dp}{\rho}$ ).

**Задача 14.5.** Воздух  $p_1^*=5 \cdot 10^5$  Па,  $T_1^*=400$  К,  $\lambda_1=0,5$ ,  $\mu=1,6 \cdot 10^{-5}$  Н·с/м<sup>2</sup> течет в трубе  $d=0,2$  м при относительной шероховатости  $\Delta/R=1/125$ ;  $\lambda_2=1$ . Доказать, что  $\chi_{кр}=1,6$ ;  $x_{кр}=9,8$  м;  $G=22,6$  кг/с;  $W_2=366$  м/с;  $p_2^*=0,71 p_1^*$ ;  $p_2=1,87 \cdot 10^5$  Па;  $T_2=333$  К.

через скорость звука за счет трения. При  $M \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow T^*$ , что соответствует точке  $I$  на диаграмме  $Ts$  для дозвукового течения,  $n \rightarrow 1$  и процесс близок к изотермическому. При  $M_2=1$   $n=k$  и процесс в критическом сечении на выходе из трубы адиабатен. На срезе трубы величина энтропии максимальна, а полное давление минимально. В соответствии с уравне-

нием Бернулли  $\int_1^2 \frac{dp}{\rho} =$

$$= - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} - l_{тр}, \text{ работа про-}$$

талкивания  $\int_1^2 \frac{dp}{\rho}$ , равная

сумме площадей  $A$  и  $B$  в диаграмме  $Ts$ , затрачивается на увеличение кинетической энергии газа (площадь  $A$ ) и на совершение работы трения (площадь  $B$ ). При  $M_1 \rightarrow \infty$  (точка  $I$  на диаграмме  $Ts$  для сверхзвукового течения)  $n \rightarrow \infty$  и процесс изохо-

## 14.5. КОМБИНИРОВАННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

В рассмотренных сверхзвуковых соплах газ ускоряется от дозвуковой скорости до сверхзвуковой за счет одноименных воздействий при изменении их знака за критическим сечением.

С использованием рассмотренных пяти воздействий можно представить 16 комбинированных сверхзвуковых сопел, в которых дозвуковой и сверхзвуковой потоки ускоряются разноименными воздействиями различных знаков. Например, дозвуковой поток ускоряется до  $\lambda=1$  в цилиндрической трубе за счет подвода тепла, а сверхзвуковой — в расширяющемся канале до  $\lambda>1$ . Такое сопло используется в некоторых СПВРД.

**Задача 14.6.** Нарисуйте 20 схем возможных сверхзвуковых сопел. Отметьте сопла, имеющие практическое значение для получения сверхзвуковых потоков.

На практике газовый поток часто подвергается одновременно нескольким воздействиям. Суммарный эффект может быть оценен с помощью уравнения закона обращения воздействия. Например, определим положение критического сечения сопла Лавалья, работающего с трением. Учтем, что критическому сечению соответствует  $M=1$  и запишем уравнение обращения воздействия:

$$(M^2 - 1) \frac{dW}{W} = 0 = \frac{dS}{S} - \frac{\kappa}{a^2} dl_{\text{тр}}, \text{ т. е. } \frac{dS}{S} = \frac{\kappa}{a^2} dl_{\text{тр}}.$$

Так как  $dl_{\text{тр}} > 0$ , то при трении критическое сечение располагается в расширяющейся части сопла Лавалья, а в горле поток является дозвуковым.

**Задача 14.7.** Определить положение критического сечения относительно горла сопла Лавалья, если течение в нем сопровождается подводом тепла (догорание топлива) и отводом тепла (охлаждение стенок).

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ.  
РЕАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СОПЛАХ

Характеристики и работоспособность реактивных двигателей и тепловых аппаратов определяются характером силового, теплового и химического или физического взаимодействий между твердыми поверхностями тел и потоками жидкостей, их обтекающих. Эти взаимодействия обусловлены, в конечном счете, процессами, происходящими в пограничном слое. Основные идеи теории пограничного слоя и определение динамического пограничного слоя уже были приведены в п. 1.5.

Теория пограничного слоя изучает обтекание твердых тел реальной жидкостью при больших числах Рейнольдса  $Re = \rho_n u_n l / \mu_n \gg \gg 1$ , где  $\rho_n$ ,  $u_n$ ,  $\mu_n$  — параметры невозмущенного потока,  $l$  — характерный размер тела (см. рис. 1.5). В дальнейшем будет доказано, что только при  $Re \gg 1$  пограничный слой обладает основным своим свойством — относительно малой толщиной  $\delta/x \ll 1$ . Следует иметь в виду, что масштаб длины вдоль оси  $y$  на всех рисунках, изображающих пограничный слой, для наглядности сильно увеличен.

Течения при  $Re \gg 1$  это течения маловязких жидкостей (газы, вода, керосин и т. д.) с достаточно большими скоростями и около тел достаточно больших размеров.

Течение при  $Re \gg 1$  реализуется в авиационной и ракетной технике, где достижения теории пограничного слоя широко используются и перед ней ставятся все более сложные задачи. Исследования пограничного слоя посвящены многочисленным теоретическим и экспериментальным исследованиям и монографиям [1, 2, 18, 29, 30].

В этой главе мы будем рассматривать внешнее обтекание тел или течения внутри каналов, когда площадь сечения пограничного слоя составляет малую долю сечения канала, так что течение в ядре потока потенциально.

Тепловой пограничный слой. Пусть газ обтекает с  $Re \gg 1$  нагретую пластину  $T_w > T_\infty$  (рис. 15.1). Очевидно, что газ подогревается в пристеночном слое, тем более тонком  $\delta_T = \delta_T(x)$ , чем больше тепловой аналог числа Рейнольдса — число Пекле  $Pe = Re Pr = u_n l / \chi_n$ , т. е. чем больше скорость  $u_n$  невозмущенного потока и чем меньше коэффициент температуропроводности жидкости  $\chi$ . Этот слой называется тепловым или температурным пограничным слоем. Как видим, поле температур в пограничном слое определяется полем скоростей и температуропроводностью жидкости.

В пределах теплового пограничного слоя поперечные градиенты температур  $\partial T/\partial y$  могут быть велики и их необходимо учитывать при расчете течения в пограничном слое.

Вне теплового пограничного слоя  $\partial T/\partial y \approx 0$  и теплопроводность не учитывается.

Тепловой пограничный слой возникает также при больших числах  $M_n$  в результате аэродинамического нагрева газа (см. п. 11.1).

Диффузионный пограничный слой  $\delta_d = \delta_d(x)$  по структуре аналогичен тепловому. Например, когда искусственный спутник земли входит в плотные слои атмосферы со скоростью

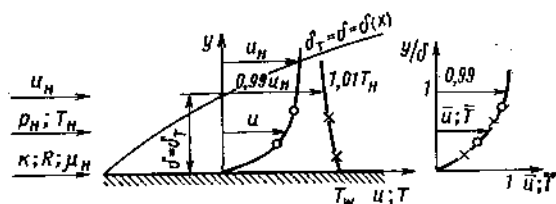


Рис. 15.1. Динамический и тепловой пограничные слои

$W_n = 8$  км/с, то теплота трения в пограничном слое частично затрачивается на испарение графитовой обмазки поверхности спутника при температуре  $\sim 4000$  К. Эта температура намного ниже температуры торможения, что и обеспечивает сохранность спутника. Пары графита диффундируют в диффузионный пограничный слой и его концентрация  $c$  изменяется от 100% на стенке до нуля на внешней границе пограничного слоя. Диффузионный пограничный слой тем тоньше, чем больше  $u_n$  и чем меньше коэффициент диффузии  $D$ . Следовательно, поле концентраций определяется также полем скоростей и все три поля должны иметь общие свойства. Между тем, размерные поля скоростей  $u = u(y)$  с одной стороны и поля температур  $T = T(y)$  и концентраций  $c = c(y)$  с другой, имеют различную форму и различные граничные условия:

Внутреннее (на стенке)  $y = 0; u_w = 0, T = T_w, c = c_w$

Внешнее  $y = \delta; u = 0,99u_n, T = 0,99T_n, c = 0,99c_n$

Это затрудняет теоретические исследования пограничного слоя.

Безразмерные поля скоростей, температур и концентраций используются в теории пограничного слоя в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} = u/u_n = f_1(y/\delta_T); \quad \bar{T} = \frac{T - T_w}{T_n - T_w} = f_2\left(\frac{y}{\delta_T}\right); \\ \bar{c} = \frac{c - c_w}{c_n - c_w} = f_3\left(\frac{y}{\delta_d}\right). \end{aligned} \right\} \quad (15.1)$$

Для больших чисел  $M$   $\bar{T} = \frac{T^* - T_w}{T_n^* - T_w} = f_3\left(\frac{y}{\delta_T}\right).$

Несмотря на то, что в общем случае безразмерные поля скоростей, температур и концентраций не совпадают, их использование имеет следующие преимущества, облегчающие исследования:

1. Граничные условия для всех трех пограничных слоев в безразмерных координатах одинаковы и определяются: внутреннее — из условия прилипания, внешнее — по общепринятой договоренности об определении толщины асимптотических пограничных слоев

$$\left. \begin{array}{l} \text{Внутреннее } y/\delta = \eta = 0, \quad \bar{u} = \bar{T} = \bar{c} = \bar{T}^* = 0. \\ \text{Наружное } y/\delta = \eta = 1, \quad \bar{u} = \bar{T} = \bar{c} = \bar{T}^* = 0,99. \end{array} \right\} \quad (15.2)$$

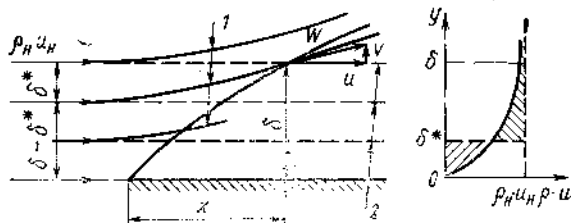


Рис. 15.2. Определение толщины вытеснения:  
1—линия тока; 2—линии тока идеальной жидкости

2. При одном и том же режиме течения в пограничном слое (см. ниже), безразмерные поля одного и того же параметра в ряде случаев аффинно-подобны, т. е. безразмерные поля совпадают.

3. В некоторых случаях все три безразмерные поля совпадают. Тогда изучение всех трех явлений сводится к изучению одного из них.

Вытесняющее действие пограничного слоя состоит в том, что через его сечения, за счет уменьшения скорости и плотности, протекает меньше реальной жидкости, чем протекало бы идеальной, т. е. в том, что часть жидкости вытесняется за его границу во внешний поток. На рис. 15.2 представлено взаимодействие пограничного слоя с набегающим потоком, приводящее к отклонению линий тока от поверхности тела во внешний поток. Это приводит к появлению в пограничном слое вертикальной составляющей  $v$  скорости  $W$ . Из-за малой относительной толщины пограничного слоя угол наклона линий тока очень мал и, следовательно, составляющая  $v$  при обтекании плоской пластины очень мала и не сопоставима с горизонтальной составляющей  $v \ll u$ . Поэтому изменение количества движения жидкости в пограничном слое в направлении оси  $y$  практически отсутствует. Отсюда мы приходим к важнейшему выводу теории пограничного слоя о том, что статическое давление поперек пограничного слоя не изменяется

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (15.3)$$

**Задача 15.1.** Нарисуйте схему  $p = p(y)$  и  $p^* = p^*(y)$  в произвольном сечении пограничного слоя (см. рис. 1.5).



Пограничный слой вносит, кроме вытесняющего действия, следующие эффекты: за счет трения удельное секундное количество движения жидкости, текущей в пограничном слое, уменьшается вдоль оси  $x$ , уменьшается ее удельная кинетическая энергия, могут изменяться энтальпия и концентрация избыточного элемента.

## 15.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Толщина пограничного слоя  $\delta = \delta(x)$  количественно не оценивается исчерпывающим образом эффекты, вносимые пограничным слоем. Кроме того, определение  $\delta$  в экспериментах чрезвычайно затруднено из-за асимптотичности пограничного слоя. Поэтому, для количественной оценки перечисленных эффектов и для более точного определения в экспериментах  $\delta$ , вводятся интегральные толщины. Рассмотрим лишь две из них.

Толщина вытеснения  $\delta^*$  есть расстояние, на которое отодвигается от тела линия тока внешнего течения в результате вытесняющего действия пограничного слоя (см. рис. 15.2).

Иначе, толщина вытеснения  $\delta^*(x)$  это толщина слоя, в каждом сечении которого  $\delta^* \cdot I$  расход невозмущенного потока  $\delta^* \rho_n u_n$  равен расходу, вытесненному из пограничного слоя к соответствующему сечению  $\delta \rho_n u_n - \int_0^\delta \rho u dy$ , т. е.  $\delta^* \rho_n u_n = \delta \rho_n u_n -$

$-\int_0^\delta \rho u dy$ . Учитывая, что  $\delta \rho_n u_n = \int_0^\delta \rho_n u_n dy$ , получим

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_n u_n}\right) dy. \quad (15.4)$$

Обозначим  $y/\delta = \eta$ , тогда  $dy = \delta d\eta$ . При  $y=0$ ,  $\eta=0$ ; при  $y=\delta$ ,  $\eta=1$  и

$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_n u_n}\right) d\eta. \quad (15.5)$$

Из графика  $\rho u = f(y)$  (см. рис. 15.2) следует, что величина  $\delta^*$  легко и достаточно определенно находится из условия равенства заштрихованных площадей. При этом, асимптотичность пограничного слоя практически не оказывает влияния на ее величину. Величина  $\delta$  определяется из (15.5).

Толщина потери импульса  $\delta^{**} = \delta^{**}(x)$  — это толщина слоя, в каждом сечении которого газ с параметрами невозмущенного потока проносит секундное количество движения, равное потерянному жидкостью, текущей в пограничном слое за счет уменьшения скорости (из-за трения).

Приравняв секундное количество движения газа в слое толщиной  $\delta^{**}$ , равное  $\delta^{**} \rho_n u_n^2$ , уменьшению секундного количества движения массы жидкости, текущей в пограничном слое, получим

$$\delta^{**} \rho_n u_n = \int_0^{\delta} \rho u u_n dy - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy, \text{ т. е.}$$

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_n u_n} \left(1 - \frac{u}{u_n}\right) dy \text{ или } \delta^{**} = \delta \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_n u_n} \left(1 - \frac{u}{u_n}\right) d\eta. \quad (15.6)$$

Отношение этих толщин называется формпараметром

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{\delta^* \rho_n u_n^2}{\delta^{**} \rho_n u_n^2}. \quad (15.7)$$

Формпараметр — это отношение количества движения жидкости, вытесненной из пограничного слоя во внешний поток, к количеству движения, потерянного жидкостью, протекающей в пограничном слое. Чем больше величина  $H$ , тем меньше *наполненность поля скорости* пограничного слоя.

Порядок расчета безотрывного обтекания тела при  $Re \gg 1$  и использование толщины вытеснения:

1) рассчитывают параметры жидкости  $u_1 = u_1(x)$ ,  $p_1 = p_1(x)$ ,  $T_1 = T_1(x)$  и т. д. на поверхности исследуемого тела при обтекании его идеальной жидкостью. В первом приближении принимают, что эти параметры равны параметрам на внешней границе пограничного слоя;

2) по найденным параметрам рассчитываются параметры жидкости первого приближения в пограничном слое, в том числе  $\delta^*$ ;

3) поверхность тела во всех сечениях мысленно отодвигают по нормали в сторону потока на величину  $\delta^*$ ;

4) рассчитывают параметры идеальной жидкости на поверхностях полученного фиктивного тела. Найденные параметры принимают за параметры второго приближения для внешней границы пограничного слоя;

5) рассчитывают параметры пограничного слоя второго приближения.

При  $Re \gg 1$   $\delta/x \ll 1$ , поэтому приближенные расчеты ограничивают вторым приближением.

Рассмотрим пример использования толщин вытеснения и потери импульса при оценке влияния пограничного слоя на тягу ракетного двигателя. Опустим ряд деталей [1]. Пусть идеальное плоское сопло Лавале рассчитано для получения тяги  $R = G u$  (штрихпунктир на рис. 15.3). При реальном течении в сопле Лавале возникает пограничный слой и тяга уменьшится, по сравнению с расчетной, за счет уменьшения расхода и скорости жидкости в пограничном слое. Для восстановления тяги до расчетной при неизменных  $p^*$  и  $T^*$  и  $p_c = p_n$  необхо-

димо все поперечные сечения сопла увеличить от  $h_n$  до  $h_d = h_n + 2\delta^* + 2\delta^{**}$  (сплошная линия). При увеличении размеров на  $2\delta^*$  (пунктир) расход газа окажется равным расчетному. Однако, при этом, тяга будет еще меньше расчетной, так как в сохраняющемся пограничном слое газ имеет меньшие скорости. При увеличении поперечных размеров сопла еще на  $2\delta^{**}$  тяга создаваемая реальным соплом с пограничным слоем будет равна расчетной, правда при несколько большем расходе газа, чем в идеальном случае, что и компенсирует потери количества движения газа в пограничном слое скорректированного сопла.

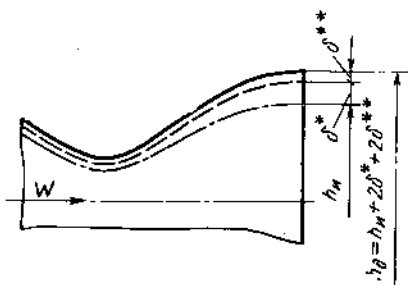


Рис. 15.3. Коррекция сопла Лаваля

**Задача 15.2.** Указать методику расчета параметров потока на внешней границе пограничного слоя при течении газа через сопло Лаваля, имеющего сечения  $h_d = h_d(x)$ . Толщина вытеснения задана  $\delta^* = \delta^*(x)$ .

## 15.2. ЛАМИНАРНЫЙ, ПЕРЕХОДНЫЙ И ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Течение в пограничном слое на стенке (рис. 15.4) может быть ламинарным, переходным и турбулентным, независимо от режима течения невозмущенного потока. Имеется много общего между течениями в трубе и в пограничном слое на стенке. Если  $Re < Re_{d,кр} = (\rho u_{ср} d / \mu)_{кр}$ , то течение во всей трубе ламинарно, если  $Re > Re_{d,кр}$  — турбулентное (см. п. 6.1). Если для пограничного слоя на стенке за характерный размер принять толщину пограничного слоя  $\delta$ , соответствующую радиусу трубы  $\delta = d/2$ , а за характерную скорость — скорость внешнего потока  $u_n$ , соответствующую скорости на оси трубы  $u_n = u_{max}$ , то, как показывают эксперименты, переход ламинарного течения в турбулентное будет также определяться критическим числом Рейнольдса

$$Re_{\delta,кр} = \rho u_n \delta_{кр} / \mu = (2,8 \dots 30) 10^3. \quad (15.8)$$

Как видим, значение критического числа Рейнольдса для пограничного слоя на плоской пластине и для трубы имеют один и тот же порядок. Разница заключается в том, что вдоль достаточно длинной пластины режим течения в пограничном слое изменяется. На малых расстояниях от передней кромки пластины толщина пограничного слоя мала ( $\delta < \delta_{кр}$ ) и в пограничном слое сохраняется устойчивое ламинарное течение с молекулярным механизмом переноса. При увеличении толщины ламинарного пограничного слоя до критической величины  $\delta_{кр}$  при расстоянии  $x_{кр}$  устойчивость ламинарного течения в пограничном слое нарушается и появляется участок переходного течения, где хаотически во времени сменяются ламинарный и турбулентный режимы течения. За переходным уча-

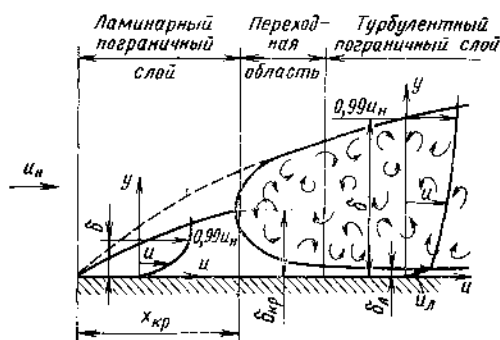


Рис. 15.4. Ламинарный, переходный и турбулентный пограничные слои

стком начинается турбулентный пограничный слой с турбулентным механизмом переноса. Характерным признаком перехода является резкое увеличение толщины пограничного слоя и напряжения трения на стенке. Длина переходного участка не велика и течение на этом участке исследовано недостаточно. Поэтому в расчетах принимают, что ламинарный пограничный слой в сечении  $x_{кр}$  сразу переходит в турбулентный.

В дальнейшем будет установлена количественная связь между  $\delta$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^{**}$  и  $x$ . Каждый из этих параметров может быть принят за характерный размер пограничного слоя, тогда критические числа Рейнольдса для пограничного слоя на плоской пластине будут

$$\left. \begin{aligned} Re_{x_{кр}} &= \rho_n u_n x_{кр} / \mu_n = (3,2 \dots 30) 10^5; \\ Re_{\delta_{кр}^*} &= \rho_n u_n \delta_{кр}^* / \mu_n = (1 \dots 10) 10^3; \\ Re_{\delta_{кр}^{**}} &= \rho_n u_n \delta_{кр}^{**} / \mu_n = (4 \dots 40) 10^2. \end{aligned} \right\} (15.9)$$

Существенное влияние на переход оказывает степень турбулентности набегающего потока, продольный градиент давления  $dp/dx$  и различные возмущения. Меньшие значения  $Re_{кр}$  относятся к более высокой степени турбулентности набегающего потока и к диффузорным течениям ( $dp/dx > 0$ ), большие — к мало турбулизованным конфузорным течениям ( $dp/dx < 0$ ).

### 15.3. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Ламинарный пограничный слой имеет место при  $Re = \rho_n u_n \delta / \mu < Re_{\delta_{кр}^*}$ , т. е. вблизи передних кромок обтекаемых тел (малые  $x$  и  $\delta$ ), при полетах на больших высотах или при течениях разреженных газов (малые  $\rho$ ), при повышенной вязкости жидкости и при искусственной ламинаризации пограничного слоя (см. п. 15.6). При этом, однако, число Рейнольдса всегда должно оставаться достаточно большим  $Re \gg 1$  и  $\delta/x \ll 1$ .

Дифференциальные уравнения пограничного слоя. Течение жидкости в пограничном слое описывается системой основных дифференциальных уравнений (см. п. 4.14). Рассмотрим установившееся двухмерное течение сжимаемой вязкой жидкости при отсутствии массовых сил вдоль плоской или слабо иск-

ривленной стенки\*. Ось  $x$  направим по поверхности стенки в направлении вектора скорости, ось  $y$  — в направлении внешней нормали к поверхности стенки.

Для этого случая система основных дифференциальных уравнений принимает следующий вид

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (15.10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad (15.11)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad (15.12)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho C_p} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\nu}{C_p} \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\}. \quad (15.13)$$

Упростим уравнения (15.10 ... 15.13), исключив из них члены относительно малой величины. Для этого приведем эти уравнения к безразмерному виду, используя следующие безразмерные величины:

$$\bar{u} = u/u_n; \quad \bar{v} = v/u_n; \quad \bar{p} = p/\rho_n u_n^2; \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_n; \quad \bar{T} = T/T_n;$$

$$\bar{\nu} = \nu/\nu_n; \quad \bar{\chi} = \chi/\chi_n; \quad \bar{C}_p = C_p/C_{p_n}; \quad \bar{x} = x/l; \quad \bar{y} = y/l; \quad \bar{\delta} = \delta/l; \quad \bar{\delta}_T = \delta_T/l.$$

Характерный размер тела  $l$  выберем так, чтобы  $Re = u_n l / \nu_n \gg 1$ ,  $\delta/l \ll 1$ ,  $\delta_T/l \ll 1$ , а  $\partial \bar{u} / \partial \bar{x}$ ,  $\partial \bar{T} / \partial \bar{x}$ ,  $\partial \bar{p} / \partial \bar{x}$  имели бы порядок не более единицы, получим

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v})}{\partial \bar{y}} = 0; \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\bar{\nu}}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\bar{\nu}}{Re} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right); \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\bar{\nu}}{Re} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\bar{\nu}}{Re} \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right); \quad (3)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} = \frac{u_n^2}{C_{p_n} T_n} \frac{1}{\bar{\rho}} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\chi_n}{l u_n} \bar{\chi} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) +$$

\* Слабо искривленная вдоль оси  $x$  стенка определяется условием  $\delta/r \ll 1$  ( $\delta$  — толщина пограничного слоя,  $r$  — радиус кривизны поверхности стенки).

$$+ \frac{\nu_{H\mu}}{C_p T_H} \frac{\bar{v}}{C_p} \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\}. \quad (4)$$

Под членами уравнений указаны относительные порядки их величин. Поясним их определение. Величины  $\bar{u}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\chi}$ ,  $\bar{C}_p$ ,  $\bar{x}$  имеют по определению порядок единицы. Действительно, при  $y=0$   $\bar{u}=0$ , а при  $y=\delta$   $\bar{u}=1$ , следовательно максимальное значение  $\bar{u}$  в пределах пограничного слоя имеет порядок единицы  $\bar{u} \approx 1$  и  $\partial \bar{u} \approx 1$  и  $\partial^2 \bar{u} \approx 1$ .

При  $x=0$ ,  $\bar{x}=0$ ; при  $x=l$ ,  $\bar{x}=1$  и  $\partial \bar{x} \sim 1$  и  $\partial^2 \bar{x} \sim 1$ . При  $y=0$ ,  $\bar{y}=0$ ; при  $y=\delta$ ,  $\bar{y}=\delta/l$ , т. е.  $\bar{y} \sim \delta/l \ll 1$  и  $\partial \bar{y} \sim \delta/l \ll 1$  и  $\partial^2 \bar{y} \sim \delta/l \ll 1$ .

Из уравнения неразрывности следует, что  $\partial \bar{v} / \partial \bar{y} \sim 1$ , так как  $\partial \bar{u} / \partial \bar{x} \sim 1$  и  $\bar{q} \sim 1$ , т. е.  $1 \sim \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right| \sim \left| \frac{\partial \bar{v}}{\delta/l} \right| \sim 1$  или  $\partial \bar{v} \sim \delta$  и  $\bar{v} \sim \delta \ll 1$ , поэтому в пограничном слое  $\partial^2 \bar{v} / \partial \bar{x}^2 \sim \delta$  и  $\partial^2 \bar{v} / \partial \bar{y}^2 \sim \delta$ .

Используя полученные результаты, найдем, что

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sim \frac{1}{\delta}; \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \sim \frac{1}{\delta^2}, \quad \text{а} \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \sim \frac{\delta}{\delta} \sim 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \sim \frac{1}{\delta}, \quad \text{т. е.}$$

в пограничном слое  $\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{y}^2$  принимает наибольшее значение. В пограничном слое силы инерции и силы вязкости имеют одинаковый

порядок, т. е.  $\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \sim \frac{\bar{v}}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right)$ .

Из этого условия и уравнения (2) следует, что

$$\text{Re} \approx 1/\delta^2 \quad \text{или} \quad \delta = \delta/l \approx 1/\sqrt{\text{Re}}. \quad (15.14)$$

Таким образом, теория пограничного слоя применима только при больших числах Рейнольдса, когда пограничный слой относительно тонок. При этом уравнение количества движения (2) можно упростить, отбросив  $\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{x}^2$  и последний член его, как относительно малые величины. Из уравнения (3) следует, что  $\partial \bar{p} / \partial \bar{y} \approx \delta$ . Интегрируя это выражение получаем, что величина разности давлений на стенке и на внешней границе пограничного слоя  $\Delta p \sim \delta^2$ , т. е. очень мала: давление поперек пограничного слоя не меняется и равно давлению на внешней границе пограничного слоя. Это давление определяется течением без трения и может быть рассчитано по уравнению Эйлера (4.39), поэтому его следует рассматривать как известную функцию продольной координаты  $x$ . Итак, для пограничного слоя уравнение (15.12) превращается в уравнение (15.3), т. е.  $\partial \bar{p} / \partial \bar{y} = 0$ , которое ранее было получено из качественных соображений. Для дальнейшего важно, что продольные градиенты давления во внешнем потоке и в пограничном слое одинаковы.

Определим порядок постоянных сомножителей уравнения (4)  
 $\frac{u_n^2}{C_{pH}T_n} = (\kappa - 1) M_n^2$  — не зависит от числа Рейнольдса, принимаем по-  
 рядок равный единицы

$$\frac{\chi_n}{l u_n} = \frac{\chi_n}{v_n} \frac{v_n}{u_n l} = \frac{1}{Pr Re} \approx \bar{\delta}^2 \quad (Re \approx 1/\bar{\delta}^2; \text{ для газов } Pr \sim 1);$$

$$\frac{v_n u_n}{C_{pH} T_n} = \frac{v}{u_n l} \frac{u_n^2}{C_p T_n} = \frac{(\kappa - 1) M_n^2}{Re} \approx \bar{\delta}^2.$$

Используем для оценки членов уравнения (4) все полученные выше результаты, перейдем в упрощенных уравнениях (1) ... (4) к размерным координатам и получим дифференциальные уравнения ламинарного пограничного слоя, которые называются уравнениями Прандтля (1904 г.) и замыкаются уравнением состояния

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0; \quad (15.15)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (15.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (15.17)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{u}{\rho C_p} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \quad (15.18)$$

$$p = \rho R T. \quad (15.19)$$

Кроме того, как уже указывалось, зависимость  $p = p(x)$  считается заданной. Граничные условия соответствуют (15.2).

При выводах принято, как и ранее, считать постоянными  $\nu$ ,  $\chi$  и  $C_p$ . Если учесть их изменение от температуры, то уравнения усложнятся, так как  $\nu$ ,  $\chi$  и  $C_p$  войдут под знаки производных.

**Задача 15.3.** Опишите физический смысл и размерность уравнений (15.15) ... (15.19) и каждого их члена.

Уравнение энергии, содержащее температуру торможения получим, умножив уравнение (15.16) на  $u$ , сложив с (15.18) и учтя, что

$$\nu u \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \left( \frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right] - \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

и

$$dT^* = dT + d \frac{u^2}{2C_p},$$

получим

$$u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{\chi}{Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} + \frac{v}{C_p} \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u^2}{2} \right) \right]. \quad (15.20)$$

Приближенно для газов  $Pr = \nu/\chi \approx 1$  и (15.20) принимает вид:

$$u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}. \quad (15.21)$$

На основании (15.21) и того, что при малых числах  $М T^* \approx T$  из уравнения (15.18) можно исключить два последних члена, выражающих тепло, выделяющееся от сжатия и трения. В этом случае тепловой поток между жидкостью и телом определяется разностью термодинамических температур газа и стенки и определяется известным из курса физики уравнением Ньютона, Дж/(м<sup>2</sup>/с)

$$q = \alpha (T_n - T_w), \quad (15.22)$$

где  $\alpha$  — коэффициент теплопередачи, Дж/(м<sup>2</sup>сК).

При больших  $М_n$  и  $Pr=1$  уравнение энергии (15.21) имеет такой же вид, как и при малых скоростях с той разницей, что оно содержит температуру торможения, а не термодинамическую температуру газа. Отсюда заключаем, что при больших  $М_n$  и  $Pr=1$  теплообмен определяется разностью между температурой торможения газа и температурой стенки в соответствии с уравнением Ньютона

$$q = \alpha (T_n^* - T_w). \quad (15.23)$$

Газ будет передавать тепло в стенку, если  $T_n^* > T_w$ . Если при этом  $T_n < T_w$ , то стенка будет нагреваться за счет тепла, выделившегося в пограничном слое за счет трения.

Дифференциальные уравнения пограничного слоя при параллельном обтекании плоской стенки и при  $Pr=1$ . Запишем уравнение Эйлера (4.39) для течения вне пограничного слоя  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ . Учитывая, что при  $y > \delta$   $v=0$ ,  $u=u_n = \text{const}$ , приходим к выводу, что при данном течении, как во внешнем потоке, так и в пограничном слое,  $\partial p / \partial x = 0$  и уравнения (15.16) и (15.21) принимают вид

$$v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (15.24)$$

$$u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}. \quad (15.25)$$

При  $Pr=1$   $\nu = \chi$  и (15.24) и (15.25) одинаковы относительно  $u$  и  $T^*$ . Однако, решения их различны вследствие разницы в граничных условиях для искомых  $u$  и  $T^*$ .

Гидродинамическая теория теплообмена и диффузии. Заменяем в (15.24) и (15.25) под знаками производных размерные  $u$  и  $T^*$  безразмерными

$$\bar{u} = u/u_n, \quad \bar{T}^* = \frac{T^* - T_w}{T_n^* - T_w},$$

получим

$$u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}; \quad (15.26)$$

$$u \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 \bar{T}^*}{\partial y^2}; \quad (15.27)$$



Следует заметить, что дифференциальное уравнение диффузии  

$$u \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2}$$
 в этих условиях аналогично уравнению энергии (15.25), где  $D$  — коэффициент диффузии, а  $\bar{C} = \frac{C - C_W}{C_n - C_W}$  — безразмерная концентрация избыточного элемента. Три аналогичных уравнения при  $\text{Pr} = \nu/\chi = \text{Pr}_d = \nu/D$ , т. е. при  $\nu = \chi = D$  и при одинаковых граничных условиях

$$y=0; \quad \eta = y/\delta = 0; \quad \bar{u} = 0; \quad \bar{T} = 0; \quad \bar{C} = 0;$$

$$y = \delta; \quad \eta = 1; \quad \bar{u} = 0,99; \quad \bar{T} = 0,99; \quad \bar{C} = 0,99$$

имеют совершенно одинаковые решения

$$\bar{u} = \bar{T} = \bar{C} = \frac{u}{u_n} = \frac{T^* - T_W}{T_n^* - T_W} = \frac{C - C_W}{C_n - C_W} = f(\eta); \quad (15.28)$$

$$\delta = \delta_T = \delta_D. \quad (15.29)$$

При малых числах  $M_n$   $T^* \approx T$  и решение будет

$$\bar{u} = \bar{T} = \bar{C} = \frac{u}{u_n} = \frac{T - T_W}{T_n - T_W} = \frac{C - C_W}{C_n - C_W} = f(\eta) \quad \text{и} \quad \delta = \delta_T = \delta_D. \quad (15.30)$$

При  $\text{Pr} = \text{Pr}_g = 1$  при больших  $M_n$  в пограничном слое на плоской стенке имеет место подобие полей скоростей, температур торможения и концентраций, а при малых  $M_n$  — полей скоростей, термодинамических температур и концентраций. Безразмерные поля всех трех параметров  $\bar{u}$ ,  $\bar{T}$  и  $\bar{C}$  в обоих случаях сливаются. Толщины динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев совпадают.

**Задача 15.4.** Объяснить в чем причина обнаруженного подобия полей скоростей, температур и концентраций в пограничном слое.

Гидродинамическая теория теплообмена и диффузии (15.28) и (15.30) позволяет заменить трудно выполнимые измерение и расчет полей температур и концентраций в пограничном слое более простым — измерением и расчетом полей скоростей.

Таким образом, анализ дифференциальных уравнений, даже без их решения, привел к практически важному результату.

Уравнения пограничного слоя существенно проще общей системы уравнений. Однако, их аналитическое решение, даже для простейшего случая обтекания плоской стенки при  $\text{Pr} = 1$ , весьма трудно. В более сложных случаях дифференциальные уравнения (15.15) ... (15.19) решаются численными методами с использованием ЭВМ. С методами решения дифференциальных уравнений можно познакомиться по следующим источникам [1, 18, 21, 22, 30].

Интегральный метод решения задач о пограничном слое. Уравнение Кармана. Определение основных характеристик пограничного слоя  $\tau$ ,  $\delta$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta^{**}$  существенно упрощается, если перейти от дифференциальных уравнений, справедливых для любой точки в пределах пограничного слоя, к интегральным

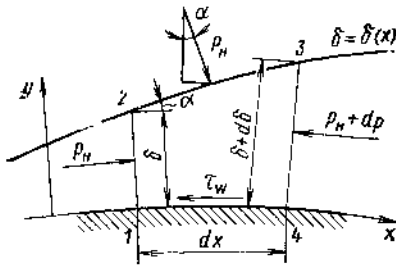


Рис. 15.5. Силы, действующие на элемент пограничного слоя

ном слое. Этим полем приходится задаваться на основании обработки табличных данных решений дифференциальных уравнений или экспериментальных данных. Поэтому этот метод является приближенным.

Получим интегральное уравнение количества движения для участка двухмерного пограничного слоя при установившемся течении сжимаемой вязкой жидкости вдоль стенки малой кривизны (рис. 15.5).

Направим ось  $x$  вдоль поверхности стенки, а ось  $y$  — по нормали к ней. Размер выделенного объема по нормали к чертежу примем равным единице. Интегральное уравнение количества движения (4.11) для рассматриваемого случая примет вид

$$R_{\Sigma x} = \int_{S_{\text{вых}}} \rho W_n u dS - \int_{S_{\text{вх}}} \rho W_n u dS. \quad (15.31)$$

Пренебрегая массовыми силами, выразим в явном виде проекцию на ось  $x$  суммы сил, действующих на контрольную поверхность 1—2—3—4 индексы у давления опущены

$R_{\Sigma x} = p\delta + p \sin \alpha dl - (p + dp)(\delta + d\delta) - \tau_w dx$ , где  $dl$  — длина дуги 2—3.

Учитывая, что  $\sin \alpha = d\delta/dl$  и пренебрегая  $dpd\delta$ , получим

$$R_{\Sigma x} = -\left(\delta \frac{dp}{dx} + \tau_w\right) dx. \quad (1)$$

Проекция на ось  $x$  секундного количества движения жидкости, втекающей в контрольный объем через участки контрольной поверхности 1—2 и 2—3 может быть выражена так

$$\begin{aligned} \int_{S_{\text{вх}}} \rho W_n u dS &= \int_0^{\delta} \rho u^2 dS + u_n \left[ \int_0^{\delta} \rho u dy + \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx - \int_0^{\delta} \rho u dy \right] = \\ &= \int_0^{\delta} \rho u^2 dS + u_n \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} \rho u dy \right) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Последний член уравнения (2) представляет произведение скорости жидкости  $u_n$ , втекающей через участок контрольной поверх-

уравнениям количества движения и неразрывности, составленным для конечного участка пограничного слоя. Преимущество метода состоит в его простоте, наглядности и универсальности: он обеспечивает получение аналитических зависимостей, как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев.

Недостаток метода состоит в том, что его использование возможно только в том случае, если известно поле скоростей в погранич-

ности 2—3, на ее секундную массу. Эта масса, при установившемся течении, равна разности масс жидкости вытекающей через участок поверхности 3—4 и втекающей через участок 1—2.

Через участок контрольной поверхности 3—4 жидкость выносит приращенное на длине  $dx$  секундное количество движения.

$$\int_{S_{\text{вых}}} \rho W_n u dS = \int_0^{\delta} \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right) dx. \quad (3)$$

Уравнение (15.31), с учетом (1), (2) и (3), примет вид

$$\delta \frac{dp}{dx} + \tau_w = - \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy + u_n \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy. \quad (4)$$

Для плоской стенки  $dp/dx = 0$ ,  $du_n/dx = 0$ , получим

$$\tau_w = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (\rho u u_n - \rho u^2) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u (u_n - u) dy. \quad (5)$$

Разделив обе части (5) на  $\rho u_n^2$  и учитывая (15.6), получим интегральное уравнение количества движения для плоской стенки и несжимаемой жидкости

$$\tau_w / \rho u_n^2 = dQ^{**} / dx. \quad (15.32)$$

Опуская преобразования уравнения (4), приведем интегральное уравнение количества движения для сжимаемой вязкой жидкости при градиентных течениях, т. е. когда  $dp/dx$ ,  $du_n/dx$ ,  $dQ_n/dx$  отличны от нуля

$$\frac{\tau_w}{\rho u_n^2} = \frac{dQ^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}}{\rho_n} \frac{d\rho_n}{dx} + \frac{1}{u_n} \frac{du_n}{dx} (2\delta^{**} + \delta^*). \quad (15.33)$$

В уравнении Кармана (15.33)  $u_n = u_n(x)$  и  $\rho_n = \rho_n(x)$  являются известными функциями, так как они всегда могут быть определены из расчета обтекания тела, увеличенного в размерах на  $\delta^* = \delta^*(x)$ , потоком идеальной жидкости или найдены из эксперимента.

Уравнение Кармана это обычное дифференциальное уравнение. Оно справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев. Уравнение содержит два неизвестных  $\tau_w$  и  $\delta^{**}$ , поэтому для его решения необходимо еще одно независимое уравнение, таким уравнением является закон трения  $\tau_w = \mu (\partial u / \partial y)_w$ . Для определения  $(\partial u / \partial y)_w$  необходимо уравнение поля скоростей в пограничном слое.

Уравнение поля скоростей для ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской стенке, как показывают опыты, хорошо аппроксимируется полиномом

$$u = A_0 + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3 + \dots$$

где  $\bar{u} = u/u_n$ ,  $\eta = y/\delta$ , а коэффициенты  $A_i$  находятся из следующих граничных условий:

$$u=0, \partial^2 \bar{u} / \partial \eta^2 = 0 \text{ при } \bar{\eta}=0; \bar{u}=1, \partial \bar{u} / \partial \eta = 0 \text{ при } \eta=1$$

Условие  $\partial^2 \bar{u} / \partial \eta^2 = 0$  вытекает из уравнения (15.24) при  $y=0$ .

Используя эти условия, найдем, что  $A_0=0$ ;  $A_1=3/2$ ;  $A_2=0$ ;  $A_3=-1/2$  и профиль скоростей будет

$$\bar{u} = \frac{3}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta^3. \quad (15.34)$$

Уравнение (15.34) показывает, что поля скоростей ламинарного пограничного слоя подобны в заданных условиях, т. е. сливаются в безразмерных координатах.

Расчет параметров ламинарного пограничного слоя при течении несжимаемой жидкости вдоль плоской стенки. Для расчета толщины вытеснения используем формулы (15.5) и (15.34) и найдем

$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left( 1 - \frac{3}{2} \eta + \frac{1}{2} \eta^3 \right) d\eta = 0,375\delta. \quad (15.35)$$

Толщина потери импульса. Используем (15.6) и (15.34), получим

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 \left( \frac{3}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta^3 \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \eta + \frac{1}{2} \eta^3 \right) d\eta = 0,139\delta. \quad (15.36)$$

Напряжение трения на поверхности стенки определим по закону Ньютона (1.11) с использованием (15.34)

$$\tau_w = \mu_n \left( \frac{du}{dy} \right)_w = \mu_n u_n \frac{d}{dy} \left[ \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \right]_w = \frac{3}{2} \mu_n \frac{u_n}{\delta}. \quad (15.37)$$

Толщина пограничного слоя  $\delta$ . В уравнение (15.32) подставим значение  $\delta^{**}$  из (15.36) и  $\tau_w$  из (15.37) и найдем, что  $\delta d\delta = \frac{3}{2 \cdot 0,139} \frac{\mu_n}{\rho_n u_n}$ . Проинтегрировав это выражение в пределах  $0-\delta$  и  $0-x$  получим

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\mu_n x}{\rho_n u_n}} \approx x^{0,5}; \quad (15.33)$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{\frac{u_n x}{\nu_n}}} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}. \quad (15.39)$$

Толщины теплового и диффузионного пограничных слоев на плоской стенке при  $T_n = \text{const}$ ,  $T_w = \text{const}$  и при  $C_n = \text{const}$ ,  $C_w = \text{const}$ , рассчитываются по формулам [30]

$$\frac{\delta_T}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x Pr}}; \quad (15.40)$$

$$\frac{\delta_D}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x Pr_k}}, \quad (15.41)$$

при  $Pr_k = Pr = 1$ ,  $\delta_T = \delta_D = \delta$ .

В газах механизмы переноса количества движения, тепла и вещества примерно одинаковы—тепловое хаотическое движение молекул. Поэтому, приближенно, часто для газов полагают  $Pr \approx Pr_k \approx 1$ ,  $\nu \approx \chi \approx D$  и толщины всех трех пограничных слоев одинаковыми. Они увеличиваются вдоль стенки пропорционально  $x^{0,5}$

Если  $Pr = Pr_k < 1$ , т. е.  $\chi = D > \nu$ , то  $\delta_T = \delta_D > \delta$ .

Если  $Pr = Pr_k > 1$ , т. е.  $\chi = D < \nu$ , то  $\delta_T = \delta_D < \delta$ .

Напряжение трения в сечении  $x$  пластины определим, используя (15.37), (15.39) и (15.36)

$$\tau_{W,x}/\rho_n u_n^2 = 0,3235/\sqrt{Re_x}. \quad (15.42)$$

На практике часто используется коэффициент сопротивления трения

$$C_{f,x} = 2\tau_{W,x}/\rho_n u_n^2 = 0,647/\sqrt{Re_x}. \quad (15.43)$$

Среднеинтегральные значения напряжения трения  $\tau_{W(0-x)}$  и коэффициента сопротивления трения  $C_{f(0-x)}$  для участка стенки  $0-x$  необходимы для расчета силы трения, действующей на стенку.

Выполнив интегрирование (15.42) и (15.43), получим \*

$$\tau_{W(0-x)} = \frac{1}{x} \int_0^x \tau_{W,x} dx = \frac{0,3235}{x} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{\rho_n u_n x}{\mu_n}}} = 2\tau_{W,x} = \frac{0,647 \rho_n u_n^2}{\sqrt{Re_x}}; \quad (15.44)$$

$$C_{f(0-x)} = \frac{1}{x} \int_0^x C_{f,x} dx = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{2\tau_{W,x}}{\rho_n u_n^2} dx = \frac{4\tau_{W,x}}{\rho_n u_n^2} = 2C_{f,x} = \frac{1,292}{\sqrt{Re_x}}. \quad (15.45)$$

Сила трения  $R_\tau$ , с которой жидкость действует на стенку длиной  $x$  и шириной  $b$ , определим по

\* Для принятого поля скорости в ламинарном пограничном слое (15.34)

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{d}{dx} 0,139\delta = 0,5 \frac{\delta^{**}}{x} \quad \text{и} \quad \frac{\tau_{W,x}}{\rho_n u_n^2} = 0,5 \frac{\delta^{**}}{x};$$

$$C_{f,x} = \frac{\delta^{**}}{x}; \quad \frac{\tau_{W(0-x)}}{\rho_n u_n^2} = \frac{\delta^{**}}{x}; \quad C_{f(0-x)} = 2 \frac{\delta^{**}}{x}.$$

известной формуле

$$R_{\tau} = \tau_{W(0-x)} x b = C_{f(0-x)} \frac{\rho_n u_n^2}{2} x b. \quad (15.46)$$

**Задача 15.5.** Нарисуйте схематично зависимости  $\tau_{Wx} = \tau_{Wx}(x)$  и  $\tau_{W(0-x)} = \tau_{W(0-x)}(x)$  и объясните физическую причину наблюдаемого изменения. Сравните профили скорости в трубе и в пограничном слое при ламинарном течении при  $u_n = u_{\max}$  и  $\delta = R$ .

**Задача 15.6.** Для условий рис. 1.5 определите силу трения на участке ламинарного пограничного слоя, если ширина пластины 2 м, а  $Re_x \approx 10^6$ . Ответ  $R_{\tau} = 0,685$  Н.

Таблица 15.1

Величина	Точное решение	Приближенное решение
Толщина вытеснения $\delta^*$	0,345 $\delta$	0,375 $\delta$
Толщина потери импульса $\delta^{**}$	0,133 $\delta$	0,139 $\delta$
Толщина пограничного слоя	$\frac{\delta}{x} = 5/\sqrt{Re_x}$	$\frac{\delta}{x} = 4,64/\sqrt{Re_x}$
Интегральный коэффициент сопротивления трения $C_{f(0-x)}$	$C_{f(0-x)} = 1,328/\sqrt{Re_x}$	$C_{f(0-x)} = 1,292/\sqrt{Re_x}$

В табл. 15.1 сравниваются результаты приближенного расчета ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской стенке с использованием интегрального уравнения количества движения с точным решением дифференциальных уравнений. Можно считать, что точность приближенных решений достаточна для практических целей.

#### 15.4. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя при внешнем обтекании можно получить из уравнений Рейнольдса (6.12) аналогично тому, как были получены уравнения ламинарного пограничного слоя (15.15) ... (15.18). Однако, решить эти уравнения, даже для простейших случаев, пока не удастся. Поэтому теория пограничного слоя для турбулентного течения является полумпирической.

Турбулентный пограничный слой при продольном обтекании гладкой плоской стенки несжимаемой жидкостью. Это течение является простейшим, так как градиент давления вдоль стенки равен нулю  $dp/dx = 0$ , поэтому скорость вне пограничного слоя постоянна  $u_n = \text{const}$ . Это позволяет ввести основное допущение о примерно одинаковой структуре турбулентных пограничных слоев на пластине и в трубе и использовать для расчета турбулентного пограничного слоя на стенке формулы, полученные в гл. 8 для турбулентного течения в трубе, заменяя в них скорость  $u_{\max}$  на оси трубы и радиус трубы  $R$  на скорость

$u_n$  невозмущенного потока и толщину пограничного слоя  $\delta$  соответственно. Следовательно, профили скорости в турбулентном ядре пограничного слоя могут быть представлены логарифмическим законом (8.13) и *степенным законом одной седьмой* (8.24) также с заменой  $u_{\max}$  на  $u_n$  и  $R$  на  $\delta$

$$u/u_n = (y/\delta)^n = \eta^n \quad (15.47)$$

при линейном законе распределения скоростей в ламинарном подслое (см. п. 8.1).

Вместе с (15.47) мы вводим предположение с подобия профилей скорости, которые в безразмерных координатах  $u/u_n$  и  $y/\delta$  сливаются. Закономерности обтекания плоской стенки имеют большое практическое значение, так как применяются при расчетах сопротивления трения лопастей турбомашин, сопел, диффузоров, летательных аппаратов и кораблей при их безотрывном обтекании. При обтекании этих тел градиент давления не равен нулю, однако, как показывают опыты, их сопротивление мало отличается от сопротивления трения плоской стенки.

Основные параметры турбулентного пограничного слоя рассчитаем на основании принятого допущения.

Толщины вытеснения  $\delta^*$  и потери импульса  $\delta^{**}$  определим, подставив значение  $u/u_n$  из (15.47) в (15.5) и (15.6) при  $n=1/7$ . После интегрирования получим

$$\delta^* = \frac{n}{n+1} \delta = 0,125\delta; \quad \delta^{**} = \frac{n}{(1+n)(1+2n)} \delta = 0,097\delta. \quad (15.48)$$

Величина формпараметра  $H = \delta^*/\delta^{**}$  для ламинарного и турбулентного пограничных слоев  $H_n = 0,375/0,139 = 2,7$ ;  $H_T = 0,125/0,097 = 1,29$  соответствует большей наполненности турбулентного пограничного слоя по сравнению с ламинарным (см. рис. 8.2)

Напряжение трения на стенке определим по (8.31), заменив  $u_{\max}$  на  $u_n$  и  $R$  на  $\delta$ , т. е.

$$\tau_{wx}/\rho_n u_n^2 = 0,0225 (v_n/u_n \delta)^{1/4} = 0,0225/\sqrt[4]{Re_{\delta}}. \quad (15.49)$$

Толщину пограничного слоя определим из интегрального уравнения количества движения (15.32), в которое подставим значение  $\tau_{wx}/\rho_n u_n^2$  из (15.49) и  $\delta^{**}$  из (15.48)

$$0,097 d\delta/dx = 0,025 (v/u_n \delta)^{1/4}.$$

Примем условно, что турбулентный пограничный слой начинается с переднего края пластины, т. е. проинтегрируем это дифференциальное уравнение в пределах от 0 до  $\delta$  и от 0 до  $x$  и получим

$$\delta = 0,37x (u_n x/v_n)^{-1/5} \approx x^{0,8}; \quad \frac{\delta}{x} = 0,37/\sqrt[5]{Re_{x}}. \quad (15.50)$$

следовательно

$$\begin{aligned} \delta^* &= 0,0461x (u_n x/v_n)^{-1/5} \approx x^{0,8}; \\ \delta^{**} &= 0,036x (u_n x/v_n)^{-1/5} \approx x^{0,8}. \end{aligned} \quad (15.51)$$

Сопоставляя (15.50) и (15.38) заключаем, что при одинаковых  $Re_x$  толщина турбулентного пограничного слоя больше, чем ламинарного, так как он нарастает быстрее —  $\delta_{турб} \approx x^{0,8}$ , а  $\delta_{л} \approx x^{0,5}$ .

Турбулентный пограничный слой также как ламинарный, может быть относительно тонким  $\delta/x \ll 1$ , только при  $Re_x \gg 1$ .

Среднеинтегральное напряжение трения на стенке  $\tau_{w(0-x)}$  определим, подставив в (15.49) значение  $\delta$  из (15.50). Для лучшего совпадения расчетных и экспериментальных

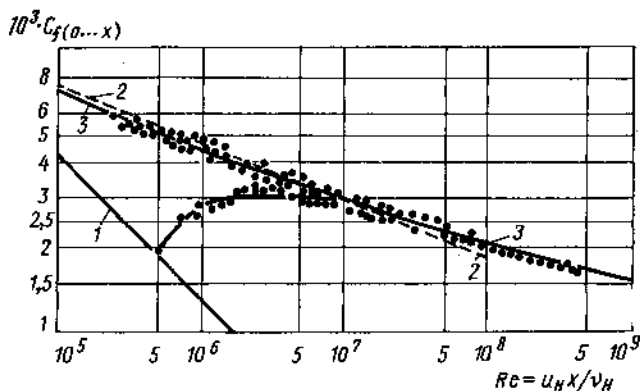


Рис. 15.6. Закон сопротивления гладкой плоской пластины

данных, полученный после интегрирования числовой множитель 0,036 заменим на 0,037

$$\tau_{w(0-x)} = \frac{1}{x} \int_0^x \tau_{w,x} dx = 0,037 \rho_n u_n^2 \left( \frac{u_n x}{\nu_n} \right)^{-1/5} \quad (15.52)$$

и

$$C_{f(0-x)} = 2 \frac{\tau_{w(0-x)}}{\rho_n u_n^2} = 0,074 \left( \frac{u_n x}{\nu_n} \right)^{-1/5} \quad (15.53)$$

Формулы (15.52) и (15.53) дают хорошее совпадение с результатами опытов в пределах  $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$  (кривая 2 на рис. 15.6). Верхний предел соответствует верхнему пределу для формулы Блазиуса (8.30), а при  $Re_x < 5 \cdot 10^5$  пограничный слой является ламинарным.

Вывод закона сопротивления из универсального логарифмического профиля скоростей значительно сложнее, чем из степенного закона и прежде всего потому, что логарифмические профили скоростей вдоль пластины не подобны один другому.

Интерполяционная формула Шлихтинга [30]

$$C_{f(0-x)} = 0,455 / (\lg Re_x)^{2,58} \quad (15.54)$$

дает хорошее совпадение с экспериментальными данными в пределах  $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^9$  (см. кривую 3 на рис. 15.6).



При одинаковых числах Рейнольдса сопротивление трения при турбулентном пограничном слое (кривые 2 и 3) существенно выше, чем при ламинарном (прямая 1, соответствующая формула 15.45). С увеличением  $Re_x$  эта разница возрастает. Следовательно, для уменьшения сопротивления трения данного тела, следует «затягивать» ламинарный пограничный слой, сдвигая  $x_{кр}$  возможно дальше по потоку.

Сила трения  $R_x$ , действующая на стенку длиной  $x$  шириной  $b$  со стороны смешанного ламинарного ( $\lambda$ ) и турбулентного ( $\tau$ ) пограничного слоя (см. рис. 15.4) рассчитывается по формуле

$$R_x = (C_{f(0-x)} x - C_{f(0-x_{кр})} x_{кр} + C_{f(0-x_{кр})} x_{кр}) b \frac{\rho_n u_n^2}{2}. \quad (15.55)$$

**Задача 15.7.** Для бесконечно тонкой плоской пластины длиной  $x=3$  и шириной  $b=10$  м при угле атаки  $\alpha=0$ , определить величину силы трения  $R_x$ , если  $u_n=30$  м/с,  $p_n=10^5$  Па,  $T_n=300$  К,  $\mu=1,8 \cdot 10^{-5}$  Н·с/м<sup>2</sup>,  $Re_{x_{кр}}=10^6$ . Ответ:  $R_x=90$  Н.

Закон сопротивления для равномерно шероховатой стенки. Шероховатость реальных поверхностей может существенно увеличивать сопротивление тел. Например, шероховатость поверхности нового корабля приводит к повышению сопротивления на 30...40% по сравнению с сопротивлением гидравлически гладкой стенки. Результаты исследования влияния шероховатости используются для определения необходимой чистоты обработки поверхностей.

Отношение высоты гребешков шероховатости  $K_S$  поверхности стенки к толщине пограничного слоя  $K_S/\delta$  является аналогом характеристики шероховатости труб  $K_S/R$  (см. п. 8.3). Для трубы относительная шероховатость вдоль течения остается постоянной, в то время как для стенки она уменьшается вместе с увеличением  $\delta=\delta(x)$ . Поэтому, при малых  $x$ , где  $K_S/\delta$  велико, имеет место режим полного проявления шероховатости, за ним следует переходный участок, а за ним — участок без проявления шероховатости. Границы между участками определяются значениями безразмерной шероховатости  $v_* K_S/v$  так же, как при течении в трубах (см. п. 8.3). При этих рассуждениях для простоты принимаем, что турбулентный пограничный слой начинается с переднего края пластины.

Прандтль и Шлихтинг [30] нашли закон сопротивления шероховатой стенки из закона сопротивления шероховатых труб путем трудоемкого пересчета, сходного с пересчетом для определения закона сопротивления гладкой стенки, приведенного в начале этого параграфа.

На рис. 15.7 приведена зависимость интегрального коэффициента сопротивления трения  $C_{f(0-x)}$  от числа  $Re_x = u_n x/v$ . В качестве параметров использованы относительная гладкость стенки  $x/K_S$  и  $u_n K_S/v = Re_{K_S}$ . Если для пластины заданной длины  $x$  изменяется скорость, то величина  $x/K_S$  остается постоянной и величина  $C_{f(0-x)}$  определяется по кривой  $x/K_S = \text{const}$ . Если изменяется длина плас-

тины при  $u_H = \text{const}$ , то  $u_H K_S / \nu = \text{const}$  и  $C_f(0-x)$  определяется по кривой  $u_H K_S / \nu = \text{const}$ . Пунктирная линия указывает границу области течений с полным проявлением шероховатости, когда  $C_f(0-x) \neq f(\text{Re})$ . Для этого режима может быть использована интерполяционная формула

$$C_f(0-x) = \left( 1,89 + 1,62 \lg \frac{x}{K_S} \right)^{-2,05} \quad (15.56)$$

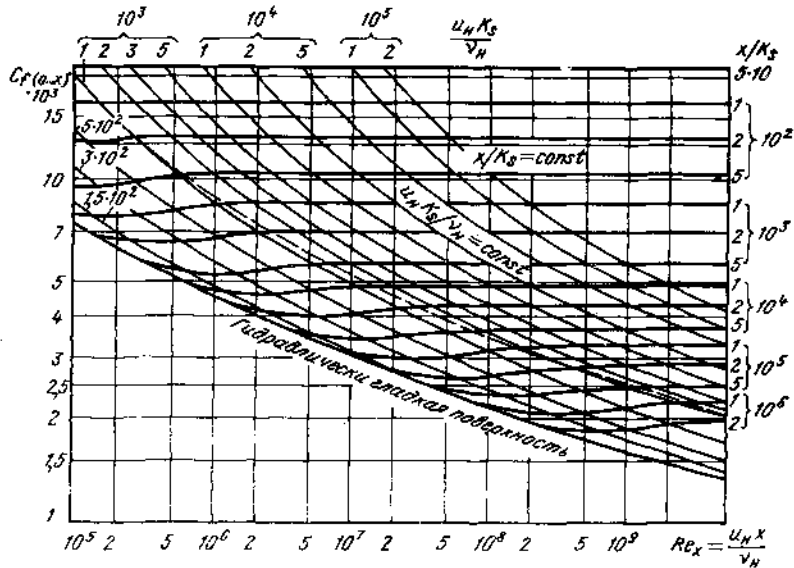


Рис. 15.7. Закон сопротивления пластины с песочной шероховатостью

Допустимая высота шероховатости еще не вызывает увеличения сопротивления стенки по сравнению с сопротивлением гладкой стенки при заданном режиме обтекания. Эта величина позволяет заранее установить степень чистоты обработки поверхности для уменьшения сопротивления. Допустимую высоту шероховатости  $K_S/x$  можно определить по рис. 15.7 по кривой  $x/K_S = \text{const}$ , которая отклоняется от кривой сопротивления гладкой пластины при заданном числе  $\text{Re}_x = u_H x / \nu$ .

Задача 15.8. При условиях задачи 15.7 определить силу трения, если после покраски шероховатость крыла стала  $K_S = 0,3$  мм. Определить допустимую величину шероховатости. Ответ:  $R_{x_1} = 150$  Н,  $K_{S \text{ доп}} = 0,06$  мм.

Критическая высота шероховатости вызывает в пограничном слое переход ламинарного течения в турбулентное. Шероховатость критической высоты изменяет величину сопротивления из-за перемещения точки перехода вверх против течения.

В соответствии с экспериментальными данными критическая высота шероховатости определяется формулой

$$v_* K_{S \text{ кр}} / \nu = 15, \quad (15.57)$$

где

$$v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}.$$

**Задача 15.9.** При условиях задачи 15.7 вычислить критическую высоту шероховатости. Ответ:  $K_{S \text{ кр}} \approx 0,43$  мм при  $Re_x = 10^6$ .

Критическая высота шероховатости, вызывающая переход ламинарного течения в турбулентное, в 10... 15 раз больше допустимой высоты шероховатости для турбулентного пограничного слоя.

## 15.5. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ НА ПЛОСКОЙ СТЕНКЕ

Рассмотрим течение газа с большим числом  $M_H$  около плоской адиабатной стенки. Условием такой стенки является отсутствие теплообмена с газом, т. е. при  $y=0$   $q_w=0$  и  $(\partial T / \partial y)_w = 0^*$ . В этом случае у стенки возникает тепловой пограничный слой (см. рис. 15.1), на толщине которого температура газа увеличивается от  $T_H$  при  $y = \delta_T$  до эффективной температуры  $T_e = T_w$  на стенке

$$T_e = T_w = T_H + r \frac{u_H^2}{2C_p} = T_H \left( 1 + r \frac{\kappa - 1}{2} M_H^2 \right), \quad (15.58)$$

где  $r = \frac{T_e - T_H}{u_H^2 / 2C_p} = \frac{T_e - T_H}{T_H^* - T_H}$  — коэффициент восстановления температуры — отношение тепла нагрева газа на поверхности адиабатной стенки к кинетической энергии невозмущенного течения.

Для ламинарного пограничного слоя на теле произвольной формы

$$r_x = 1 + \frac{u_{Hx}^2}{u_H^2} (\sqrt{Pr} - 1). \quad (15.59)$$

Для турбулентного пограничного слоя

$$r_x = 1 + \frac{u_{Hx}^2}{u_H^2} (\sqrt[3]{Pr} - 1), \quad (15.60)$$

где  $u_{Hx}$  — скорость на внешней границе пограничного слоя в сечении  $x$ .

В передних критических точках  $u_{Hx \text{ кр}} = 0$ ;  $r_{\text{кр}} = 1$  и  $T_e = T_{\text{кр}} = T_H^*$ , т. е. критическая точка термически всегда наиболее нагружена.

Для плоской стенки  $u_{Hx} = u_H$  и для воздуха  $Pr = 0,72$  и

$$r_x = \sqrt{Pr} = 0,85; \quad r_x = \sqrt[3]{Pr} \approx 0,9, \quad (15.61)$$

т. е. 15 и 10% тепла трения отводится от газа, заторможенного у

\* Течения с теплообменом между газом и телами рассматриваются в курсе теплопередачи.

стенки во внешний, по отношению к динамическому пограничному слою, поток. В этом случае  $\delta_T > \delta$ , а  $T_e = T_w < T_n^*$  (рис. 15.8, а).

Изменение температуры торможения поперек пограничного слоя не противоречит общей энергетической изолированности течения: полная энергия одних слоев газа в пределах теплового пограничного слоя увеличивается на столько же, на сколько уменьшается энергия других за счет теплопередачи. При  $Pr=1$ ,  $r_{\perp} = r_T = 1$ ,  $T_e = T_n^*$  и  $\delta_T = \delta$  (рис. 15.8, б).

Как мы видим, все характеристики ламинарного и турбулентно-го пограничных слоев определяются числом Рейнольдса. При тече-

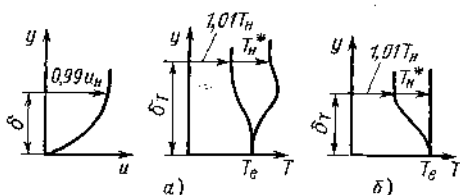


Рис. 15.8. Поля скоростей и температур при  $Pr < 1$  и  $Pr = 1$ :

а— $Pr < 1$ ;  $T_e < T_n^*$ ; б— $Pr = 1$ ;  $T_e = T_n^*$

нии несжимаемого газа (будем считать  $M_{II} = 0$ ) повышение температуры в пограничном слое ничтожно и поэтому вязкость и плотность газа в пограничном слое и в невозмущенном потоке одинаковы. Поэтому число Рейнольдса  $Re_n = \rho_n u_n x / \mu_n$ , подсчитанное по параметрам невозмущенного потока, характеризует течение в пограничном слое. При больших числах  $M_n$  температура газа в пограничном слое существенно повышается, например, при  $M_n = 6$   $\Delta T = T_e - T_n \approx 2000$  К, что приводит к существенному увеличению вязкости и к уменьшению плотности газа в пограничном слое по сравнению с таковыми в невозмущенном потоке. В этом случае  $\mu_n$  и  $\rho_n$  и  $Re_n$  не определяют течение в пограничном слое.

Определяющая температура. Исследования показали, что характеристики как ламинарного, так и турбулентного пограничного слоя, в сжимаемом газе можно рассчитывать по формулам (15.39), (15.45), (15.50) и (15.53), полученным для несжимаемой жидкости, если в них  $\rho_n$  и  $\mu_n$  заменить на  $\rho_{опр}$ ,  $\mu_{опр}$ , найденными при определяющей для пограничного слоя температуре  $T_{опр}$  ( $T_n < T_{опр} < T_w$ ). Определяющая температура рассчитывается по эмпирической формуле [30]

$$T_{опр} = T_n + 0,5(T_w - T_{nx}) + 0,22(T_e - T_{nx}), \quad (15.62)$$

где  $T_{nx}$  — температура в сечении  $x$  при  $y = \delta_T$ .

Для адиабатной стенки  $T_w = T_e$ ,  $T_{nx} = T_n$  при  $Pr = 1$ ,  $r = 1$ , получим

$$T_{опр} = 0,28T_n + 0,72T_e; \quad \frac{T_{опр}}{T_n} = 1 + 0,72 \frac{k-1}{2} M_n^2. \quad (15.63)$$

Подставляя в формулы (15.39), (15.45), (15.50) и (15.53) значения  $\rho_n = \rho_{опр}(T_{опр}/T_n)$ ,  $\mu_n = \mu_{опр}(T_n/T_{опр})^n$ , где для воздуха  $n = 0,76$  (см. п. 1.5), получим для ламинарного пограничного слоя

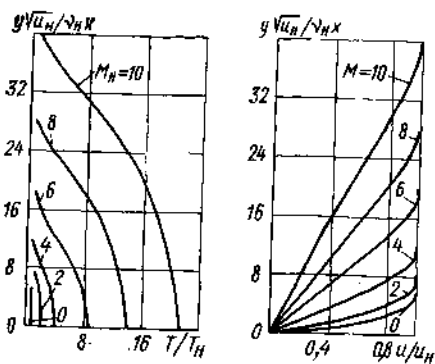


Рис. 15.9. Распределение температур и скоростей в ламинарном пограничном слое на адиабатной пластине.  $Pr=1$ ;  $k=1,4$ ;  $n=0,76$ ;  $y_0 \sqrt{u_{\infty}/\nu_{\infty} x} = 4,64 \frac{y}{\delta_{M=0}}$

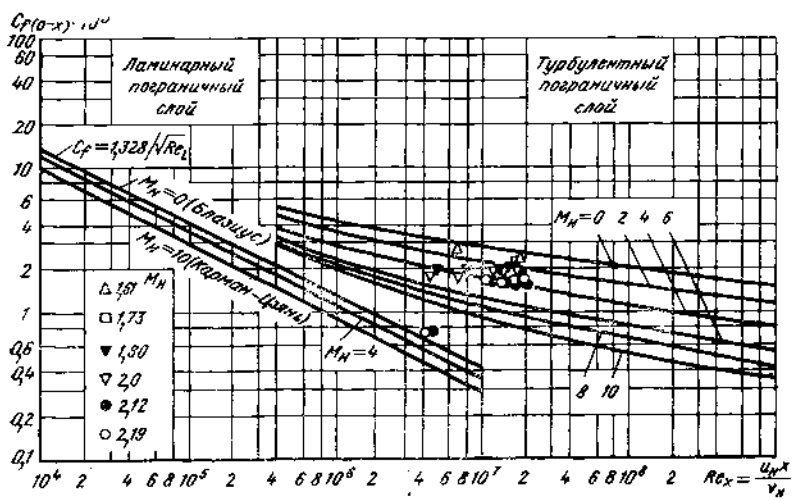


Рис. 15.10. Интегральный коэффициент сопротивления трения плоской пластины.  $Pr=1$ ,  $k=1,4$ ,  $n=0,76$

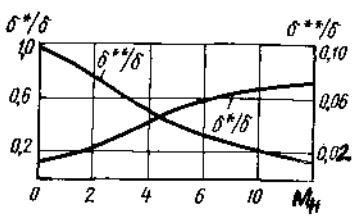


Рис. 15.11. Относительная толщина вытеснения и потери импульса для турбулентного пограничного слоя в зависимости от  $M_{\infty}$

$$\frac{\delta}{\delta_{M=0}} = \left( \frac{T_{\text{опр}}}{T_{\text{н}}} \right)^{\frac{n+1}{2}} = \left[ 1 + 0,72 \frac{\kappa-1}{2} M_{\text{н}}^2 \right]^{0,88}; \quad (15.64)$$

$$\frac{C_{f(0-x)}}{C_{f(0-x) M=0}} = \left( \frac{T_{\text{опр}}}{T_{\text{н}}} \right)^{\frac{n-4}{5}} = \left[ 1 + 0,72 \frac{\kappa-1}{2} M_{\text{н}}^2 \right]^{-0,12} \quad (15.65)$$

и для турбулентного пограничного слоя

$$\frac{\delta}{\delta_{M=0}} = \left( \frac{T_{\text{опр}}}{T_{\text{н}}} \right)^{\frac{n+1}{5}} = \left[ 1 + 0,72 \frac{\kappa-1}{2} M_{\text{н}}^2 \right]^{0,352}; \quad (15.66)$$

$$\frac{C_{f(0-x)}}{C_{f(0-x) M=0}} = \left( \frac{T_{\text{опр}}}{T_{\text{н}}} \right)^{\frac{n-4}{5}} = \left[ 1 + 0,72 \frac{\kappa-1}{2} M_{\text{н}}^2 \right]^{-0,65}, \quad (15.67)$$

где  $\delta$  и  $C_{f(0-x)}$  — толщина пограничного слоя и интегральный коэффициент сопротивления трения для сжимаемого газа и  $\delta_{M=0}$  и  $C_{f(0-x) M=0}$  — толщина пограничного слоя и интегральный коэффициент сопротивления трения для несжимаемого газа, т. е. рассчитанные по параметрам невозмущенного потока  $q_{\text{н}}$  и  $\mu_{\text{н}}$ .

При увеличении числа  $M_{\text{н}}$  увеличивается температура газа в пограничном слое (рис. 15.9), повышается вязкость и уменьшается плотность газа. Число Рейнольдса уменьшается и вместе с ним увеличивается толщина пограничного слоя и уменьшается наполненность поля скоростей, т. е.  $(du/du)_w$ . Последнее, несмотря на увеличение  $\mu$ , приводит к существенному уменьшению  $C_f$  (рис. 15.10).

Толщина вытеснения  $\delta^* = \delta - \int_0^{\delta} \frac{qu}{q_{\text{н}}\mu_{\text{н}}} du$  увеличивается, приближа-

ясь к толщине пограничного слоя, за счет уменьшения плотности газа (рис. 15.11). Толщина потери импульса уменьшается за счет уменьшения  $\tau_w$  (15.32).

Из сказанного следует, что толщину пограничного слоя можно увеличивать, подогревая газ и уменьшать, охлаждая его. Это свойство пограничного слоя используется для управления течением.

**Задача 15.10.** Самолет летит с  $M_{\text{н}}=3$  на высоте  $H=20$  км. Определить силу сопротивления трения, действующую на крыло, с учетом сжимаемости воздуха. Принять, что крыло — бесконечно тонкая пластина размахом 10 и шириной 3 м, обтекаемая без образования ударных волн и что турбулентный пограничный слой начинается от передней кромки крыла. Ответ:  $R_x=3440$  Н.

## 15.6. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ С ПРОДОЛЬНОМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ. ОТРЫВ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ. УПРАВЛЕНИЕ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Практически важные течения в соплах и диффузорах, около крыла самолета и лопаток турбомашин сопровождаются изменением давления. Как уже было установлено, градиент давления одинаков во внешнем течении и в пограничном слое. Понижение давления  $dp/dx < 0$  и особенно его повышение  $dp/dx > 0$  в направлении тече-

ния, приводит к сильной деформации профилей скорости, а следовательно, температуры и концентрации, в пограничном слое, что существенно влияет на сопротивление тел, теплообмен и диффузию. При градиентных течениях профили скорости в пограничном слое не являются подобными для различных сечений при одинаковом режиме течения, что существенно затрудняет теоретический анализ и расчет течений.

Деформация профилей скорости в пограничном слое при продольном градиенте давления. Пренебрегая трением запишем уравнение Бернулли для произволь-

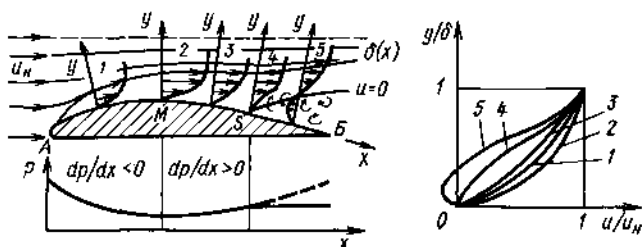


Рис. 15.12. Отрыв пограничного слоя

ных сечений  $x_1$  и  $x_2 > x_1$  для двух струек несжимаемой жидкости, текущих у наружной (н) и внутренней (в) границ пограничного слоя при одинаковом  $dp/dx \neq 0$  так, что  $u_n < u_v$  и  $(u_{n2} + u_{v1}) < (u_{n1} + u_{v2})$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{(u_{n2} + u_{v1})(u_{n2} - u_{v1})}{2}; \quad \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{(u_{n2} + u_{v1})(u_{n2} - u_{v1})}{2}.$$

Приравнявая правые части уравнений, получим

$$\frac{u_{n2} - u_{v1}}{u_{n2} - u_{v1}} = \frac{u_{n2} + u_{v1}}{u_{n2} + u_{v1}} > 1. \quad (15.68)$$

Формула (15.68) показывает, что при  $dp/dx \neq 0$  деформация неравномерных полей скорости происходит всегда так, что скорость медленно движущихся слоев изменяется в большей степени, чем скорость быстродвижущихся.

Поэтому в конфузорных течениях ( $dp/dx < 0$ ), например, около передней части профиля, наполненность полей скорости в пограничном слое возрастает и отрыв пограничного слоя невозможен (профили 1 и 2 на рис. 15.12) и его толщина  $\delta(x)$  увеличивается в меньшей степени, чем на плоской стенке.

Отрыв пограничного слоя. В диффузорном течении вдоль поверхности М—Б наполненность полей скорости уменьшается (профили 2, 3, 4) и толщина  $\delta(x)$  пограничного слоя увеличивается в большей степени, чем на плоской стенке.

В диффузорном течении жидкость движется из области меньшего давления в область большего, расходуя запас кинетической

энергии. В некотором сечении  $S$  запас кинетической энергии конечного пристеночного слоя оказывается израсходованным на совершение работы проталкивания и трения и он останавливается (профиль 4). Тогда встречный поток жидкости устремляется из области  $B$  повышенного давления к сечению  $S$  (профиль 5), где этот встречный поток оттесняет основной от стенки. Происходит отрыв пограничного слоя. Отрыв пограничного слоя всегда связан с образованием вихрей в результате взаимодействия прямого и обратного течений. Эти вихри проникают во внешний поток, усиливают диссипацию кинетической энергии жидкости и уменьшают полное и статическое давления, по сравнению с теми, которые имели бы место при безотрывном течении.

Понижение статического давления объясняется тем, что отрывная зона, расположенная в кормовой части профиля, отклоняет линии тока внешнего потока так, что жидкость течет в каналах почти постоянного сечения. При безотрывном течении около этого же профиля жидкость текла бы в расширяющихся каналах (см. рис. 15.12).

Отрыв пограничного слоя оказывает существенное влияние на развитие диффузорных течений. Например, в известных условиях, отрыв может вызвать неустойчивую работу компрессора (помпаж) вплоть до выхода двигателя из строя.

Условием отрыва пограничного слоя в сечении  $S$  является специфический остроконечный профиль 4 (см. рис. 15.12), для которого на стенке не только  $u_w = 0$ , но и  $(\partial u / \partial y)_w = 0$ , т. е. равно нулю местное напряжение трения  $\tau_w = \mu (\partial u / \partial y)_w = 0$ , или безразмерный критерий подобия  $\tau_w / (\rho_n u_n^2) = 0$ . Использовать  $\tau_w / \rho_n u_n^2$  как определяемый критерий отрыва неудобно, так как расчет и измерение  $\tau_w(x)$  в диффузорных течениях затруднены. Поэтому заменим этот критерий.

Как было показано, деформация полей скоростей и отрыв пограничного слоя определяются градиентом давления  $dp/dx > 0$ , а также характерным размером пограничного слоя; например, толщиной вытеснения  $\delta^*$  или толщиной потери импульса  $\delta^{**}$ , определяющими наполненность поля скоростей. Составим из этих двух параметров определяемый критерий подобия  $(dp/dx) \cdot (\delta^{**} / \rho_n u_n^2)$ , который в соответствии с теорией подобия, для заданного газа ( $Pr = \text{const}$  и  $k = \text{const}$ ), может зависеть только от чисел  $Re$  и  $M_n$ .

Таким образом, обобщенное критериальное уравнение отрыва будет

$$(dp/dx) \cdot (\delta^{**} / \rho_n u_n^2) = f(Re, M_n).$$

Опыты показывают, что отрыв турбулентного пограничного слоя при течении несжимаемой жидкости не зависит ни от  $Re$ , ни от  $M_n$  и происходит при условии

$$\frac{dp}{dx} \frac{\delta^*}{\rho_n u_n^2} \geq 0,015; \quad \frac{dp}{dx} \frac{\delta^{**}}{\rho_n u_n^2} \geq 0,005. \quad (15.69)$$



Для ламинарного пограничного слоя, учитывая большое влияние вязкости на течение, определяемый критерий подобия составляется иначе и имеет следующие значения при отрыве

$$\frac{dp}{dx} \frac{(\delta^*)^2}{\mu_n u_n} \geq 1,92; \quad \frac{dp}{dx} \frac{(\delta^{**})^2}{\mu_n u_n} \geq 0,157. \quad (15.70)$$

При течении сжимаемого газа величина критерия отрыва зависит от числа  $M_n$ . Например, для турбулентного пограничного слоя при  $M_n = 4$  отрыв происходит при  $\frac{dp}{dx} \frac{\delta^*}{\rho_n u_n^2} \geq 0,008$ .

Используется ряд других критериев отрыва пограничного слоя. Например, установлено, что турбулентный пограничный слой отрывается при значениях формпараметра  $H = \delta^*/\delta^{**} > (1,8 \dots 2,4)$ , тогда как для турбулентного поля скорости на плоской стенке  $H = 1,29$ .

Итак, отрыв пограничного слоя возможен только при  $dp/dx > 0$ .

Отрыв в несжимаемой жидкости при заданном режиме течения не зависит ни от  $Re$ , ни от  $M_n$  и наступает тем раньше, чем больше  $dp/dx > 0$  и  $\delta^{**}$ . Эксперименты показывают, что турбулентный пограничный слой значительно устойчивее ламинарного, т. е. отрывается при больших значениях  $dp/dx > 0$  и  $\delta^{**}$ . Это объясняется большей наполненностью поля скорости в турбулентном пограничном слое, т. е. большей кинетической энергией пристеночных слоев (см. рис. 8.2).

Расчет пограничного слоя при  $dp/dx \neq 0$  является весьма сложным.

Расчет ламинарного пограничного слоя основывается на численном интегрировании дифференциальных уравнений с использованием ЭВМ. Турбулентный пограничный слой рассчитывается с помощью полуэмпирических соотношений, основанных на интегральном уравнении количества движения.

Взаимодействие пограничного слоя со скачками уплотнения. Пограничный слой при сверхзвуковых течениях имеет две качественно отличные области — дозвуковую, толщиной  $\Delta$ , с изменением скорости от  $u_w = 0$  до  $u = a$  и сверхзвуковую, переходящую во внешний поток (см. рис. 15.13). Толщина звуковой области в турбулентном пограничном слое существенно меньше, чем в ламинарном —  $\Delta_T \ll \Delta_L$ . Это необходимо учитывать при изучении взаимодействия ламинарного и турбулентного пограничных слоев со скачками уплотнения.

В случае течения идеальной жидкости косой скачок отражается от стенки в виде косога скачка (см. рис. 2.10).

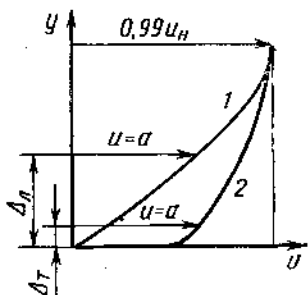


Рис. 15.13. Профили скоростей в ламинарном и турбулентном пограничных слоях в сверхзвуковом течении:

1—ламинарный пограничный слой; 2—то же турбулентный

Когда взаимодействие скачка с пограничным слоем сопровождается отрывом последнего от стенки, картина изменяется коренным образом.

Ламинарный пограничный слой (рис. 15.14). Падающий извне скачок  $АВВ$  попадает в сверхзвуковую область ламинарного пограничного слоя, в которой скорость изменяется от

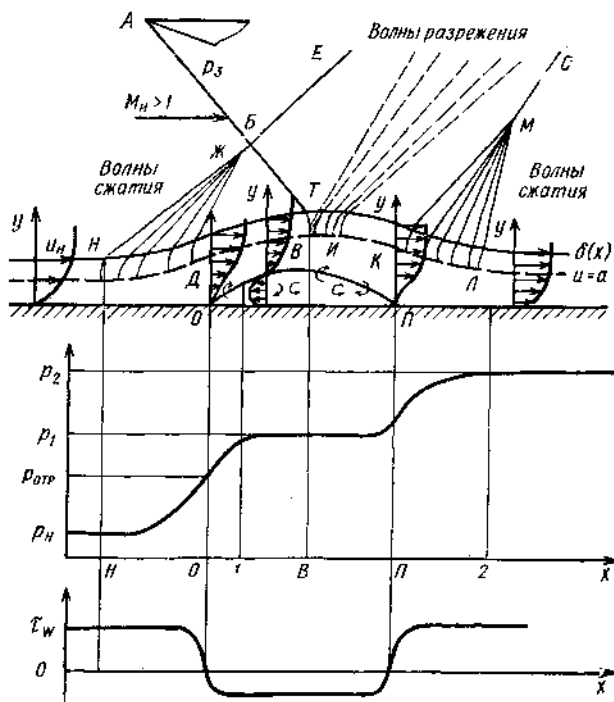


Рис. 15.14. Схема взаимодействия косо скачка с ламинарным пограничным слоем

$u_n > a$  до  $u = a$ . Поэтому скачок изгибается, оканчивается на линии  $u = a$  и давление газа в различных слоях за ним оказывается различным. За скачком в пограничном слое возникает поперечный градиент давления  $dp/dy > 0$ . Повышенное давление, установившееся за скачком, передается по дозвуковой области пограничного слоя против течения. В результате перед скачком в пограничном слое возникает большой продольный градиент давления  $dp/dx > 0$ , вызывающий интенсивное увеличение толщины пограничного слоя, уменьшение скорости и искривление линий тока, образующих вогнутую поверхность  $ND$ .

При обтекании поверхности  $ND$  сверхзвуковым потоком возникают слабые волны сжатия, образующие косо скачок уплотнения  $ЖБЕ$ , который можно рассматривать как первый отраженный скачок. Давление в области  $T$  больше, чем в области  $I$ , так как поток

перед  $T$  пересекает более сильный скачок. Такой перепад давления направляет поток к стенке и оторвавшийся пограничный слой может снова к ней присоединиться. Выпуклая поверхность  $ВИ$  генерирует слабые волны разрежения и сверхзвуковой поток, после скачка, ускоряется в течении Прандтля—Майера и поворачивает к стенке. Стенка направляет поток вдоль своей поверхности так, что линии тока создают вогнутый контур  $КЛ$ , на котором возникают слабые волны сжатия, образующие второй отраженный косой скачок  $МС$ . В зависимости от условий пограничный слой за этим скачком может турбулизироваться или остаться ламинарным.

Итак, при взаимодействии с пограничным слоем, скачок уплотнения отражается в виде двух скачков с промежуточным ускорением в волне разрежения. Поэтому суммарные потери полного давления на скачке  $МС$  больше, чем потери при регулярном отражении скачка от стенки.

Давление на стенке начинает повышаться в точке  $H$  еще до точки отрыва  $\theta$  и принимает следующие значения:  $p_{отр}$  в точке  $\theta$  отрыва пограничного слоя,  $p_1$  в отрывной зоне между точками  $I$  и  $B$ ,  $p_n$  в точке присоединения пограничного слоя к стенке и, наконец, достигает максимального давления  $p_2$ , которое равно давлению за вторым отраженным скачком  $МС$ .

В качестве параметров, характеризующих отрыв пограничного слоя при взаимодействии его со скачками, используют два безразмерных давления:

1)  $p_1/p_n$  — отношение давления в зоне отрыва к давлению в невозмущенном потоке. Это отношение называется критическим. Приближенно принимают, что критическое отношение давлений равно повышению давления на первом отраженном косом скачке, возникающем из-за утолщения пограничного слоя вблизи точки отрыва;

2)  $p_{отр}/p_n$  — отношение давления в точке отрыва к  $p_n$ .

Взаимодействие пограничного слоя со скачками, особенно, если оно сопровождается отрывом, является очень сильным. Из-за того, что в пограничном слое велико значение  $du/du$ , падающий скачок искривляется и его интенсивность изменяется вдоль фронта. Это приводит к появлению большого градиента давления  $dp/du$ , вызывающего, в свою очередь, появление большого градиента  $dp/dx$  и  $du/dx$ . Увеличение толщины пограничного слоя приводит к образованию волн сжатия и расширения, существенно изменяющих внешнее течение на большом расстоянии от стенки. Вследствие того, что в этом течении не выполняются основные допущения ни теории пограничного слоя ( $dp/du=0$ ,  $du/dx \ll du/du$ ), ни ударных волн (отсутствие градиента вдоль фронта скачка), теоретические исследования крайне затруднены.

Если взаимодействие ламинарного пограничного слоя сопровождается отрывом, то основное свойство этого течения состоит в том, что параметры потока вблизи точки отрыва, в том числе величина  $p_1/p_n$  и  $p_{отр}/p_n$  зависят только от  $M_n$  и  $Re_x$  и не зависят ни от формы поверхности твердого тела, ни от интенсивности и причины появления основного скачка (падающий извне скачок, скачки, возникаю-

щие при обтекании внутренних тупых или прямых углов при течи-нии в каналах и т. д.).

В соответствии с приближенными теориями, удовлетворительно подтверждающимися в экспериментах, при  $M_H > 1,2$  безразмерные давления зависят только от  $M_H$  и  $Re_x$

$$\frac{p_1}{p_H} = 1 + 0,94 \frac{\kappa M_H^2}{[(M_H^2 - 1) Re_x]^{1/4}}; \quad (15.71)$$

$$\frac{p_{отр}}{p_H} = 1 + 0,57 \frac{\kappa M_H^2}{[(M_H^2 - 1) Re_x]^{1/4}}. \quad (15.72)$$

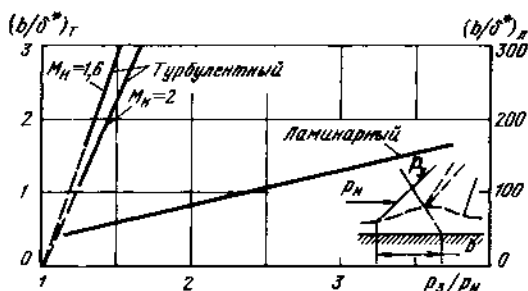


Рис. 15.15. Величина отхода первого отраженного косога скачка в зависимости от интенсивности падающего скачка

Как видим, отрыв ламинарного пограничного слоя затрудняется при уменьшении  $Re_x$  и увеличении  $M_H$ . Первое соответствует увеличению вязкости газа, второе — увеличению количества движения газа в пограничном слое.

В соответствии с экспериментальными данными, расстояние  $b$ , на которое отходит первый отраженный скачок от падающего (рис. 15.15), пропорционально толщине вытеснения  $\delta^*$  невозмущенного пограничного слоя перед точкой отрыва и повышению давления  $p_3/p_H$  на падающем скачке (рис. 15.15).

**Турбулентный пограничный слой.** При невязком сверхзвуковом обтекании внутреннего тупого угла возникает присоединенный скачок уплотнения (см. рис. 12.5, б). При реальном течении, вследствие взаимодействия с пограничным слоем, скачок изменяет свою интенсивность и расположение, смещаясь вверх по потоку (рис. 15.16). Это необходимо учитывать при проектировании сверхзвуковых входных устройств ВРД.

Рассмотрим взаимодействие турбулентного пограничного слоя со скачком уплотнения при обтекании внутреннего тупого угла, сопровождающегося отрывом (см. рис. 15.16).

Давление на стенке в зоне взаимодействия увеличивается непрерывно от  $p_H$  до  $p_2$ , равного давлению во внешнем потоке за скач-

ком уплотнения. Критическому давлению  $p_1$ , равному давлению за первым скачком, соответствует лишь точка перегиба, а не площадка, как это имеет место при ламинарном пограничном слое (см. рис. 15.14) \*.

Критические отношения давлений  $p_1/p_{II}$  и  $p_{отр}/p_{II}$  не зависят от интенсивности и причины возникновения основного скачка уплотнения и от числа  $Re$ , которое слабо влияет на характеристики пограничного слоя, а определяются величиной  $M_H$  [1]:

$$\frac{p_1}{p_{II}} = 1 + 0,2 \frac{\kappa M_H^2}{(M_H^2 - 1)^{1/4}}; \quad \frac{p_{отр}}{p_{II}} = 1 + 0,15 \frac{\kappa M_H^2}{(M_H^2 - 1)^{1/4}}. \quad (15.73)$$

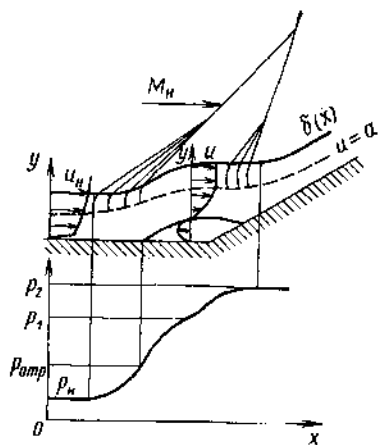


Рис. 15.16. Схема взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем

Сопоставление значений критических отношений давления и величин  $b$  отхода первого косого скачка от падения основного для ламинарного и турбулентного пограничных

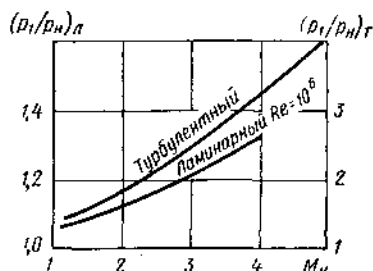


Рис. 15.17. Критическое отношение давлений для ламинарного и турбулентного пограничных слоев в зависимости от  $M_H$

слоев (рис. 15.17) и (15.15) показывает, что турбулентный пограничный слой отрывается при существенно большем критическом отношении давлений, т. е. при взаимодействии с более сильными скачками уплотнения, а отход  $b$  первого скачка при турбулентном пограничном слое в десять раз меньше, чем при ламинарном. Это объясняется тем, что вследствие большей наполненности поля скорости турбулентного пограничного слоя, затруднена передача давления против течения по тонкому дозвуковому слою (см. рис. 15.13) и пристеночные слои, обладающие большей кинетической энергией, выдерживают без отрыва больший градиент давления  $dp/dx > 0$ .

Протяженность зоны отрыва тем больше, чем больше отход  $b$  первого скачка, т. е., чем больше интенсивность основного скачка.

Отрыв турбулентного пограничного слоя не может возникнуть

\* При больших углах  $\omega$  на кривой распределения давления может получиться и площадка.

при  $M_n < 1,3$ , так как при этом критическое отношение давлений больше, чем повышение давления на прямом скачке уплотнения. Если интенсивность скачка уплотнения недостаточна для отрыва турбулентного пограничного слоя, то происходит лишь умеренное его утолщение и отражение скачка становится близким к регулярному (см. рис. 12.10).

Для того, чтобы определить произойдет ли отрыв пограничного слоя при заданных условиях и получить представление о протяжен-

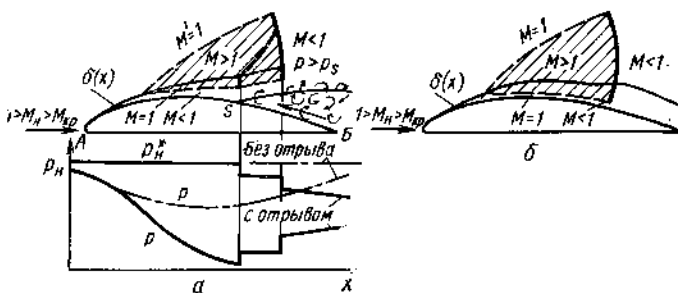


Рис. 15.18. Взаимодействие пограничных слоев со скачками уплотнения в местных сверхзвуковых областях:

*a* — ламинарный слой; *b* — то же турбулентный

ности зоны отрыва, необходимо: 1) определить перепад давлений на основном скачке  $p_3/p_n$ ; 2) определить режим течения в пограничном слое и толщину вытеснения  $\delta^*$  перед основным скачком без учета взаимодействия; 3) рассчитать критический перепад давления  $p_1/p_n$  по (15.71), если пограничный слой ламинарный, или по (15.73), если турбулентный; если  $p_1/p_n > p_3/p_n$  — отрыва нет, если  $p_1/p_n < p_3/p_n$  — отрыв есть. Величина  $b$  отхода первого скачка уплотнения определяется на основании экспериментальных данных рис. 15.15.

**Задача 15.11.** Определить, при каком угле  $\alpha_n$  фронта падающего на пластину косога скачка произойдет отрыв пограничного слоя, если координата падения скачка  $x=2$  м,  $Re_{x\text{кр}}=10^6$ ,  $\mu_n=1,42 \cdot 10^{-5}$  Н·с/м<sup>2</sup>,  $\rho_n=0,122$  кг/м<sup>3</sup>;  $M_n=3$ ,  $T_n=217$  К,  $R=287$  Дж/(кг·К). Ответ  $\alpha_n \geq 30^\circ$ .

Взаимодействие пограничного слоя со скачками уплотнения в местных сверхзвуковых областях течения. Критическим называется такое число  $M_{\text{нкр}} < 1$ , при котором в какой либо области течения около крылового профиля, скорость потока достигает местной скорости звука за счет ускорения дозвукового потока в передней конфузурной области течения. Если число  $1 > M_n > M_{\text{нкр}}$ , то вблизи поверхности профиля возникает область сверхзвуковых скоростей (рис. 15.18, *a*). В области *AB* дозвуковой поток ускоряется в сужающихся струйках до  $M_n=1$ , а в области *BB* сверхзвуковой поток перерасширяется. Так как поток перед профилем дозвуковой, то он и с профиля сходит дозвуковым. Торможение сверхзвукового потока происходит на скачке уплотнения, который начинается на линии  $M=1$  и кончает-

ся на линии  $M' = 1$  и взаимодействует с пограничным слоем. Ламинарный пограничный слой имеет дозвуковую зону достаточной толщины. Давление в этой зоне передается против потока и существенно отклоняет наружу линии тока. Сверхзвуковой поток на вогнутой поверхности образует слабые волны сжатия, складывающиеся в криволинейный наклонный скачок, который соединяется с более мощным замыкающим скачком, образуя так называемый  $\lambda$  — образный скачок. В зависимости от числа  $M_H$  и распределения давления, ламинарный пограничный слой может турбулизоваться или остаться ламинарным, присоединиться к поверхности или образовать полностью развитой не присоединяющийся к стенке отрыв, который обычно устанавливается, если за скачком имеет место  $dp/dx > 0$ . Может также образоваться система нескольких  $\lambda$ -образных скачков с промежуточным течением Прандтля — Майера.

При турбулентном пограничном слое передача давления вверх по потоку затруднена, утолщение пограничного

слоя не велико и поэтому возникает лишь один замыкающий скачок, близкий к прямому (рис. 15.18, б).

Взаимодействие скачков уплотнения с пограничным слоем на профиле приводит к уменьшению давления на кормовую часть профиля и вызывает резкое увеличение силы лобового сопротивления. Это сопротивление давления называется *волновым сопротивлением*.

Методы управления пограничным слоем для уменьшения или увеличения сопротивления тел и тепло-, массообмена между телами и потоками указывает теория пограничного слоя (рис. 15.19).

Искусственная ламинаризация пограничного слоя заключается в увеличении абсциссы  $x_{кр}$  точки перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный для уменьшения трения и тепло-, массообмена между поверхностью тела и потоком жидкости. Она заключается в уменьшении толщины пограничного слоя  $\delta$ , интенсивности турбулентности набегающего потока, градиента давления  $dp/dx > 0$  и высоты гребешков шероховатости.

Наиболее эффективными методами уменьшения толщины ламинарного пограничного слоя является охлаждение обтекаемой стенки (поверхности крыла топливом), удаление с поверхности тела наиболее заторможенных слоев пограничного слоя отсосом или сдувом пограничного слоя перед ожидаемой точкой перехода его в турбулентный, а также уменьшением  $dp/dx > 0$  за счет применения

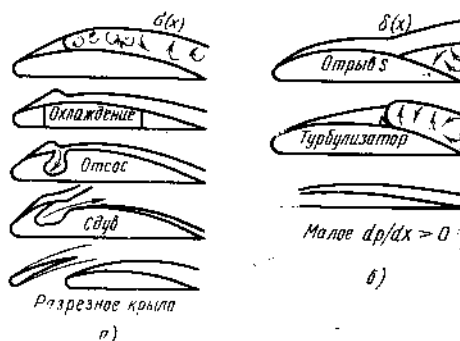


Рис. 15.19. Управление пограничным слоем:

а—ламинаризация; б—устранение отрыва

ламинаризованных профилей, в которых диффузорная часть отнесена к корме.

Часто систему отсоса и сдува пограничного слоя упрощают, используя разрезные крылья и лопатки турбомашин, в которых для сдува используется кинетическая энергия набегающего потока (см. рис. 15.19, а).

Если требуется увеличить трение, теплообмен и диффузию, то следует турбулизовать пограничный слой.

Отрыв пограничного слоя можно предотвратить, уменьшая  $dp/dx > 0$  и толщину пограничного слоя любым из разобранных выше способов, а также искусственно турбулизуя ламинарный пограничный слой перед точкой отрыва, например с помощью установки турбулизирующего ребра (см. рис. 15.19, б).

## 15.7. РЕАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СУЖАЮЩИХ СОПЛАХ И СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

Примем реальные течения в соплах энергетически изолированными —  $q = 0$ ,  $l_{\text{тех}} = 0$ ,  $T^* = \text{const}$ ,  $a_{\text{кр}} = \text{const}$ .

Два фактора отличают эти течения от одномерных изоэнтропных, рассмотренных в п. 13.3: отклонение от одномерности, т. е. неравномерность полей скоростей и других параметров в поперечных сечениях сопел и гидравлические потери. Для сужающихся сопел это потери на трение, приводящие к увеличению энтропии  $s_c > s_1$  ( $ds = \frac{dq_{\text{ср}}}{T} > 0$ ) и снижению давления торможения  $p_c^* < p^*$ , а при докритическом располагаемом отношении давлений  $p_n/p^* > \pi(1)$  и к снижению скорости истечения  $W_c < W_{c,u}$  (рис. 15.20).

«Возвращенное тепло». Уменьшение кинетической энергии  $\frac{W_{c,u}^2 - W_c^2}{2} = i_c - i_{c,u}$  при  $p_n/p^* \geq \pi(1)$ , обусловленное гидравлическими потерями и равное в  $Ts$  — координатах площади  $S_u - S - s_c - s_1$  под участком  $S_u - S$  изобары  $p_n$ , меньше суммарной работы трения, т. е. площади  $1^* - S - s_c - s_1$  на величину так называемого «возвращенного тепла», равного площади  $1^* - S - S_u$ . Эта часть работы вязкостных напряжений превращается в кинетическую энергию направленного движения газа (см. пп. 4.12 и 4.13).

Теоретический расчет гидравлических потерь в сопле весьма трудоемок (расчет пограничного слоя при градиентном течении). Поэтому на практике потери в соплах оцениваются суммарно с помощью следующих эмпирических коэффициентов.

1. Скоростной коэффициент  $\varphi_c$  — отношение действительной среднерасходной скорости истечения  $W_c = \lambda_c a_{\text{кр}}$  к скорости изоэнтропного истечения  $W_{c,u} = \lambda_{c,u} a_{\text{кр}}$  при том же располагаемом отношении давлений  $p_n/p^*$  (см. рис. 15.20).

$$\varphi_c = W_c / W_{c,u} = \lambda_c / \lambda_{c,u}. \quad (15.74)$$



2. Коэффициент сохранения полного давления сопла  $\sigma_c$  — отношение полного давления  $p_c^*$  на срезе сопла к полному давлению  $p^*$  перед соплом. Связь  $\sigma_c = f(\varphi_c)$  для случая дозвукового истечения установим, используя соотношение  $p_H/p_c^* = p_H/p^* \sigma_c = \pi(\lambda_c)$

$$\sigma_c = \frac{p_c^*}{p^*} = \frac{p_H}{p_H} \frac{p_c^*}{p^*} = \frac{\pi(\lambda_{cu})}{\pi(\lambda_c)} = \frac{\pi(\lambda_{cu})}{\pi(\lambda_c \varphi_c)} = \frac{\pi(\lambda_c / \varphi_c)}{\pi(\lambda_c)}. \quad (15.75)$$

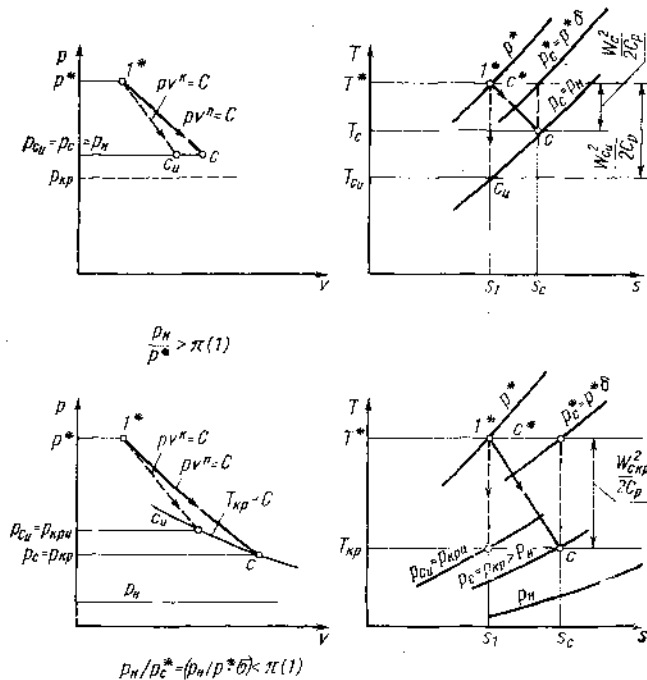


Рис. 15.20. Сопоставление идеального и реального процессов истечения из сужающегося сопла

3. Коэффициент расхода  $\varphi_c$  — отношение действительного расхода газа  $G_c = \rho_c W_c S_c$  к расходу при изоэнтропном истечении  $G_{c u} = \rho_{c u} W_{c u} S_c$ . Учитывая (11.44) получим

$$\varphi_c = G_c / G_{c u} = (\rho_c / \rho_{c u}) \varphi_c = \sigma_c q(\lambda_c) / q(\lambda_{c u}) = \sigma_c q(\lambda_{c u} \varphi_c) / q(\lambda_{c u}). \quad (15.76)$$

Действительный расход газа через сопло получим из (15.76) и (11.44)

$$G_c = \varphi_c G_{c u} = \varphi_c m p^* q(\lambda_{c u}) S_c / \sqrt{T^*}. \quad (15.77)$$

Значения скоростных коэффициентов для различных сужающихся сопел лежат в узких пределах  $\varphi_c = 0,92 \dots 0,99$ . Меньшие значения относятся к простым отверстиям и коническим соплам. Плавно сужающиеся сопла, профилированные по формуле Витошинского [12], имеют  $\varphi_c = 0,98 \dots 0,99$ . Такие сопла применяются для аэро-

динамических труб дозвуковых скоростей и обеспечивают практически равномерное поле скорости на выходе вплоть до  $\lambda_c = 0,95$ . Скоростной коэффициент данного сопла при изменении скорости истечения изменяется слабо и в расчетах может приниматься постоянным.

Коэффициент сохранения полного давления сопел при постоянном  $\varphi_c$  существенно зависит от  $\lambda_{c,u}$  (15.75): при  $\varphi_c = 0,98$  и  $\lambda_{c,u} = 0,5$   $\sigma_c = 0,99$ , а при  $\lambda_{c,u} = 1$   $\sigma_c = 0,975$ .

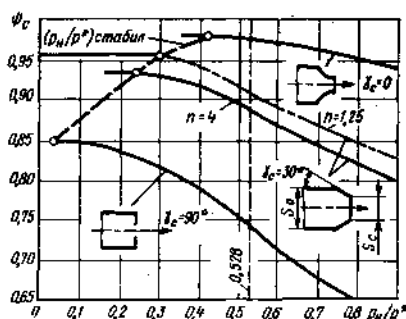


Рис. 15.21. Коэффициенты расхода сужающихся сопел в зависимости от располагаемого отношения давлений  $p_H/p^*$ , угла конусности  $\gamma_c$  и степени поджатия  $n = S_0/S_c$  при  $k = 1,4$

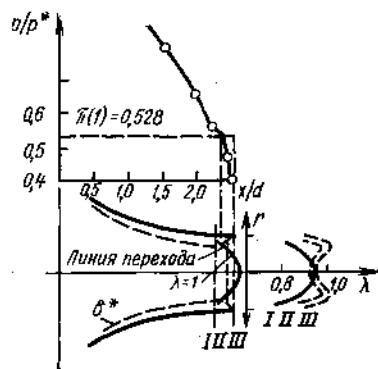


Рис. 15.22. Распределение давления вдоль стенки сопла, линия переходов  $\lambda = 1$ , поля скоростей в сечениях I, II, III при втором критическом отношении давлений  $(p_H/p^*)_{стаб}$

Величина коэффициента расхода сужающихся сопел зависит от формы сопла в области выходного сечения, угла конусности  $\gamma_c$ , степени поджатия  $n = S_0/S_c$ , располагаемого отношения давлений  $p_H/p^*$  и числа Рейнольдса (рис. 15.21). Коэффициенты расхода всех сужающихся сопел увеличиваются с уменьшением  $p_H/p^*$ , что обусловлено перестройкой полей скорости в выходных сечениях сопел и, в меньшей степени, увеличением числа Рейнольдса, т. е. уменьшением толщины пограничного слоя. Опыт показывает, что чем меньше  $p_H/p^* > \pi(1)$ , тем равномернее поле скорости и выше значение  $\varphi_c$ .

Профилированное сопло  $\gamma_c = 0$  обеспечивает максимальную равномерность поля скорости и, соответственно, максимальное значение  $\varphi_c$  и минимальное его повышение с уменьшением  $p_H/p^*$ .

Второе критическое отношение давлений. Характерно, что для всех сужающихся сопел коэффициенты расхода и расходы газа принимают постоянное максимальное значение не при критическом отношении давлений  $p_H/p^* = \pi(1) = 0,528$ , как это имеет место при идеальном истечении, а при меньшем, так называемом втором критическом отношении давлений или отношении давлений стабилизации расхода  $(p_H/p^*)_{стаб} < \pi(1)$ , тем меньшим, чем менее

равномерно поле скорости на выходе из сопла. Только при втором критическом отношении давлений реальное сопло «запирается».

Истечение из профилированного сопла при сверхкритических отношениях давлений сопровождается перестройкой полей скорости в области выходного сечения, обусловленной деформацией пограничного слоя. При докритических отношениях давлений толщина пограничного слоя и толщина вытеснения достигают максимальной величины в выходном сечении. При сверхкритическом отношении давлений  $p_n/p^* < \pi(1)$  волны пониженного давления  $p_n < p_{кр}$  из окружающей среды проникают внутрь сопла по дозвуковой области течения пограничного слоя и устанавливают в этой области тем большие отрицательные градиенты давления  $dp/dx < 0$ , чем меньше  $p_n/p^* < \pi(1)$ . Под действием этого отрицательного градиента давления на выходном участке сопла происходит ламинаризация (утонышение) и «сброс» пограничного слоя и линии тока образуют расширяющийся канал и сверхзвуковые области течения у стенок сопла (рис. 15.22). Поверхность перехода  $\lambda = 1$  деформируется и смещается внутрь сопла, действительная («эффективная») площадь критического сечения и, вместе с ней расход газа и  $\psi_c$ , возрастают. Деформация линии перехода и увеличение  $\psi_c$  и расхода через сопло происходит до  $(p_n/p^*)$  стабилизации  $< \pi(1)$ , при котором устанавливается полный сброс пограничного слоя в выходном сечении сопла. Дальнейшее снижение  $(p_n/p^*) < (p/p^*)_{стабильн.}$  не вызывает изменения коэффициента расхода и расхода газа (см. рис. 15.21). Действительное сопло запирается при втором критическом отношении давлений  $(p_n/p^*) < \pi(1)$ . В этом случае на конечном участке сопла наблюдается существенная деформация полей скоростей с появлением характерных местных сверхзвуковых областей. Струйки, прилегающие к пограничному слою разгоняются до  $\lambda > 1$ , а в области оси сопла остаются дозвуковыми (см. рис. 15.22).

Коэффициенты расхода конических сопел имеют тем меньшее значение, чем больше угол конусности  $\gamma_c$  и степень поджатия  $n$ . Чем меньше  $\psi_c$ , тем в большей степени он возрастает при уменьшении  $p_n/p^*$  и тем меньше величина второго критического отношения давления (см. рис. 15.21).

При истечении из конического сопла или из отверстия струя газа продолжает сужаться за пределами сопла так, что фактическая площадь узкого сечения струи  $S$  меньше площади выходного сечения сопла. При этом скорость в выходном сечении сопла распределена неравномерно: линии тока у стенок сопла имеют максимальную кривизну и скорости здесь имеют большую величину, чем в области оси.

При  $p_n/p^* < \pi(1)$  происходит деформация линии перехода  $\lambda = 1$ . В этом случае коэффициент расхода на основании уравнения неразрывности (11.44) может быть выражен

$$\psi_c = \sigma_{кр} \bar{S}, \quad (11.78)$$

где  $\sigma_{кр} = p_{кр}^*/p^*$  — коэффициент восстановления полного давления

сопла при критическом истечении,  $\bar{S} = S/S_c$  — коэффициент сужения струи за пределами сопла.

Приближенный расчет суживающихся сопел:

1. Для заданного сопла выбирают на основании экспериментальных данных [1, 11, 12]  $\varphi_c$ ,  $\mu_c$  и рассчитывается  $\sigma_c$  по (15.75).

2. Определяется режим истечения —  $\lambda_c$ . Если  $p_n/p^* > \sigma_c \pi(1)$ , то  $\lambda_c(\lambda_{cu}) = p_n/p_c^*$ , а  $\lambda_c = \varphi_c \lambda_{cu}$ . Если  $p_n/p^* < \sigma_c \pi(1)$ , то  $\lambda_c = \lambda_{cu} = 1$ ;  $W_c = \lambda_c a_{кр}$ .

3. Расход газа при заданном сопле или площадь выходного сечения сопла рассчитывается по (15.77) или по (15.78).

Задача 15.12. По условиям задачи 13.9 подсчитайте,  $\sigma_c$ ,  $\varphi_c$  и тягу ТРД, если  $\varphi_c = 0,95$ . Ответ:  $\sigma_c = 0,93$ ,  $\varphi_c = 0,93$ ,  $R = 1,275 \cdot 10^4$  Н.

Реальные течения в соплах Лавалья. Так же, как в сужающихся соплах, два фактора отличают эти течения от одномерных изоэнтропных, рассмотренных в п. 13.4: отклонение от одномерности и гидравлические потери. В соплах Лавалья к потерям на трение добавляются потери на скачках уплотнения и при отрывах пограничного слоя, которые могут возникать в сверхзвуковых частях сопел. Теоретический расчет сверхзвуковых течений с большим  $dp/dx$  при наличии скачков и отрывов пограничного слоя чрезвычайно сложен. Поэтому потери в соплах Лавалья обычно оцениваются суммарно с помощью скоростного коэффициента  $\varphi_c$  (15.74), коэффициента сохранения полного давления  $\sigma_c$  (15.75) и коэффициента расхода  $\psi_c$  (15.76).

Коэффициент расхода сопла Лавалья  $\psi_c$  и неравномерность полей скоростей в области горла. Если в области горла сопла Лавалья реализуется кризис  $\lambda = 1$ , то расход газа определяется величиной поверхности перехода  $\lambda = 1$  и ее расположением относительно горла. Идеальный максимально возможный расход  $G_u = m p^* S_{кр} / \sqrt{T^*}$  соответствует одномерному изоэнтропному течению, когда поверхность перехода  $\lambda = 1$  совпадает с минимальным сечением  $S_{кр}$ .

Реальная структура потока в области горла, а следовательно величина  $\psi_c$  в сильной степени зависит от угла конусности сужающейся части  $\gamma_c$  и относительной кривизны стенки горла  $r/R_{кр}$  (рис. 15.23).

При большом  $\gamma_c$  и малых  $r/R_{кр}$  в сужающейся части сопла линии тока искривляются и сужаются и скорости газа интенсивно нарастают тем в большей степени, чем ближе расположены слои к стенкам. Поэтому поверхность перехода  $\lambda = 1$  во внешних слоях потока располагается до горла в сужающейся части сопла, а в области оси сопла — за горлом (пунктир на схеме сопла рис. 15.23). Отклонение скорости газа от критического значения в узком сечении (в области оси  $\lambda < 1$ , во внешних слоях  $\lambda > 1$ ) приводит к снижению расхода по сравнению с идеальным, так как  $q(1) > q(\lambda \neq 1)$ . Кроме того, при больших  $\gamma_c$  и малых  $r/R_{кр}$  возможен местный отрыв пограничного слоя и образование местных косых скачков уплотнения, из-за сужения ряда трубок тока сверхзвукового течения,

вызванного неравномерностью полей скорости в области горла. Скачки уплотнения приводят к нарушению равномерности полей параметров сверхзвукового течения и к снижению полного давления.

Величина  $\psi_c$  особенно существенно зависит от  $r/R_{кр}$  (см. рис. 15.23). Кривые  $\psi_c = f(r/R_{кр}; \gamma_c)$  сливаются уже при  $r/R_{кр} \approx 0,35$ . При  $r/R_{кр} \approx 2$  коэффициент расхода достигает высокого и, практи-

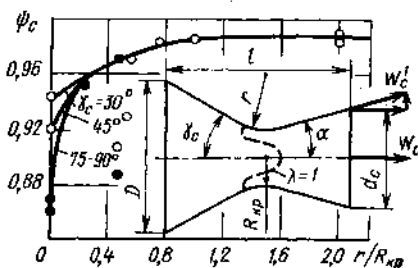


Рис. 15.23. Коэффициент расхода сопла Лавала  $R_{кр}=0,0225$ ;  $d_c=0,094$ ;  $l=0,19$  м;  $\alpha=15^\circ$ ;  $Re=10^7$

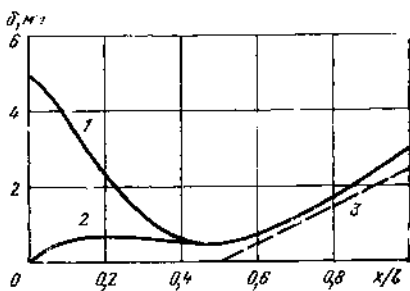


Рис. 15.24. Изменение толщины пограничного слоя по длине конического сопла Лавала (см. рис. 15.23,  $\gamma_c=30^\circ$ ,  $r/R_{кр}=2$ ):

1—толщина пограничного слоя в начальном сечении  $\delta_0=5$  мм; 2— $\delta_0=0$ ; 3—толщина пограничного слоя в горле  $\delta_{throat}=0$  [1]

чески максимального значения  $\psi_c \approx 0,985$ . При  $r/R_{кр} \approx 2$  поля скорости в области горла оказываются достаточно равномерными, поверхность перехода  $\lambda=1$  приближается к минимальному сечению, вихревые и ударные потери практически отсутствуют и остается только влияние трения. Дальнейшее увеличение  $r/R_{кр} > 2$  нецелесообразно, так как удлиняет и утяжеляет сопло, увеличивает потери на трение, не повышая  $\psi_c$ .

Влияние вязкости газа на величину  $\psi_c$ . При реальном течении на стенках сопла Лавала возникает пограничный слой (рис. 15.24). Если дозвуковая часть сопла Лавала обеспечивает равномерные поля скорости в области горла вне пограничного слоя, то течение в сопле Лавала можно разделить на две качественно различные области: течение в области толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta^* = \delta^*(x)$ , сопровождающееся диссипацией кинетической энергии, увеличением энтропии и уменьшением давления торможения и течение в ядре, занимающее большую часть поперечного сечения (см. рис. 15.24). Течение в области ядра можно считать энергетически изолированным и изоэнтропным с неизменными  $p^*$ ,  $T^*$  и  $a_{кр}$ . Поверхность перехода  $\lambda=1$  располагается перпендикулярно оси сопла. Уменьшение расхода, по сравнению с идеальным, объясняется только загромождением узкого сечения сопла областью толщины вытеснения  $\delta_{кр}^*$ , т. е. уменьшением эффективной поверхности перехода до  $S_{кр.эф}$ .

### Для осесимметричного сопла

$$S_{кр.эф} = S_{кр} - S_{\delta_{кр}^*} \cong \pi R_{кр} - 2\pi R_{кр} \delta_{кр}^*; \quad (15.79)$$

$$\psi_c = \frac{S_{кр.эф}}{S_{кр}} = 1 - \frac{2\delta_{кр}^*}{R_{кр}}. \quad (15.80)$$

Данные рис. 15.24 показывают, что толщина пограничного слоя в критическом сечении чрезвычайно мала —  $\delta \approx 0,46$  мм и практически не зависит от толщины пограничного слоя в начальном сечении.

Поэтому толщину пограничного слоя в выходном сечении сопла Лавала приближенно можно рассчитывать, полагая  $\delta_{кр} = 0$  (см. линия 3 на рис. 15.24).

В области горла происходит ламинаризация пограничного слоя под влиянием отрицательного градиента давления. Толщина вытеснения в критическом сечении без учета сжимаемости (15.35) будет  $\delta^* = 0,375 \delta \approx 0,17$  мм.

**Задача 15.13.** Рассчитать коэффициент расхода сопла Лавала, изображенного на рис. 15.23 с учетом влияния только трения (с учетом данных рис. 15.24). Ответ:  $\psi_c = 0,988$ .

Эксперименты и расчеты показывают, что коэффициент расхода сопла Лавала с хорошо спрофилированной дозвуковой частью, учитывая влияние и трения и неравномерности полей скорости, достигает высоких значений —  $\psi_c \leq 0,998$ .

Особенности течения в потенциальном ядре сопла. Площади поперечных сечений потенциального ядра меньше площадей соответствующих сечений сопла на площадь области толщины вытеснения  $S_{\delta^*} \cong 2\pi R \delta^*$ . Как уже указывалось, в критическом сечении  $\delta_{кр} \approx 0$ . Поэтому в дозвуковой части сопла пограничный слой вызывает увеличение скорости течения и уменьшение статического давления, а в сверхзвуковой — уменьшение скорости и увеличение статического давления по сравнению с их значениями при течении идеальной жидкости в том же сопле при сохранении  $p^*$  неизменным. Приведенная скорость  $\lambda_{с.я}$  на срезе сопла при изэнтропном течении определяется из уравнения неразрывности  $q(\lambda_{с.я}) = S_{кр}/S_{с.я}$ . Аналогично, для потенциального ядра, в предположении  $\delta_{кр}^* = 0$ , получим

$$q(\lambda_{с.я}) = S_{кр}/S_{с.я} = S_{кр}/(S_c - S_{\delta_c^*}), \quad (15.81)$$

где  $\lambda_{с.я}$  — приведенная скорость в потенциальном ядре на срезе сопла;  $S_{с.я}$  — площадь сечения ядра на срезе сопла;  $\delta_{\delta_c^*}$  — площадь, занятая областью толщины вытеснения  $\delta_c^*$  на срезе сопла.

Очевидно, что  $\lambda_{с.я} < \lambda_{с.и}$ , так как  $q(\lambda_{с.я}) > q(\lambda_{с.и})$ . Это подтверждают опытные данные [1]

$D_{кр}, м$	$D_c, м$	$Re$	$D_{c,я}/D_c$	$M_{сн}$	$M_{с,я}$
$1,43 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^5$	0,79	2,5	2,0

Однако, это снижение скорости не связано с увеличением энтропии (течение в ядре изоэнтропно) и поэтому не может приниматься во внимание при расчете коэффициента сохранения полного давления сопла (15.75).

Задача 15.14. Определить толщину вытеснения на срезе сопла для данных, приведенных в таблице.

Расчет сопла Лавала при реальном течении. В зависимости от назначения сопла и заданных параметров потока выбирается форма сопла и коэффициенты расхода  $\psi_a$  (см. рис. 15.23) и скоростной коэффициент  $\psi_c$  (0,92 ... 0,99) и определяются:

1. Коэффициент восстановления полного давления  $\sigma_c$  и среднее давление торможения на срезе сопла  $p_c^*$  по заданному  $\lambda_c$  и найденному  $\psi_c$  (15.75)

$$\sigma_c = p_c^*/p^* = \pi(\lambda_c/\psi_c)/\pi(\lambda_c).$$

2. Расход или площадь критического сечения (15.77)

$$G = \psi_c m \frac{p^* S_{кр}}{\sqrt{T^*}}.$$

3. Площадь выходного сечения сопла по уравнению неразрывности  $G = G_{кр} = G_c$ ;  $S_c = [\psi_c/\sigma_c q(\lambda_c)] S_{кр}$ .

4. Параметры потока на срезе сопла по обычным формулам

$$p_c = p^* \pi(\lambda_c); T_c = T^* \tau(\lambda_c); \rho_c = \rho^* \varepsilon(\lambda_c); W_c = \lambda_c a_{кр}.$$

Определение скорости истечения из сопла Лавала  $W_c'$  для расчета силы тяги реактивных двигателей (4.19) основывается на использовании скоростного коэффициента  $\psi_c' = W_c'/W_{c,u}$ , представляющего произведение трех коэффициентов

$$\psi_c' = \varphi_{тр} \varphi_p \varphi_a, \quad (15.82)$$

где  $\varphi_{тр}$  — скоростной коэффициент, учитывающий потери на трение, которые увеличиваются с увеличением длины сопла ( $\varphi_{тр}$  уменьшается), рассчитывается с использованием теории пограничного слоя ( $\varphi_{тр} = \psi_c = 0,92 \dots 0,99$ ).  $\varphi_p$  — скоростной коэффициент, учитывающий потери, вызванные неравномерностью полей параметров течения и скачками уплотнения в области горла. Для сопел Лавала с конической дозвуковой частью  $\varphi_p$  рассчитывается по эмпирической формуле [1]:

$$\varphi_p = 1 - 0,032 k (R_{кр}/r)^{2,6}, \quad (15.83)$$

где  $k = C_p/C_v$ ;  $R_{кр}$  — радиус критического сечения;  $r$  — радиус кривизны стенки сопла в области горла (рис. 15.23).

При  $r/R_{кр} \approx 2$ ;  $\varphi_p = 1$ ,  $\varphi_\alpha$  — скоростной коэффициент, учитывающий уменьшение осевой составляющей скорости истечения (величина которой определяет тягу) вследствие отклонения потока от осевого направления при выходе из конического сопла (см. рис. 15.23). Для равномерного конического потока определяется как среднее значение проекции вектора скорости на ось сопла (см. рис. 15.23)

$$\varphi_\alpha = \frac{W_c + W_c \cos \alpha}{2W_c} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad (15.84)$$

Уменьшение полуугла раскрытия сопла  $\alpha$  при  $S_{кр}/S_c = \text{const}$  приводит к снижению потерь на радиальность истечения, т. е. к увеличению  $\varphi_\alpha$ . При этом увеличивается поверхность трения и потери на трение. Оптимальное коническое сопло, при котором  $\varphi_{тр}\varphi_\alpha$  достигает максимума, имеет место при  $\alpha = 8 \dots 12^\circ$ .

Следует иметь в виду, что уменьшение средней осевой составляющей скорости, из-за конического поля скоростей, учитываемое  $\varphi_\alpha$ , приводит к снижению тяги двигателя, но не вызывает увеличения энтропии и снижения  $p^*$ . Поэтому, при определении коэффициента сохранения полного давления сопла Лаваля по формуле (15.75), вместо  $\varphi_c$  следует подставлять только произведение  $\varphi_{тр}\varphi_p$ , учитывающее гидравлические потери, вызывающие рост энтропии и снижение  $p$ .

**Задача 15.15.** Изобразите схематично в *is*-диаграмме процессы изоэнтропного и реального расчетных сверхзвуковых истечений из сопел Лаваля при одинаковых начальных  $p^*$ ,  $T^*$ ,  $p$ ,  $T$  и конечном  $p_c$ . Отметьте для обоих случаев  $R_{кр}$ ,  $T_{кр}$ , дайте определение  $\sigma_c$  и  $\varphi_c$ .

О форме сопла Лаваля. Одномерная теория определяет площади сечений сопла  $S_x = S_{кр}/q(\lambda_x)$ , но не определяет его форму и длину, которые выбираются в зависимости от назначения сопла.

Сопла реактивных двигателей должны иметь минимальные потери, габарит, массу и стоимость. Этим требованиям при небольших скоростях истечения  $M_c = 3$  удовлетворяют простейшие сопла, составленные из конических дозвуковой и сверхзвуковой частей, соединенных горловиной, описанной дугой окружности с радиусом кривизны  $r/R_{кр} \approx 2$ . Углы конусности сужающейся части сопла рекомендуются в пределах  $2\beta = 30 \dots 60^\circ$ , а расширяющейся —  $2\alpha = 16 \dots 25^\circ$ . Эти условия обеспечивают максимальную величину  $\varphi_c' = \varphi_{тр}\varphi_p\varphi_\alpha \approx 1$ .

При больших скоростях истечения  $M_c > 3$  в ракетных двигателях применяются сопла со специально спрофилированными криволинейными стенками. Сужающаяся часть таких сопел и сопел аэродинамических труб выполняется по профилю Витошинского, либо профилируется по методу акад. С. А. Христиановича, а расширяющаяся сверхзвуковая часть профилируется по методу характеристик. Физическое представление о таком профилировании можно получить по рис. 13.10. Имеется и ряд более простых чисто геометрических методов построения профиля сверхзвуковой части сопла, дающие хорошие результаты [1].



Воздушно-реактивные двигатели работают в широком диапазоне режимов и высот. Этим режимам не удовлетворяют сопла неизменных проходных сечений. Поэтому широко применяются регулируемые сверхзвуковые сопла [1, 25].

**Псевдоскачки.** При истечении из сопла Лаваля с большим перерасширением на срезе сопла устанавливается мостообразный скачок уплотнения (см. рис. 13.16, б). Если отношение давлений  $p_n/p_c$  превосходит критическое для пограничного слоя сопла при его взаимодействии с косым скачком уплотнения  $CB$ , то возникает отрыв пограничного слоя от стенки. Эффективное сечение потенциального ядра и число  $M_c$  уменьшается и система скачков смещается внутрь сопла в некоторое сечение  $x$  с  $\lambda_x < \lambda_c$ ,  $p_x > p_c$ , где система стабилизируется и течение происходит с отрывом пограничного слоя (рис. 15.25).

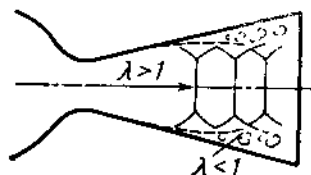


Рис. 15.25. Псевдоскачок

Интересно отметить, что несмотря на то, что скачки и отрыв вносят большие гидравлические потери, тяга двигателя при течении с отрывом пограничного слоя получается выше, чем при полном перерасширении с мостообразным скачком за срезом сопла. Это объясняется тем, что за скачком и отрывом пограничного слоя давление на стенке внутри сопла увеличивается, достигая атмосферного на срезе и таким образом устраняется участок сопла, имевший при полном перерасширении отрицательную составляющую тяги (см. рис. 13.17).

Опыты показывают, что обычно в соплах устанавливается не один прямой скачок, как это представлено на рис. 13.13, а система мостообразных или косых скачков. Поскольку эта система имеет конечную протяженность, то измерения показывают не мгновенное увеличение давления, как на рис. 13.13, а постепенное. Поэтому эти системы называются псевдоскачками. При дальнейшем повышении давления во внешней среде псевдоскачки приближаются к горлу при  $M_x \approx 1,3$ , отрыв пограничного слоя прекращается, псевдоскачок превращается в скачок, близкий к прямому, за которым в расширяющемся канале реализуется дозвуковое диффузорное течение. В горле скачок исчезает и во всем сопле реализуется дозвуковое течение.

## Глава 16

### ДИФФУЗОРЫ

---

Диффузоры служат для торможения жидкости. Несжимаемая жидкость тормозится только в расширяющихся каналах ( $W_2 = W_1 S_1/S_2$ ). При этом кинетическая энергия жидкости, в соответствии с уравнением Бернулли (4.83), превращается в энергию давления и частично затрачивается на преодоление сопротивления диффузора. Как было установлено (11.59), торможение газа можно осуществить за счет геометрического, расходного, теплового и механического воздействий, а при сверхзвуковом течении — даже за счет трения. Комбинация этих воздействий может усилить или ослабить диффузорный эффект.

В этой главе мы рассмотрим торможение газовых потоков за счет геометрического воздействия. Такое торможение газа находит широкое применение во входных устройствах ВРД, межлопаточных каналах компрессоров, в камерах сгорания, в аэродинамических трубах и т. д.

Рассмотрим диффузоры ВРД, которые подразделяются, по числу Маха полета  $M_n$ , на дозвуковые  $M_n < 1$ , малых сверхзвуковых скоростей  $M_0 < 1,5$  и сверхзвуковые  $M_n > 1,5$ . Все эти диффузоры должны иметь минимальные габариты, массу и потери.

#### 16.1. ДОЗВУКОВЫЕ ДИФФУЗОРЫ ВРД

Дозвуковые диффузоры представляют собой расширяющиеся каналы с плавно очерченными входными кромками для предотвращения отрыва потока на входе (рис. 16.1). Чем значительнее увеличение площади сечения диффузора на единицу его длины  $dS/dx$  тем больше  $dp/dx > 0$  и тем меньше длина и масса диффузора. На практике приходится ограничивать величину  $dp/dx$  для того, чтобы избежать отрыва пограничного слоя — источника наиболее существенных потерь полного давления в дозвуковых диффузорах (п. 15.6). Вторым источником потерь является трение в пограничном слое.

Температура торможения воздуха при энергетически изолированном течении в диффузорах, в соответствии с (11.8), остается постоянной  $T_2^* = T_1^* = T_n^*$ . Полное давление из-за гидравлических потерь, в соответствии с (4.97) и (11.38), уменьшается, что при-

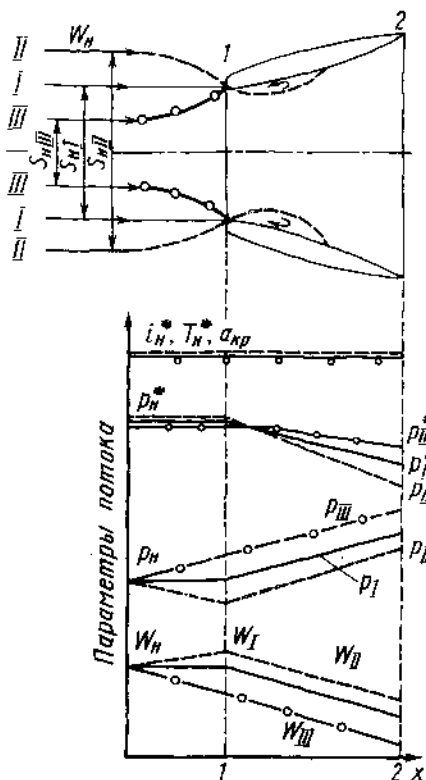


Рис. 16.1. Режимы работы дозвукового диффузора

Примем обозначения параметров, соответствующие рис. 16.1, и рассчитаем потери полного давления, связанные с отрывом пограничного слоя и образованием и поддержанием вихревых зон, как потери на удар Борда—Карно при внезапном расширении канала с  $S_1$  до  $S_2$  (9.5), который смягчен плавным расширением диффузора. Обычно при расчетах бывает задана приведенная скорость  $\lambda_2$  на выходе из диффузора. Поэтому выразим коэффициент сохранения полного давления в долях скоростного напора не на входе, как это было сделано в (9.5), а на выходе из диффузора. Полагая, приближенно, газ несжимаемым, т. е.  $\rho_2 \approx \rho_2^* \approx \rho_N^*$  и учитывая, что  $p_N^*/\rho_N^* = RT^* = \frac{\kappa+1}{2\kappa} a_{кр}^2$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{p_2^*}{p_N^*} = 1 - \frac{p_N^* - p_2^*}{p_N^*} = 1 - \psi \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{\rho_N^* W_2^2}{2p_N^*} = \\ &= 1 - \psi \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \frac{\kappa}{\kappa+1} \lambda_2^2, \end{aligned} \quad (16.1)$$

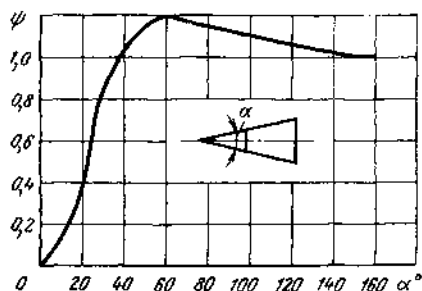


Рис. 16.2. Зависимость коэффициента смягчения удара от угла раствора диффузора круглого сечения

водит к снижению тяги и экономичности двигателя. Статическое давление и плотность увеличиваются за счет уменьшения скорости, но в меньшей степени, чем это могло бы произойти при отсутствии гидравлических потерь, т. е. при изэнтропном сжатии.

Расчет пограничного слоя в диффузорных течениях трудоемок, поэтому величину гидравлических потерь в диффузорах обычно рассчитывают с помощью экспериментальных коэффициентов.

здесь  $\left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2 = \zeta_{уд}$  — коэффициент потерь на удар Борда—Карно при внезапном расширении канала с  $S_1$  до  $S_2$ ;  $\psi$  — экспериментальный коэффициент смягчения удара, зависящий только от угла раствора диффузора  $\alpha$  (рис. 16.2).

При  $\alpha = 0$   $\psi = 0$ , т. е. потери на отрыв пограничного слоя отсутствуют. С увеличением  $\alpha$  возрастает  $dp/dx$ , возникает отрыв пограничного слоя, вихревые зоны перемещаются от выходного сечения диффузора к входному,  $\psi$  увеличивается, а  $\sigma$  уменьшается — потери возрастают. В пределах углов раствора диффузоров  $40 < \alpha < 150^\circ$  коэффициент смягчения удара становится больше единицы и достигает максимального значения  $\psi = 1,2$  при  $\alpha = 60^\circ$ . Следовательно, в этом диапазоне углов вихревые потери при постепенном расширении канала больше, чем при внезапном, когда  $\alpha = 180^\circ$  и  $\psi = 1,0$ . Объясняется это тем, что вихревая зона при внезапном расширении устойчива, а при  $40 < \alpha < 150^\circ$  неустойчива и периодически смывается потоком. На непрерывное возобновление вихревой зоны и затрачивается дополнительная энергия потока. Коэффициент сохранения давления торможения в дозвуковых диффузорах может быть определен по формуле, аналогичной (16.1)

$$\sigma \frac{P_2^*}{P_n^*} = 1 - \zeta_d \frac{\kappa}{\kappa + 1} \lambda_2^2, \quad (16.2)$$

где  $\zeta_d$  — коэффициент сопротивления диффузора, учитывающий как потери на отрыв пограничного слоя, так и на трение.

Минимальные потери соответствуют  $\alpha \approx 6^\circ$ . При увеличении угла  $\alpha > 6^\circ$  потери на трение уменьшаются, так как при заданном  $S_2/S_1$  диффузор становится короче, зато потери на вихреобразование резко возрастают. При уменьшении  $\alpha < 6^\circ$  потери на вихреобразование слегка уменьшаются (при этих углах они малы), но возрастают потери на трение из-за увеличения длины диффузора. На практике для уменьшения длины диффузора углы раскрытия делают  $\alpha = 8 \dots 12^\circ$ . При таких углах видимый отрыв пограничного слоя от стенок диффузора обычно еще не наблюдается. Для уменьшения габаритов и массы желательно делать диффузоры возможно короче. При  $\alpha > 15^\circ$  целесообразно выполнять стенки диффузора криволинейными с постепенно возрастающим углом  $\alpha$  так, чтобы градиент давления вдоль оси  $x$  был бы постоянным  $dp/dx = \text{const}$ . Течение в таком диффузоре обладает большой устойчивостью, пограничный слой нарастает медленнее и снижение потерь может достигать 40%. Хороший результат дает также *ступенчатый диффузор с организованным срывом потока*. Передняя часть такого диффузора имеет  $\alpha < 10 \dots 12^\circ$  и заканчивается внезапным расширением до  $S_2$ . В этом случае внезапное расширение стабилизирует течение за диффузором и не вносит заметных потерь, так как скорость потока перед ним уже невелика.

Формулы (16.1) и (16.2) показывают, что потери полного давления возрастают при увеличении приведенной скорости  $\lambda_2$  на вы-

ходе из диффузора, что при заданном  $S_2/S_1$  соответствует увеличению  $\lambda_1$ .

Уменьшение потерь в диффузоре при больших  $\alpha$  может быть достигнуто отсосом или сдувом пограничного слоя.

Пропускная способность диффузора оценивается коэффициентом расхода  $\psi$  (см. рис. 16.1):

$$\psi = \frac{G_d}{G_p} = \frac{q_n W_n S_n}{q_n W_n S_1} = \frac{S_n}{S_1}, \quad (16.3)$$

где  $S_n$  — площадь поперечного сечения невозмущенной струи, попадающей в диффузор;  $S_1$  — площадь входного отверстия диффузора;  $G_d$  — действительный расход жидкости через диффузор;  $G_p$  — расчетный расход, т. е. расход жидкости с параметрами невозмущенного потока через входное сечение диффузора.

Влияние на работу диффузора соотношения между скоростью полета  $W_n$  и скоростью воздуха во входном сечении  $W_1$ . Пусть самолет летит с постоянной скоростью  $W_n$  на постоянной высоте  $H$ . Тогда, изменяя частоту вращения компрессора, т. е. изменяя  $p_2$ , можно получить три различных режима работы диффузора (см. рис. 16.1):

I. Режим без преобразования скорости и давления воздуха до диффузора  $W_1 = W_n$  и  $p_1 = p_n$ . Струя воздуха попадает в диффузор из бесконечности без изменения сечения  $S_n = S_1$ . Коэффициент расхода  $\psi = 1$ .

II. Режим с внешним расширением потока  $W_1 > W_n$ ;  $p_1 < p_n$ ,  $q_1 < q_n$  и  $\psi = S_{nII}/S_1 > 1$ . Этот режим возникает при снижении давления  $p_2$  за счет увеличения частоты вращения компрессора. Режим II не желателен, так как сопровождается повышенными потерями полного давления  $\sigma_{II} < \sigma_I$  за счет увеличения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а также возникновения отрыва пограничного слоя на входе в диффузор из-за увеличения угла притекания струй к передней кромке диффузора.

III. Режим с внешним сжатием газа  $S_1 > S_n$ ,  $\psi = S_n/S_1 < 1$ ,  $W_1 < W_n$ ,  $p_1 > p_n$ ,  $p_1^* = p_n^*$ . Получается при уменьшении частоты вращения компрессора и увеличении  $p_2$ . Как показывают опыты, оптимальным режимом работы дозвукового воздухозаборника является режим, при котором  $W_1 \approx 0,5 W_n$ . В этом случае перед диффузором возникает изоэнтропное торможение газа, в котором реализуется примерно 75% общей степени повышения давления в диффузоре  $p_2/p_n$ . Дальнейшее повышение сжатия воздуха перед диффузором приводит к чрезмерному увеличению углов притекания воздуха к передней кромке диффузора и может вызвать отрыв пограничного слоя от наружной поверхности диффузора, что приведет к увеличению лобового сопротивления. Если диффузор задресселировать полностью на выходе, то воздух будет тормозиться вне диффузора изоэнтропно и  $p_2 = p_n^*$ ,  $\sigma = 1$  и  $\psi = 0$ . При открытии дросселя появляется расход воздуха ( $\psi > 0$ ) и потери в диффузоре ( $\sigma < 1$ ).

**Задача 16.1.** Определить коэффициенты сопротивления и сохранения полного давления конического диффузора, если  $S_2/S_1=3$ ;  $\alpha=10^\circ$ ;  $\lambda_2=0,2$  и  $0,4$ , а потери на трение составляют 30% от потерь на отрыв пограничного слоя. Ответ  $\zeta_d=0,84$ ,  $\sigma=0,98 \dots 0,92$ .

Степень повышения давления в диффузоре  $\pi_d = p_2/p_1$  зависит от режима работы диффузора, числа  $M$ , отношения площадей  $S_2/S_1$  и гидравлических потерь. Расчеты и опыты показывают, что при нормальной работе диффузора, увеличение степени расширения  $S_2/S_1$  сверх четырех мало эффективно. Так например, при  $M_1=0,75$ , при  $S_2/S_1=4$ ;  $\pi_d=1,32$ , а при  $S_2/S_1=5 \dots \pi_d=1,33$ .

## 16.2. ДИФFUЗОРЫ ДЛЯ НЕБОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ

При  $M_H=1,5$  используются обычные расширяющиеся диффузоры с острыми входными кромками. В зависимости от коэффициента расхода  $\psi$  наблюдаются следующие режимы работы таких диффузоров (рис. 16.3).

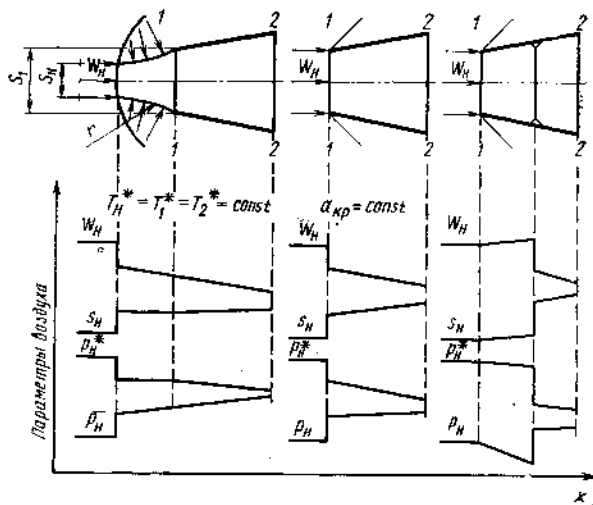


Рис. 16.3. Режимы работы односкачкового диффузора

1. При  $\psi < 1$  перед диффузором возникает отходящая ударная волна. Струя сечением  $S_H < S_1$ , попадающая в диффузор, пересекает участок скачка близкого к прямому. Дозвуковой поток  $\lambda_1' = 1/\lambda_H$  изоэнтропно тормозится на участке между ударной волной и входным сечением диффузора до  $\lambda_1 < \lambda_1'$  и затем — до  $\lambda_2 < \lambda_1$  в дозвуковом диффузоре. При этом на поверхность струи между скачком и сечением 1—1 действует повышенное давление, вызванное центробежными силами частиц воздуха, движущихся по дуге с радиусом кривизны  $r$ . Проекция суммарной силы этого давления на ось  $x$  называется дополнительным сопротивлением диффузора.

II. При увеличении расхода воздуха до  $\psi = 1$  скачок уплотнения располагается непосредственно на кромке диффузора, а внешний поток тормозится на косых скачках уплотнения, что соответствует минимальному внешнему сопротивлению диффузора. На этом режиме потери в дозвуковом диффузоре больше, чем при первом режиме за счет увеличения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вследствие отсутствия изоэнтропного сжатия перед входом.

III. При увеличении объемного расхода воздуха через сечение 2 диффузора за счет снижения  $p_2$  сверхзвуковая струя сечением  $S_{н2} = S_1$  входит в диффузор, ускоряется в расширяющемся канале и ударно тормозится в более интенсивном скачке уплотнения внутри диффузора. Поэтому потери полного давления еще возрастают —  $\sigma_{н1} < \sigma_{н2}$ . На этом режиме  $\psi = 1$  и  $W_1 = W_{н2}$ . Режим  $\psi > 1$  в сверхзвуковом полете не реализуется.

Коэффициент сохранения полного давления рассмотренного входного устройства ВРД определяется по формуле

$$\sigma = p_2^*/p_n^* = p_1^*/p_n^* \cdot p_2^*/p_1^* = \sigma_{н.с} \sigma_{д}, \quad (16.4)$$

где  $\sigma_{н.с}$ ,  $\sigma_{д}$  — коэффициенты сохранения полного давления в прямом скачке уплотнения (12.12) и в дозвуковом диффузоре (16.2).

Потери полного давления на прямом скачке уплотнения при  $M_n = 1,5$  не велики  $\sigma > 0,93$ . Это и позволяет с успехом применять этот простейший односкачковый диффузор.

### 16.3. СВЕРХЗВУКОВЫЕ ДИФFUЗОРЫ

Потери полного давления на прямом скачке уплотнения, весьма малые при  $M_n$  незначительно превосходящем единицу, резко возрастают с увеличением  $M_n$  (рис. 16.4). Уже при  $M_n = 2$   $\sigma = 0,72$ . За счет такой потери полного давления тяга ВРД с односкачковым диффузором уменьшилась бы, примерно, на 40% по сравнению с тягой ВРД при изоэнтропном сжатии и эффективный полет был бы невозможен.

Снижение волновых потерь. Исследования показали, что волновые потери в сверхзвуковом диффузоре снижаются при замене сильного прямого скачка уплотнения системой более слабых косых скачков, за которыми скорость остается сверхзвуковой, с замыкающим слабым прямым скачком, переводящим поток в дозвуковой.\* Последовательный ряд косых скачков возникает у поверхностей

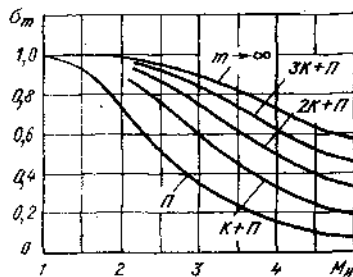


Рис. 16.4. Зависимость  $(\sigma_m)_{\max}$  от числа  $M_n$  для входных устройств с различным числом скачков

\* Системой называется последовательность скачков, между которыми не образуется волн разрежения.

торможения сверхзвукового диффузора, которые располагаются под углами  $\omega$  к сверхзвуковому потоку (рис. 16.5).

**Классификация входных устройств.** По расположению скачков уплотнения относительно плоскости входа они подразделяются на три типа:

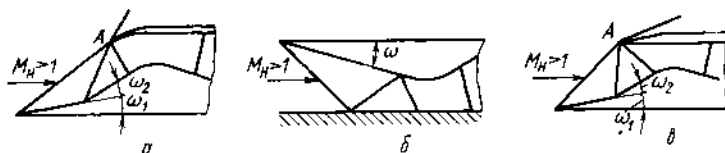


Рис. 16.5. Входные устройства:

а — с внешним сжатием; б — то же с внутренним; в — то же со смешанным

а) внешнего сжатия — косые скачки уплотнения располагаются перед плоскостью входа;

б) внутреннего сжатия — скачки уплотнения находятся внутри канала;

в) смешанного сжатия — часть скачков уплотнения располагается вне и часть — внутри канала.

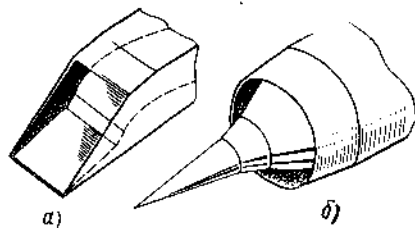


Рис. 16.6. Схемы воздухозаборников:

а — плоского; б — осесимметричного

Каждый тип воздухозаборника имеет свои преимущества и недостатки, которые здесь не рассматриваются. Отметим только, что из рис. 16.5 видно, что при одинаковой площади входа, воздухозаборник внешнего сжатия имеет максимальное внешнее сопротивление, а внутреннего — минимальное. Входные устройства в основном выполняются плоскими или осесимметричными (рис. 16.6).

Число скачков системы выбирается из условия получения высокого значения коэффициента сохранения полного давления  $\sigma$  при расчетном числе  $M_H$  полета при входном устройстве приемлемых габаритов, массы и возможностей регулирования.

Оптимальной системой данного числа скачков для заданного числа  $M_H$  называется система, обеспечивающая максимальное значение коэффициента сохранения полного давления  $\sigma_m$ . В оптимальной системе внешнего сжатия все скачки уплотнения должны сходиться на передней кромке А обечайки (рис. 16.7, а). В этом случае обеспечиваются максимальные значения  $\sigma_m$ , расхода воздуха ( $\psi = 1$ ) и минимальное внешнее сопротивление.

Исследования показывают, что максимальное значение  $(\sigma_m)_{\max}$  для системы из  $m$  плоских скачков уплотнения, т. е. из  $(m-1)$  косых и одного замыкающего прямого

$$(\sigma_m)_{\max} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{(m-1)} \sigma_n \quad (16.5)$$



имеет место при одинаковой интенсивности всех косых скачков

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{m-1} = \sigma_k, \quad (16.6)$$

Это значит, что для всех косых скачков оптимальной системы одинаковы нормальные составляющие чисел  $M_{in}$ ,  $\lambda_{in} = W_{in}/a_{i \text{ кр } n}$ , повышение давления, температуры и плотности и увеличение энтропии (12.2), т. е.

$$\begin{aligned} M_{in} &= M_{1n} = \dots = M_{(m-2)n}; \quad \lambda_{in} = \lambda_{1n} = \dots = \lambda_{(m-2)n}; \\ p_1/p_n &= p_2/p_1 = \dots = p_{m-1}/p_{m-2}; \quad T_1/T_n = T_2/T_1 = \dots = T_{m-1}/T_{m-2}; \\ Q_1/Q_n &= Q_2/Q_1 = \dots = Q_n/Q_m; \quad (S_1 - S_2) = (S_3 - S_2) = \dots = (S_{(m-1)} - S_{(m-2)}). \end{aligned} \quad (16.7)$$

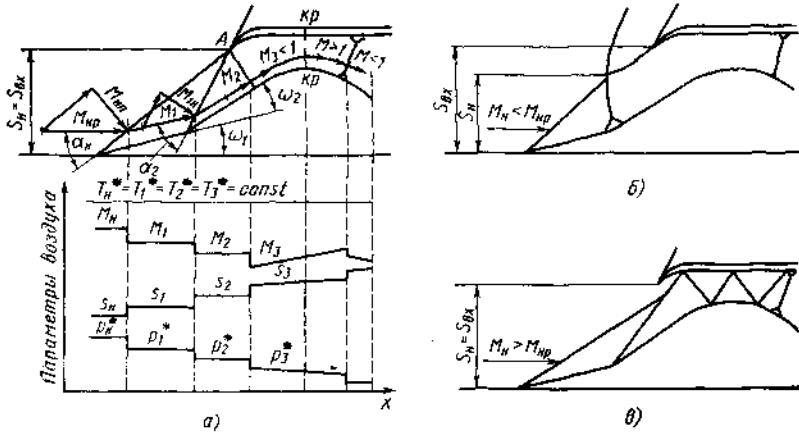


Рис. 16.7. Входное устройство:

а—при  $M_{np}$ ; б—при  $M_n < M_{np}$ ; в—при  $M_n > M_{np}$

Замыкающий прямой скачок оптимальной системы при  $1,5 < M_n < 5$  немного слабее косых скачков

$$M_{(m-1)} = 0,94 M_{np} = 0,94 M_n \sin \alpha_n, \quad (16.8)$$

Поэтому из (16.5) получим

$$(\sigma_m)_{max} = \sigma_k^{(m-1)} \sigma_k. \quad (16.9)$$

Следовательно, расчет оптимальной системы скачков для заданного  $M_n$  состоит в определении величин углов наклона поверхностей торможения  $\omega_i$  и углов фронтов косых скачков  $\alpha_i$ , которыми определяются  $\sigma$  всех скачков оптимальной системы и, наконец, величины  $(\sigma_m)_{max}$ . Остальные геометрические размеры оптимальной системы определяются на основании заданного расхода воздуха, фокусировки скачков на обечайке и уравнения неразрывности.

Методика расчета  $\omega_1, \omega_2, \alpha_n, \alpha_2$  и  $\sigma_{zmax}$  для трехскачковой оптимальной системы скачков (см. рис. 16.7, а).

I. Рассчитывается система 2—3, состоящая из второго косо­го и замыкающего прямо­го скачков. Поскольку оптимальное распо­ложение первого косо­го скачка уплотнения и, следовательно, число  $M_1$  за ним, неизвестны, для расчета выбираются не менее четырех произвольных значений  $M_{1i}$ , лежащих в пределах  $1 < M_{1i} < M_n$ . Для каждого  $M_{1i}$  составляется таблица расчетных данных

$\alpha_n$	$M_{1n}$	$\lambda_{1n}$	$\lambda_{2n}$	$\beta_n$	$\omega_n$	$\sigma_{к2}$	$\lambda_3$	$\lambda_2$	$\sigma_{п1}$	$\sigma_{2-3}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

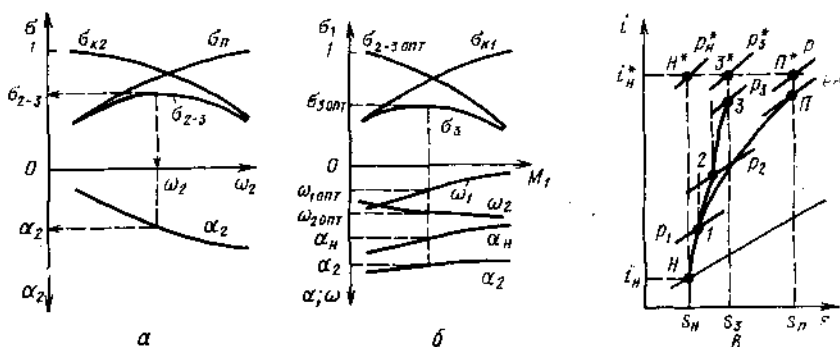


Рис. 16.8. Оптимальная трехскачковая система входного устройства ВРД

В соответствии с номерами столбцов выполняются следующие действия:

1. Задаются 5...6 значений угла  $\alpha_2$  в пределах от  $\alpha_0$  до  $65^\circ$ . Далее определяются (см. п. 12.2); 2— $M_{1n} = M_{1i} \sin \alpha_2$ ; 3— $\lambda_{1n} = f(M_{1n})$  по таблицам газодинамических функций или по формуле  $\lambda_{1n}^2 = \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_{1n}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{1n}^2}$ ; 4— $\lambda_{2n} = 1/\lambda_{1n}$ ; 5— $\text{tg } \beta_2 = \text{tg } \alpha_2 / \lambda_{1n}^2$ ; 6— $\omega_2 = \alpha_2 - \beta_2$ ; 7— $\sigma_{к2} = q(\lambda_{1n})/q(\lambda_{2n})$ ; 8— $\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \beta_2}$ ; 9— $\lambda_3 = 1/\lambda_2$ ; 10— $\sigma_{п1} = q(\lambda_2)/q(\lambda_3)$ ; 11— $\sigma_{2-3} = \sigma_{к2} \sigma_{п1}$ . Для каждого  $M_{1i}$  строятся графики  $\sigma_{к2}$ ,  $\sigma_{п1}$ ,  $\sigma_{2-3}$ ,  $\alpha_2$  в зависимости от  $\omega_2$  и определяются их наимыгоднейшие значения (рис. 16.8, а).

II. Рассчитываются по методике пункта I для первого косо­го скачка значения  $\omega_1$ ,  $\sigma_{к1}$ ,  $M_1$  для различных  $\alpha_n$  при заданном  $M_n$ .

По результатам расчетов по пунктам I и II строится график, по которому определяются оптимальные параметры компоновки (рис. 16.8, б).

На диаграмме  $i-s$  (рис. 16.8, в) сравниваются ударное сжатие воздуха на прямом скачке ( $H-P$ ) и в трехскачковой системе

( $H-1-2-3$ ) при одинаковых начальных условиях. Сжатие в каждом из слабых скачков системы сопровождается незначительным увеличением энтропии и снижением полного давления. Поэтому и суммарные потери в системе меньше, чем для прямого скачка  $\sigma_{2k+1} > \sigma_{п}$ . В соответствии с меньшими потерями статическое давление, плотность и кинетическая энергия воздуха после сжатия в системе скачков выше, а температура ниже, чем после сжатия в прямом скачке уплотнения.

**Задача 16.2.** Объясните причину увеличения потерь в системе скачков (см. рис. 16.8, б) при увеличении и уменьшении  $\alpha_n$  по сравнению с  $\alpha_n \text{ опт.}$  Изобразите соответствующее изменение линии  $H-1-2-3$  на рис. 16.8, в.

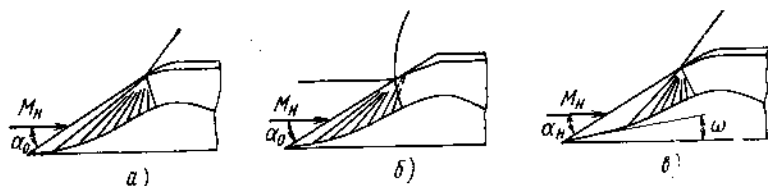


Рис. 16.9. Диффузоры:

а—изоэнтропный; б—с выбитой ударной волной; в—смешанный

Зависимость  $(\sigma_m)_{\text{max}}$  от  $M_n$  для плоских оптимальных систем скачков показана на рис. 16.4. Выигрыш от перехода к большему числу скачков получается тем значительнее, чем больше  $M_n$ . Если  $M_n$  лежит в пределах 1,8 ... 2,0, то используется двухскачковая система ( $K+П$ ), если в пределах 2 ... 2,5 — трехскачковая и так далее.

«Изоэнтропный» диффузор. В пределе, при бесконечно большом числе бесконечно слабых скачков уплотнения, можно теоретически представить плавное изоэнтропное сжатие сверхзвукового потока  $\sigma=1$ . Изоэнтропное сжатие от  $M_n$  до  $M=1$  представляет обратное изоэнтропное расширение от  $M=1$  до  $M_n$ . Поэтому контур поверхности торможения рассчитывается для каждого  $M_n$  по формуле (13.13), определяющей линию тока в течении Прандтля—Майера (рис. 16.9, а).

В действительности полностью изоэнтропное торможение сверхзвукового потока осуществить не удастся: течение происходит при большом  $dp/dx > 0$ , что приводит к отрыву пограничного слоя, возникновению скачка уплотнения, переходящего в отошедшую ударную волну у обечайки (рис. 16.9, б).

Использование отсоса пограничного слоя и сочетание скачков уплотнения и слабых волн сжатия (рис. 16.9, в) дает возможность частично использовать изоэнтропное сжатие газа и увеличить  $\sigma$ .

Регулирование входных устройств. Оптимальная компоновка входного устройства соответствует только расчетным числу  $M_{нр}$  и режиму работы двигателя. При неизбежных отклонениях  $M_n$  от  $M_{нр}$  и изменениях режима работы двигателя компоновка теряет оптимальность. Например, при  $M_n < M_{нр}$  углы косых

скачков увеличиваются и они отходят от кромки обечайки, превращаясь в отошедшую (выбитую) ударную волну (см. рис. 16.7, б). Это приводит к увеличению потерь, т. е. к уменьшению  $\sigma$  и к уменьшению расхода воздуха  $S_n < S_1$  и  $\psi < 1$ . Кроме того, взаимодействие ударной волны с пограничным слоем вызывает его отрыв (см. п. 15.5) и неустойчивую работу воздухозаборника (помпаж). Оптимальность системы нарушается и при  $M_n > M_{нр}$  (см. рис. 16.7, в).

Для того, чтобы компоновка входного устройства при изменении  $M_n$  и режима работы двигателя возможно меньше отклонялась от оптимальной, сверхзвуковые входные устройства делаются регулируемыми. Наиболее полное регулирование включает изменение углов  $\omega$  установки поверхностей торможения, относительное осевое смещение обечайки и центрального тела, изменение проходных сечений или регулирование расхода воздуха перепуском, а также управление пограничным слоем.

Особенности течения воздуха за замыкающим систему прямым скачком. На рис. 16.7, а показано, что дозвуковой поток за прямым скачком снова ускоряется в сужающемся канале до  $\lambda = 1$  в горле воздухозаборника и до  $\lambda > 1$  — в расширяющемся канале и переходит в дозвуковой  $\lambda < 1$  на прямом скачке уплотнения. Только после этого дозвуковой поток тормозится до заданного  $\lambda_n \approx 0,5$  перед компрессором в расширяющемся дозвуковом диффузоре. При такой организации течения небольшие изменения режима работы двигателя и, следовательно, объемного расхода воздуха, сказываются только на положении этого прямого скачка и не нарушают расчетной системы скачков. При увеличении объемного расхода, т. е. снижении давления на входе в компрессор, скачок перемещается вниз по потоку и становится сильнее, потери возрастают и объемный расход через двигатель увеличивается при неизменном массовом расходе. При уменьшении объемного расхода, т. е. при повышении давления, скачок смещается против течения, ослабевает, потери уменьшаются и объемный расход через двигатель уменьшается и оптимальность системы сохраняется. Таким образом, в данном случае, скачок уплотнения играет положительную роль газодинамического регулятора постоянства массового расхода воздуха через двигатель при переменном объемном расходе. Это регулирование достигается введением дополнительных потерь. Если бы за замыкающим скачком уплотнения отсутствовала бы сверхзвуковая зона течения с прямым скачком, то повышение давления, например, в дозвуковой части диффузора приводило бы к выбиванию расчетной системы скачков (см. рис. 16.7, б).

Влияние пограничного слоя на работу диффузора. Пограничный слой, нарастающий на поверхностях торможения увеличивает углы  $\omega$  и отклоняет скачки от расчетного положения. Взаимодействие пограничного слоя со скачками уплотнения приводит к их искажению и вызывает отрыв пограничного слоя (см. п. 15.6). Заторможенный в пограничном слое воздух, попадая

в двигатель, снижает давление торможения. Для уменьшения вредного влияния пограничного слоя применяются различные способы управления им: слив, отсос, охлаждение поверхностей торможения. Работа сверхзвуковых и особенно гиперзвуковых входных устройств невозможна без управления пограничным слоем. Например, при  $M=6$ , входное устройство без управления пограничным слоем имеет  $\sigma=0,1$ , а с управлением  $\sigma \approx 0,3$ .

**Задача 16.3.** Используя график рис. 16.4, определите для  $M_n=3$  отношение статических давлений за оптимальной трехскачковой системой и за прямым скачком, если  $\lambda_2=1,34$  (см. рис. 16.7, а). Ответ:  $p_3/p_n=1,9$ .

## Глава 17

### ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУИ

---

В природе и технике широко распространены течения жидкостей с тангенциальным разрывом скорости. Течения жидкостей одинакового агрегатного состояния по обе стороны поверхности тангенциального разрыва называются струйными. Свободные струи не ограничены стенками. Характерным примером свободной турбулентной струи является поток газов, истекающих из сопла реактивного двигателя в атмосферу. На рис. 17.1 схематично показаны условные границы такой струи и «мгновенная фотография» ее турбулентной структуры (под осью) с некоторыми ее характеристиками.

В теории турбулентных струй предполагается, что при слиянии потоков параметры в каждом из них распределены равномерно, т. е. что пограничный слой на внутренних и внешних поверхностях сопла отсутствует. В этом случае разрыв на срезе сопла претерпевает не только скорость газа, но и его температура  $T_0 \neq T_n$ , плотность  $\rho_0 \neq \rho_n$ , концентрация избыточного компонента  $c_0 \neq c_n$ , параметры торможения  $T_0^* \neq T_n^*$ ,  $p_0^* \neq p_n^*$ ,  $Q_0^* \neq Q_n^*$ . При этом важно иметь в виду, что статическое давление не претерпевает разрыва  $p_0 = p_n$  в дозвуковых и расчетных сверхзвуковых струях, которые являются изобарными  $dp/dx = dp/du = 0$ .

Поверхность тангенциального разрыва скорости при  $Re = \frac{Q_0(u_0 - u_n)d_0}{\mu_0} > 10^3$  неустойчива и генерирует турбулентность (см. п. 6.2), которая называется свободной, так как ее возникновение не связано с присутствием стенок. Интенсивность свободной турбулентности  $\varepsilon = u'/u_m$  ( $u_m$  — скорость на оси струи) достигает 20% и существенно превосходит естественную степень турбулентности в трубах (2 ... 5%) и в развитом пристеночном турбулентном пограничном слое (8 ... 12%). Струйная турбулентность определяет смешение сред, структуру струй и их название — свободные турбулентные струи.

**Классификация турбулентных струй\*:**

I. По числу  $M_0 = u_0/a_0$  истечения из сопла:

1) сверхзвуковые нерасчетные (см. п. 13.4) и изобарные расчетные;

---

\* При  $Re < 10^3$  могут существовать ламинарные струи, редко встречающиеся в технике и здесь не рассматриваемые.

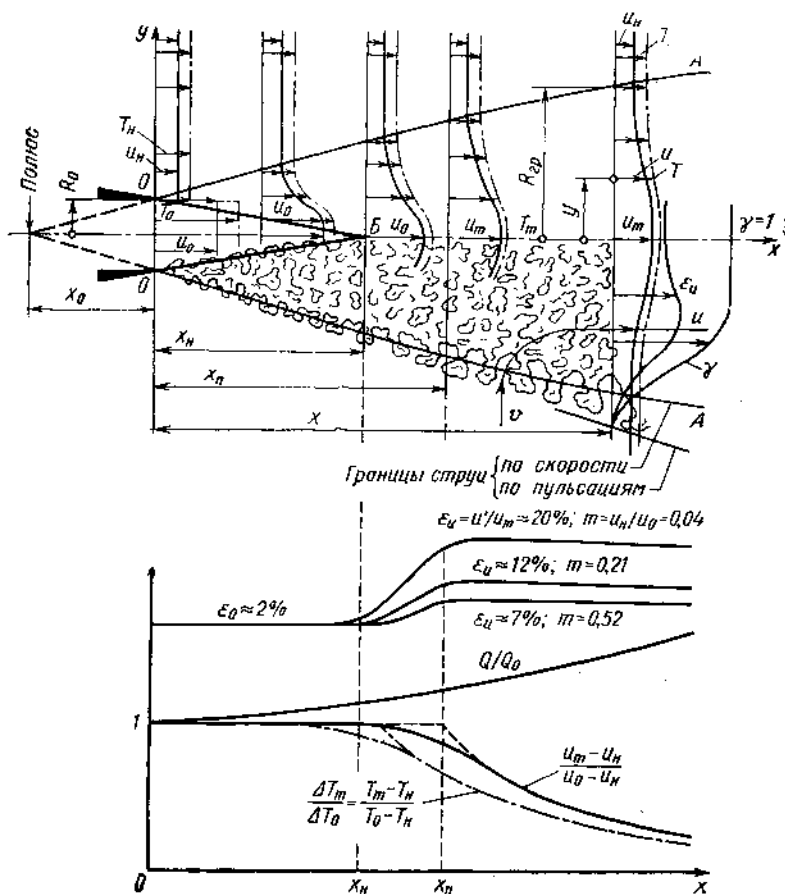


Рис. 17.1. Подогретая струя в слутном потоке

2) изобарные дозвуковые.

II. По относительному движению активной струи и окружающей среды:

1) слутные — струи и окружающая среда движутся в одном направлении с разными скоростями  $u_0$  и  $u_\infty$  (см. рис. 17.1);

2) затопленные — струи вытекают в неподвижную окружающую среду  $u_\infty = 0$ ;

3) встречные — струи и окружающая среда движутся в противоположных направлениях;

4) струи в сносящем потоке — направления потоков пересекаются;

5) закрученные струи.

III. По форме сопла:

1) плоско-параллельные;

2) осесимметричные и другие.

IV. По соотношению и состоянию параметров газа:

- 1) изотермические однородные  $T_0 = T_n$ ,  $Q_0 = Q_n$ ,  $C_0 = C_n$ ;
- 2) подогретые и охлажденные  $T_0 \neq T_n$ ;  $Q_0 \neq Q_n$ ;
- 3) содержащие примесь  $C_0 \neq C_n$ ;
- 4) двухфазные — содержащие примеси в виде мельчайших взвешенных жидких или твердых частиц;
- 5) струйные течения, сопровождающиеся химическими и другими реакциями и т. д.

Этот длинный и далеко не полный список соответствует столь же широкому применению струй, часто определяющих рабочие процессы в реактивных двигателях, топках и металлургических печах, в вентиляционных устройствах, химических аппаратах, в струйных регуляторах и т. д.

Теория струй является частью более общей теории пограничного слоя. Однако практическая значимость струйных течений и многочисленные исследования, обобщенные в капитальных монографиях Г. Н. Абрамовича [2], А. С. Гиневского [10] и др. \* выделили теорию турбулентных струй в самостоятельный раздел гидрогазодинамики.

Задача теории струй. Дано: 1) ширина  $2b_0$  плоского сопла или радиус  $R_0$  осесимметричного; 2) равномерные поля параметров потоков на срезе сопла  $\epsilon_0$ ,  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $Q_0$ ,  $u_0$  и в окружающей среде  $\epsilon_n$ ,  $p_n = p_0$ ,  $T_n$ ,  $Q_n$ ,  $C_n$ ,  $u_n$  (см. рис. 17.1).

Определить параметры струи, т. е. поля скоростей, температур, плотностей и концентраций:  $u = u(x, y)$ ;  $T = T(x, y)$ ;  $\rho = \rho(x, y)$ ;  $c = c(x, y)$ .

Может быть поставлена и обратная задача — определить характеристики исходных потоков для получения заданных полей параметров.

Кроме того, теория должна указать пути управления струйными течениями для интенсификации или ослабления смешения.

При анализе турбулентных струй используются:

- а) полуэмпирическая теория турбулентности (см. пп. 6.1 ... 6.5);
- б) основные уравнения гидрогазодинамики;
- в) экспериментальные данные.

## 17.1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА И СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

Рассмотрим схему осесимметричной неизотермической струи в спутном потоке (см. рис. 17.1). Такая струя характеризуется степенью подогрева  $\theta = T_0/T_n$ , отношением плотностей  $n = \rho_n/\rho_0$ , спутностью  $m = u_n/u_0$  и разностью концентраций избыточного элемента  $C_0 - C_n$ .

Как уже упоминалось, на границе струи у кромок сопла имеет место тангенциальный разрыв скорости  $u_0 - u_n$ ,  $du/dy = \infty$  и возни-

\* Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтономности. М., «Машиностроение», 1975, с. 96.



кает специфическая, свободная турбулентность\*. Поперечные пульсации переносят моли активной струи за пределы цилиндрической поверхности  $R_0$ . Эти моли сообщают часть своего количества движения внешней среде, вовлекая ее в движение вдоль оси  $x$  и одновременно сами подтормаживаются. Вместо жидкости, вынесенной пульсациями из активной струи, поперечные пульсации вносят в активную струю через поверхность, радиус которой  $R_0$ , моли жидкости из окружающей среды, которые подтормаживают активный поток и ускоряются сами. Механизм обмена теплом и избыточным компонентом аналогичен. Подторможенные частицы активного потока, перемешанные с вовлеченными в движение частицами окружающей среды, образуют турбулентный пограничный слой струи (слой смешения), толщина которого у кромки сопла равна нулю и возрастает в направлении течения. Турбулентный обмен ликвидирует тангенциальный разрыв, так что в любом сечении пограничного слоя имеет место плавное непрерывное распределение осредненных скорости, температуры, плотности и концентрации.

Рассмотрим сначала поля скорости в спутной струе, а затем поля температуры и концентрации.

Внешняя граница пограничного слоя  $O-A$  совпадает с внешней границей струи и определяется граничным условием

$$u - u_n = 0,01(u_m - u_n) \text{ при } y = R_{гр}, \quad (17.1)$$

где  $u_m$  — скорость на оси струи в данном сечении  $x$ .

Поперечная составляющая скорости  $v$  на внешней границе направлена к оси струи (линия тока  $v-u$  на рис. 17.1), так как в струю вовлекается масса окружающей жидкости. Это подсосывающее действие струи используется в эжекторах. Величина  $v$  не превышает 3% от  $u_m$ . Поэтому, в приближенных расчетах, ее не учитывают. По мере удаления от сопла струя непрерывно расширяется за счет вовлечения жидкости окружающей среды и снижения скорости.

Внутренняя граница пограничного слоя  $O-B$  совпадает с границей ядра постоянной скорости  $O-B-O$ . В пределах ядра скорость жидкости в каждой точке равна  $u_0$ . В сечении струи  $x_n$  турбулентный обмен достигает оси струи и квазиламинарное ядро постоянной скорости исчезает и далее пограничный слой занимает все сечение струи. Участок струи, на котором расположено ядро постоянной скорости, называется *начальным*. Внешняя и внутренняя границы начального участка прямолинейны.

Переходный участок струи имеет относительно небольшую протяженность  $x_{п}/x_n \approx 1,2 \dots 1,5$ . В области, примыкающей к оси струи переходного участка, происходит интенсивная турбули-

\* В реальных течениях поля скоростей неравномерны из-за присутствия на стенках сопла пограничного слоя. Струйная турбулентность возникает из-за наличия конечного, но большого градиента скорости  $du/dy$ , а расчеты необычайно усложняются.

зация и перемешивание жидкости, только что вышедшей из ядра постоянной скорости, т. е. степень турбулентности  $\varepsilon_u = u'/u_m$  увеличивается (см. рис. 17.1). Это приводит к уменьшению осевой скорости  $u_m$  и деформации полей скорости (а также температур и концентрации) в поперечных сечениях переходного участка. Деформация полей заканчивается к сечению  $x_n$ , где степень турбулентности на оси струи достигает максимума.

Основной участок струи располагается за переходным  $x > x_n$  и характеризуется постоянством интенсивности турбулентности  $\varepsilon_u$  вдоль оси струи и подобием полей скорости во всех его поперечных сечениях.

**Задача 17.1.** Нарисуйте схему совмещенных полей скорости  $u=f(y)$  для различных сечений основного участка струи (см. рис. 17.1).

Поля абсолютной скорости  $u=f(y)$  в различных сечениях основного участка струи различны: чем дальше отстоит сечение от среза сопла, тем шире поле и меньше  $u_m$  (см. рис. 17.1).

Подобие полей скорости для всех поперечных сечений основного участка струи заключается в том, что в соответственных точках любых сечений  $1, 2$   $y_1/R_{гр1} = y_2/R_{гр2}$  безразмерные скорости равны  $\frac{u_1 - u_n}{u_{m1} - u_n} = \frac{u_2 - u_n}{u_{m2} - u_n}$ , т. е. безразмерные поля скорости  $\frac{u - u_n}{u_m - u_n} = \frac{\Delta u}{\Delta u_m} = f(y/R_{гр})$  для всех сечений совпадают и описываются формулой Шлихтинга

$$\frac{u - u_n}{u_m - u_n} = (1 - \eta^{3/2})^2, \quad (17.2)$$

где  $u_n, u_m, u$  — скорости: спутного потока, на оси струи, на расстоянии  $y$  от оси струи в данном сечении, соответственно,  $\eta = y/R_{гр}$  — расстояние от оси струи до точки со скоростью  $u$ , выраженное в долях  $R_{гр}$  или полуширины  $b_{гр}$  данного сечения струи.

Асимптотичность пограничного слоя (см. рис. 17.1) затрудняет экспериментальное определение его толщины  $R_{гр}$  или  $b_{гр}$ . Поэтому, обычно, нормирование ординаты поля ведется не по  $R_{гр}$  или  $b_{гр}$ , а по ординате  $y_c$  при которой  $\frac{u - u_n}{u_m - u_n} = 0,5$ . Ордината  $y_c$  достаточно точно определяется по экспериментальным данным, а  $y_c/R_{гр}$  рассчитывается по формуле (17.2)

$$y_c/R_{гр} = 0,44; \quad R_{гр} = 2,27y_c \quad (17.3)$$

и расчетная формула (17.2) приобретает вид

$$\frac{\Delta u}{\Delta u_m} = \frac{u - u_n}{u_m - u_n} = \left[ 1 - \left( \frac{y}{2,27y_c} \right)^{3/2} \right]^2. \quad (17.4)$$

Поле скоростей  $\Delta u/\Delta u_m = f(y/y_c)$  приведено на рис. 17.2.

Опыты показывают, что формулы Шлихтинга (17.2) и (17.4) применимы для самых различных струй: осесимметричных, плоских, затопленных, в спутном потоке и в противотоке, подогретых и охлажденных ( $0,25 < Q_n/Q_0 < 4$ ), для течений в турбулентном слое

за плохообтекаемым телом и т. д. Для всех этих случаев безразмерные поля скорости универсальны, т. е. не зависят ни от числа Рейнольдса  $Re_0$  ни от числа Маха  $M_0$ , ни от других индивидуальных особенностей струи.

На основном участке течение приобретает такую же структуру, как при истечении из точечного источника  $R_0 \rightarrow 0$  или из плоской щели  $2b_0 \rightarrow 0$  — из полюса струи (см. рис. 17.1). Полюс струи может располагаться как слева, так и справа от среза сопла, на расстоянии  $x_0$  или совпадать с ним, в зависимости от условий истечения (рис. 17.3).

В приближенных расчетах иногда пренебрегают переходным участком и полагают, что основной участок примыкает к началу в сечении, которое называется переходным.

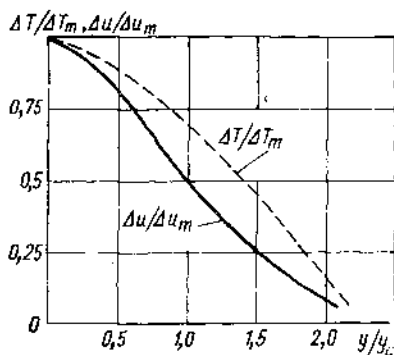


Рис. 17.2. Безразмерные поля температуры и скорости на основном участке струи

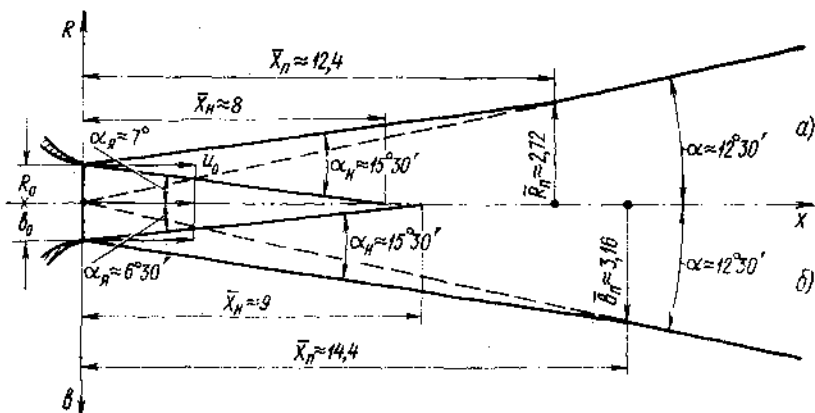


Рис. 17.3. Упрощенная схема затопленной изотермической струи

Безразмерное поле скоростей в пограничном слое начального участка струи с небольшой погрешностью можно рассчитать по формулам (17.2), (17.3) и (17.4), в которых вместо  $u_m$  следует подставлять  $u_0$ , а вместо  $R_{гр}$  или  $b_{гр}$  — толщину пограничного слоя в данном сечении начального участка, т. е. расстояние от границы ядра постоянной скорости до границы струи.

Подобие полей температуры и концентрации избыточной примеси. Подобие полей скорости в поперечных сечениях пограничного слоя струи предопределяет подобие полей температуры и концентрации.

Опыты показывают, что при одинаковых граничных условиях

$$\frac{u - u_n}{u_m - u_n} = \frac{T - T_n}{T_m - T_n} = \frac{c - c_n}{c_m - c_n} = 0,01$$

тепловой и диффузионный пограничные слои толще динамического  $R_{гр.т} = R_{гр.с} > R_{гр.у}$ , что соответствует более интенсивному турбулентному переносу тепла и вещества по сравнению с переносом количества движения (см. рис. 6.5). Это значит, что турбулентное число Прандтля меньше 1.

Для осесимметричной струи  $R_{гр.т} = R_{гр.с} \approx 1,18 R_{гр.у}$  и  $Pr_T \approx 0,8$ .

Для плоскопараллельной струи  $R_{гр.т} = R_{гр.с} \approx 1,45 R_{гр.у}$  и  $Pr_T \approx 0,5$ .

При этих условиях безразмерные поля скорости, температуры и концентрации сливаются

$$\frac{\Delta u}{\Delta u_m} = f(y/R_{гр.у}) = \frac{\Delta T}{\Delta T_m} = f(y/R_{гр.т}) = \frac{\Delta c}{\Delta c_m} = f(y/R_{гр.с}).$$

Однако, для упрощения исследования обычно принимают, что границы струи по температуре и концентрации совпадают с границами по скорости  $R_{гр.т} = R_{гр.с} = R_{гр.у} = R_{гр.у}(x)$ . При этом граничные условия несколько изменяются

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta T_m}\right)_{гр} = \left(\frac{\Delta c}{\Delta c_m}\right)_{гр} > \left(\frac{\Delta u}{\Delta u_m}\right)_{гр} = 0,01.$$

В этом случае безразмерные поля температуры и концентрации хорошо аппроксимируются формулой

$$\frac{T - T_n}{T_m - T_n} = \frac{c - c_n}{c_m - c_n} = \left[1 - \left(\frac{y}{2,27y_c}\right)^{3/2}\right]^{2Pr_T} = \left(\frac{u - u_n}{u_m - u_n}\right)^{Pr_T}. \quad (17.5)$$

Универсальные поля скорости и температуры сравниваются на рис. 17.2. В данных координатах большая наполненность поля температур, по сравнению с полем скоростей, указывает на уже отмечавшуюся более интенсивную передачу тепла поперек струи по сравнению с передачей количества движения. В связи с этим, ядро постоянных температур и концентраций короче ядра постоянной скорости и безразмерная температура  $\frac{T_m - T_n}{T_0 - T_n}$  и концентрация

$\frac{c_m - c_n}{c_0 - c_n}$  вдоль оси  $x$  уменьшается быстрее, чем безразмерная

скорость  $\frac{u_m - u_n}{u_0 - u_n}$  (см. рис. 17.1).

Уравнения (17.2) ... (17.5) замечательны тем, что не зависят от индивидуальных свойств струи и позволяют определить искомые поля скорости, температуры, плотности и концентрации, если определены границы струи  $R_{гр.у} = R_{гр.у}(x)$  или  $b_{гр.у} = b_{гр.у}(x)$  и значения параметров на оси струи  $u_m, T_m, c_m$  (в изобарных струях поле плотности определяется полем температуры  $\rho = \rho/RT$ ).

Итак, струйные течения обладают свойствами, характерными для пограничного слоя: поперечные размеры течения малы по сравнению с продольными, поперечная скорость мала по сравне-

нию с продольной  $v \ll u$ , поперечный градиент продольной скорости больше продольного  $du/dy \gg du/dx$ , безразмерные поля скорости, температуры и концентрации универсальны.

Особенности свободной турбулентности. В пристеночном турбулентном пограничном слое стенка гасит пульсации. Поэтому величина пути смещения или масштаба турбулентности в поперечных сечениях пропорциональна расстоянию от стенки  $l = \kappa y = 0,4y$  (см. п. 8.1). Струйный турбулентный пограничный слой не ограничен стенками. Поэтому величина пути смещения в данном сечении имеет постоянное значение. Из подобия полей скорости следует, что отношение характерных линейных размеров сечений вдоль оси  $x$  величина постоянная, т. е. величина пути смещения пропорциональна толщине пограничного слоя

$$l/R_{rp} = \text{const}; l/b_{rp} = \text{const}. \quad (17.6)$$

Опыты показывают, что свободная турбулентность имеет двойную структуру. Основная часть пульсаций имеет сравнительно малый масштаб и высокие частоты от нескольких килогерц до 200 Гц и содержат основную часть турбулентной энергии. На эту структуру налагается система больших вихрей с частотой пульсаций порядка 20 ... 30 Гц. Расширение свободных турбулентных струй определяется движением этих вихрей, для которых справедлива зависимость (17.6). Большие вихри искривляют границы пограничного слоя с ядром постоянной скорости и с окружающей средой и осуществляют захват нетурбулентной жидкости. Эта модель предполагает наличие сравнительно резкой границы между турбулентной и нетурбулентной жидкостью, что подтверждается опытом. В тонком слое, в месте соприкосновения турбулентной и нетурбулентной жидкостей, должна проявляться вязкость, так как передача завихренности может происходить только за счет сил сдвига. Этот тонкий слой называется *ламинарным надслоем*, по аналогии с ламинарным подслоем в турбулентном пограничном слое на твердой поверхности. Очевидно, что в области границ струйного пограничного слоя течение имеет перемежающийся характер, так как через данную точку пространства хаотически во времени проходят моли жидкости различной степени турбулентности. На рис. 17.1 сопоставляются поле скорости и коэффициент перемежаемости  $\gamma$  (см. п. 6.1) в сечении основного участка струи. Вблизи оси струи коэффициент перемежаемости равен единице, а в области границы он резко падает до нуля. Характерно, что ширина струи, определенная по пульсациям скорости, т. е. по  $\gamma$ , всегда превышает ширину, определенную по осредненной скорости. График распределения степени турбулентности  $\varepsilon_u = u'/u_m$  по сечению основного участка струи показывает неравномерность этого распределения. Максимум интенсивности примерно соответствует максимуму  $du/dy$ .

Расширение границ турбулентной струи. Из физических представлений о турбулентном движении и из соображений размерности следует, что скорость нарастания толщины  $b$  пло-

ского струйного пограничного слоя пропорциональна пульсационной составляющей поперечной скорости,

$$\frac{db}{dt} = \frac{db}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{db}{dx} u \sim v'. \quad (17.7)$$

По (6.16)  $v' = u' \approx l du/dy$ . Ввиду подобия полей скорости градиент  $du/dy$  во всех сечениях пограничного слоя пропорционален максимальной разности скоростей, отнесенной к его толщине  $du/dy \sim (u_m - u_n)/b$ , где  $u_m$  и  $u_n$  скорости на внутренней и внешней границах пограничного слоя, тогда

$$v' \sim \frac{l}{b} (u_m - u_n), \text{ а с учетом (17.6) — } v' \sim (u_m - u_n).$$

Подставляя значение  $v'$  в (17.7), получим, что нарастание толщины пограничного слоя по длине струи

$$\frac{db}{dx} \sim \frac{v'}{u} \sim \frac{|u_m - u_n|}{|u|} \quad (17.8)$$

пропорционально интенсивности турбулентности  $v'/u$ , характерной для всего данного сечения пограничного слоя. Так как  $v'/u$  всегда положительно, то струя расширяется —  $db/dx > 0$ . При этом величина  $v'$  является фактором, увеличивающим  $b$  во времени, а  $u$  — уменьшающим, сносящим приращение  $b$  вдоль течения.

Характерную скорость  $u$  в уравнении (17.8), с учетом сжимаемости  $n = \rho_n/\rho_0 \approx 1$ , рационально определять как среднемассовую для данного сечения пограничного слоя. Однако, скорость правильно осреднять не по площади сечения, а по толщине пограничного слоя. Основанием для этого служат экспериментальные данные, показывающие, что законы нарастания толщины плоской и осесимметричной струи одинаковы. Итак

$$u_{cp} = \int_0^b \rho u dy / \int_0^b \rho dy. \quad (17.9)$$

Вследствие того, что  $u$  и  $\rho$  изменяются как вдоль, так и поперек струи, уравнение (17.8) с использованием  $u_{cp}$  получается чрезвычайно сложным не только для решения, но и для качественного анализа.

Избыточные скорости  $\Delta u_m = u_m - u_n$ , температура  $\Delta T_m = T_m - T_n$ , а следовательно и плотность  $\rho_m - \rho_n$  по длине основного участка струи по абсолютной величине быстро уменьшаются (см. рис. 17.1), поэтому сильное влияние сжимаемости газа на форму границы струи проявляется лишь в переходном участке и в начальной части основного. Опыты с сильно подогретыми струями показывают, что почти на всей длине основного участка граница струи слабо изогнута. Поэтому сложную зависимость (17.9) для характерной скорости в сечении можно заменить упрощенной:

$$u = \frac{\rho_m u_m + \rho_n u_n}{\rho_m + \rho_n}. \quad (17.10)$$

Подставляя удвоенное значение  $u$  из (17.10) в (17.8), заменяя знак пропорциональности знаком равенства и константой  $C$ , получим закон нарастания толщины струи

$$\frac{db}{dx} = C \frac{u_m - u_n}{2} \frac{1 + \frac{Q_n}{Q_m}}{u_m + u_n \frac{Q_n}{Q_m}} = C \frac{1 - \frac{u_n}{u_m}}{2 \left(1 + \frac{Q_n}{Q_m} \frac{u_n}{u_m}\right)} \left(1 + \frac{Q_n}{Q_m}\right). \quad (17.11)$$

Здесь константа  $C$  может быть определена только экспериментальным путем.

Анализ закона нарастания толщины пограничного слоя струй.

1. Затопленная изотермическая струя  $u_n = 0$ ,  $T_0 = T_n$  и  $Q_0 = Q_n$ .

Для этого простейшего случая из (17.11) получим линейный закон расширения струи

$$\frac{dR_3}{dx} = \frac{db_3}{dx} = C; \quad R_3 = Cx; \quad b_3 = Cx. \quad (17.12)$$

Прямолинейность границ начального и основного участков изотермической затопленной струи позволила, на основании обширных экспериментов, определить величины констант  $C$ , которые оказались одинаковыми для осесимметричной и плоской струй.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Для начального участка } C \approx 0,27; \quad \alpha_n \approx 15^\circ 30'. \\ \text{Для основного участка } C \approx 0,22; \quad \alpha \approx 12^\circ 30'. \end{array} \right\} \quad (17.13)$$

Эти значения констант сохраняются для любых турбулентных струй, если только не производится их искусственная турбулизация перед срезом сопла.

Эксперименты показывают, что полюс, в котором пересекаются прямолинейные границы основного участка изотермических затопленных струй, практически совпадает со срезом сопла ( $x_0 = 0$ ). Поэтому отсчет абсцисс сечений, как для начального и переходного, так и для основного участков, в формулах (17.12) следует производить от среза сопла (см. рис. 17.3).

Расчеты струй, с использованием интегрального уравнения количества движения и значений константы  $C$  (см. п. 17.2), показывают, что вследствие пространственности течения, начальный и переходный участки осесимметричной струи короче соответствующих участков плоской при одинаковых законах расширения границ. В реальных течениях прямолинейные границы начального и основного участков плавно сопрягаются криволинейной границей переходного участка.

2. Два полубесконечных потока при  $Q_0 = Q_n$  характерны тем, что на границах пограничного слоя  $u_m = u_0 = \text{const}$  и  $u_n = \text{const}$ , поэтому границы прямолинейны (см. 17.11)

$$\frac{db}{dx} = C \frac{|u_m - u_n|}{|u_m| + |u_n|} = \text{const} \quad \text{и} \quad b = \text{const} \cdot x.$$

Сопоставляя эти выражения с (17.12), получим

$$\frac{b}{b_3} = \frac{|u_m - u_n|}{|u_m| + |u_n|}. \quad (17.14)$$

При спутном движении двух полубесконечных потоков  $u_m$  и  $u_n$  имеют одинаковые знаки. Поэтому, с увеличением спутности  $m = u_n/u_0$ , утолщение пограничного слоя уменьшается. В пределах  $0 < m < 0,5$  эксперименты подтверждают закономерность (17.14), что указывает на стабилизирующее действие спутности, приводящее к уменьшению тангенциального разрыва скорости и к снижению интенсивности турбулентности (см. рис. 17.1). При  $0,5 < m \leq 1$  величина  $b/b_3 \approx 0,3$  и формула (17.14) не применима.

Задача 17.2. Объясните, почему возникает турбулентный пограничный слой при  $m=1$ , когда тангенциальный разрыв скорости формально отсутствует.

При распространении струи во встречном потоке, скорости на границах пограничного слоя имеют разные знаки, тогда из (17.14) имеем

$$\frac{b}{b_3} = \frac{u_m + u_n}{u_m + u_n} = 1, \quad (17.15)$$

т. е. при встречном движении струй угол утолщения пограничного слоя не зависит от соотношения скоростей на границах и всегда равен углу утолщения затопленной струи. Эксперименты подтверждают этот вывод и показывают, что встречный поток так обтекает струю, что практически не взаимодействует с ее границами.

3. *Струя конечной толщины в спутном потоке* ( $\rho_0 = \rho_n$ ). В начальном участке  $u_m = u_0 = \text{const}$  и  $u_n = \text{const}$ . Поэтому все выводы для полубесконечных потоков справедливы для начального участка конечных струй.

Для основного участка формула (17.11) принимает вид

$$\frac{db}{dx} = C \frac{|u_m - u_n|}{u_m + u_n}. \quad (17.16)$$

При  $u_n < u_0$  величина осевой скорости  $u_m$  вдоль оси основного участка уменьшается и стремится к  $u_n$ . Вследствие этого  $db/dx$  вдоль оси также уменьшается и граница струи в спутном потоке криволинейна (рис. 17.4).

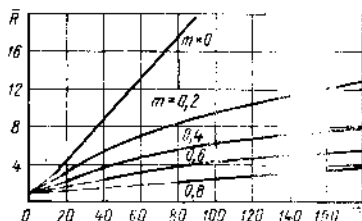
4. *Затопленная струя, плотность газа которой не равна плотности газа в окружающей среде*  $n = \rho_n/\rho_0 \neq 1$ . Разница в плотностях может быть достигнута за счет разницы в температурах, так как для изобарной струи  $\rho_n/\rho_0 = T_0/T_n$ , либо за счет использования различных газов. При  $u_n = 0$  формула (17.11) принимает вид

$$\frac{db}{dx} = C \frac{\left(1 + \frac{\rho_n}{\rho_m}\right)}{2}. \quad (17.17)$$

Если струя подогрета  $\theta = T_0/T_n > 1$  и  $\rho_n/\rho_0 > 1$ , то она расширяется в большей степени, чем изотермическая. Длины начального и переходного участков сокращаются, границы их прямолинейны. В ос-



Рис. 17.4. Границы осесимметричных затопленных струй при  $m = u_0/u_0 < 1$



новном участке  $Q_m$  увеличивается вдоль оси, приближаясь к  $Q_n$ , поэтому границы криволинейны. Однако, на расстоянии более  $50 b_0$  от сопла, они приобретают направление, параллельное границам изотермической струи  $S=0,22$ . Холодная струя

$\theta = T_0/T_n < 1$ ,  $Q_n/Q_0 < 1$  напротив, расширяется медленнее изотермической, но к  $x > 50 b_0$  ее границы также принимают направление, параллельное границам изотермической затопленной струи.

**Дальнобойностью струи** называется расстояние от среза сопла, при котором скорость на оси достигает половины исходной  $u_m = 0,5u_0$ .

**Задача 17.3.** При одинаковых  $b_0$  и  $u_0$  качественно сравните границы и дальнобойность следующих струй: затопленных — изотермической, подогретой, охлажденной; изотермических — затопленной и в спутном потоке.

## 17.2. РАСЧЕТ СТРУИ

Для решения поставленной задачи, т. е. для определения параметров газа в струе  $u(x, y)$ ,  $T(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$  и  $s(x, y)$ , кроме уже определенных границ струи (17.12) и (17.13) и универсальных профилей параметров в поперечных сечениях слоя смешения (17.4) и (17.5), необходимо определить изменение этих параметров вдоль оси основного участка струи  $u_m(x)$ ,  $T_m(x)$ ,  $Q_m(x)$  и  $s_m(x)$ . Для этого используем следующие основные уравнения газовой динамики в интегральной форме.

1. **Уравнение количества движения.** Выделим произвольный конечный участок изобарной осесимметричной затопленной струи. Напряжения трения на контрольной поверхности равны нулю — отсутствуют поперечные градиенты скорости. Силы давления уравновешиваются вследствие изобарности струи. Таким образом, проекция на ось  $x$  суммы сил, действующих на элемент, равна нулю и уравнение выражает постоянство количества движения в любом сечении струи:

$$Q_0 u_0^2 \pi R_0^2 = \int_0^{R_{\text{гр}}} \rho u^2 2\pi y dy, \quad (17.18)$$

где  $y$  — текущий радиус точки сечения, в которой скорость равна  $u$ , а плотность —  $\rho$ .

В более общем случае спутной струи абсолютная величина количества движения увеличивается по мере удаления сечения от сопла за счет непрерывно добавляющейся массы спутного потока, обладающей количеством движения, равным произведению массы на скорость спутного потока. Примем за начало отсчета скорость спутного потока  $u_b$ , тогда уравнение будет выражать закон сохранения

избыточного количества движения масс жидкости, протекающих в различных сечениях, например  $Q_0 u_0^2 \pi R_0^2 < \int_0^{R_{rp}} Q u^2 2\pi y dy$ , но

$$Q_0 u_0 (u_0 - u_n) \pi R_0^2 = \int_0^{R_{rp}} Q u (u - u_n) 2\pi y dy, \quad (17.19)$$

С помощью уравнения (17.19) и экспериментальной константы  $C$  определяется  $u_m = u_m(x)$ .

2. Уравнение сохранения энергии выражает постоянство для всех сечений струи избыточной энтальпии газа по отношению к энтальпии окружающей среды. За начало отсчета температуры принимается температура окружающей среды  $T_n$ .

$$C_p Q_0 u_0 (T - T_n) \pi R_0^2 = \int_0^{R_{rp}} C_p Q u (T - T_n) 2\pi y dy. \quad (17.20)$$

Это уравнение используется для определения  $T_m = T_m(x)$  и, следовательно,  $Q_m = Q_m(x)$ .

3. Уравнение сохранения массы избыточного компонента для любого сечения струи

$$Q_0 u_0 (c_0 - c_n) \pi R_0^2 = \int_0^{R_{rp}} Q u (c - c_n) 2\pi y dy \quad (17.21)$$

используется для определения  $c_m = c_m(x)$ .

Свободные турбулентные струи при конечных размерах начальных поперечных сечений не осесимметричной формы деформируются и в основном участке становятся осесимметричными. Поэтому рассмотрим расчет осесимметричной струи, имеющей наибольшую значимость.

Затопленная осесимметричная струя. Пусть заданы радиус сопла  $R_0$  и следующие идеализированные условия: равномерные поля скорости  $u_0 < a$ , температуры  $\theta = (T_0/T_n) \rightarrow 1$ , плотности  $n = (Q_n/Q_0) \rightarrow 1$  и концентрации избыточного элемента  $(c_0/c_n) \rightarrow 1$  (см. рис. 17.3).

Требуется определить  $u_m(x)$ ,  $T_m(x)$ ,  $Q_m(x)$ ,  $c_m(x)$ .

В рассматриваемых условиях изменение параметров в струе определяется только начальным импульсом  $Q_0 u_0^2 \pi R_0^2$ . Температура, плотность, концентрация избыточного компонента и давление во всем поле течения практически постоянны и поэтому являются пассивными параметрами, не влияющими на характеристики струи.

Для определения изменения скорости вдоль оси основного участка используем (17.18), приведя его к безразмерному виду

$$2 \int_0^{R_{rp}/R_0} (u/u_0)^2 \frac{y}{R_0} d(y/R_0) = 1. \quad (17.22)$$

Заменим  $y/R_{rp} = \eta$ ;  $d(y/R_{rp}) = d\eta$ ;  $\frac{y}{R_0} = \frac{y}{R_{rp}} \frac{R_{rp}}{R_0}$ ;  $\frac{u}{u_0} = \frac{u}{u_m} \frac{u_m}{u_0}$ .

Учитывая, что  $R_{rp}/R_0$  и  $u_m/u_0$  не зависят от  $y$  и  $\eta$  и могут быть вынесены за знак интеграла, получим

$$\left(\frac{u_m}{u_0}\right)^2 \left(\frac{R_{rp}}{R_0}\right)^2 2 \int_0^1 \left(\frac{u}{u_m}\right)^2 \eta d\eta = 1. \quad (17.23)$$

Подставляя значение  $u/u_m$  из (17.2), получим, что  $\int_0^1 \left(\frac{u}{u_m}\right)^2 \eta d\eta = 0,067$  и тогда из (17.23) найдем связь между безразмерным радиусом поперечного сечения и безразмерной скоростью на оси этого сечения

$$R_{rp}/R_0 = 2,72 u_0/u_m. \quad (17.24)$$

Радиус переходного сечения определим из условия  $u_m = u_0$

$$\bar{R}_n = R_n/R_0 = 2,72. \quad (17.25)$$

Длина переходного участка  $x_n$  определяется из условий

$$x_n/R_0 = R_n/CR_0 \text{ и } R_n/R_0 = 2,72; \bar{x}_n = \bar{R}_n/C \approx 2,72/0,22 \approx 12,4. \quad (17.26)$$

Абсцисса начального участка в соответствии с экспериментальными и расчетными данными [2]

$$\bar{x}_n = x_n/R_0 \approx 8. \quad (17.27)$$

Отсюда угол между образующей ядра постоянных скоростей и осью струи  $\alpha_n \approx 7^\circ$ . Для плоской струи  $\bar{x}_n = x_n/b_0 \approx 9$  и  $\alpha_n \approx 6^\circ 30'$  (см. рис. 17.3).

Граница основного участка осесимметричной и плоской струй определяется по (17.12) и (17.13) одинаково  $\bar{R} = 0,22\bar{x}$ ,  $\bar{b} = 0,22\bar{x}$ .

Осевая скорость газа  $u_m = u_m(x)$  в основном участке осесимметричной струи определим, используя (17.24), (17.12) и (17.13)

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{12A}{x/R_0}. \quad (17.28)$$

Подобный расчет для плоской струи дает

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{3,8}{\sqrt{x/b_0}} \text{ и } \bar{x}_n = 14,4. \quad (17.29)$$

Сопоставление (17.28) и (17.29) подтверждает уже отмечавшееся более быстрое затухание скорости в осесимметричной струе.

Объемный расход газа через поперечные сечения основного участка осесимметричной струи

$$Q = \int_0^{R_{rp}} u 2\pi y dy = 2\pi R_0^2 u_0 \frac{u_m}{u_0} \left(\frac{R_{rp}}{R_0}\right)^2 \int_0^1 \frac{u}{u_m} \eta d\eta.$$

В этом уравнении  $\pi R_0^2 u_0 = Q_0$  — расход газа через сопло,

$$(R_{rp}/R_0)^2 = 7,4 (u_0/u_m)^2 \text{ и } \int_0^1 \frac{u}{u_m} \eta d\eta = 0,128;$$

$$Q/Q_0 = 1,9 u_0/u_m. \quad (17.30)$$

Сопоставление (17.30) и (17.28) показывает, что расход газа на основном участке осесимметричной струи возрастает пропорционально  $x$ . В конце начального участка  $u_m = u_0$  и  $Q_n = 1,9 Q_0$ .

Изменение температуры газа вдоль оси основного участка осесимметричной струи определим, выполнив преобразования уравнения сохранения избыточной энтальпии (17.20), аналогично преобразованию уравнения сохранения импульса.

При  $n = Q_n/Q_0 \rightarrow 1$ ,  $\theta = T_0/T_n \rightarrow 1$  и  $C_p = C_{p0}$ , получим

$$\frac{u_m}{u_0} \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \left( \frac{R_{rp}}{R_0} \right)^2 2 \int_0^1 \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{u}{u_m} \eta d\eta = 1,$$

где, в соответствии с (17.5), при  $P_{rT} = 0,8$

$$\int_0^1 \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{u}{u_m} \eta d\eta = \int_0^1 \left( \frac{u}{u_m} \right)^{1,5} \eta d\eta = 0,077, \left( \frac{R_{rp}}{R_0} \right)^2 = 7,4 \left( \frac{u_0}{u_m} \right)^2.$$

Принимая во внимание подобие полей температур и концентраций, найдем

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{\Delta c_m}{\Delta c_0} = 0,88 \frac{u_m}{u_0} = \frac{10,9}{x/R_0}. \quad (17.31)$$

Полученные формулы дают возможность рассчитать осесимметричную и плоскую затопленные изобарные струи только для принятых идеализированных условий, при которых определяющим активным параметром является только начальный импульс  $Q_0 u_0^2 \pi R_0^2$ .

В реальных течениях, помимо начального импульса, действует еще ряд активных факторов, управляющих течениями.

Спутность  $m = u_n/u_0$  и отношение плотностей  $n = Q_n/Q_0$  существенно влияют на границы струи и изменение параметров в слое смешения.

Увеличение плотности активной струи, например за счет ее охлаждения  $\theta = T_0/T_n < 1$ , приводит к увеличению длины начального участка струи и к соответствующему смещению кривой, характеризующей затухание осевой скорости, вдоль оси основного участка (рис. 17.5).

Аналогичное влияние увеличения спутности показано на рис. 17.4.

Особенно существенное влияние на струйное течение оказывает *неравномерность распределения параметров струи на срезе сопла, обусловленное пограничным слоем на его стенках*. Эта неравномер-

ность изменяет начальные интегральные параметры струи: расход, импульс, энтальпию, что обычно в расчетах учитывается введением коэффициентов, оценивающих эту неравномерность. Кроме того, неравномерность профиля скорости приводит к повышению уровня турбулентности и к сокращению длины начального участка.

При истечении в слутный поток действие внутреннего и внешнего пограничных слоев суммируется и усиливается. Этим объясняется развитие конечного турбулентного слоя смешения при  $m = u_{в}/u_0 = 1$ .

Наконец, существенным фактором, с помощью которого можно управлять процессами турбулентного смешения, является искусственная турбулизация струй, которая становится эффективной при  $\epsilon_0 > 5\%$ .

Исследованием установлено, что различные воздействия на струи прежде всего влияют на начальный и переходный участки, а закон изменения параметров вдоль оси основного участка практически не изменяется. Поэтому, если измерены или рассчитаны абсциссы переходных сечений соответствующих параметров  $x_{пн}$ ,  $x_{пт}$ ,  $x_{пс}$ , то изменение этих параметров вдоль оси осесимметричной струи может быть рассчитано по следующим формулам

$$\frac{\Delta u_m}{\Delta u_0} = \frac{x_{пн}}{x}; \quad \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{x_{пт}}{x}; \quad \frac{\Delta c_m}{\Delta c_0} = \frac{x_{пс}}{x}. \quad (17.32)$$

Для плоско-параллельной струи

$$\frac{\Delta u_m}{\Delta u_0} = \sqrt{\frac{x_{пн}}{x}}; \quad \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \sqrt{\frac{x_{пт}}{x}}; \quad \frac{\Delta c_m}{\Delta c_0} = \sqrt{\frac{x_{пс}}{x}}, \quad (17.33)$$

т. е. в соответствующих безразмерных осях координат поля осевых параметров газа универсальны.

Расчет струй при более сложных начальных условиях можно найти в специальной литературе.

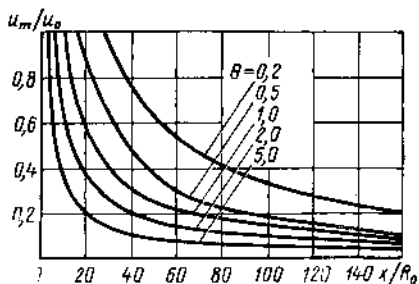


Рис. 17.5. Изменение безразмерной скорости вдоль оси струи в зависимости от начального подогрева

### 18.1. ПРОФИЛЬ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПОСТУЛАТ ЖУКОВСКОГО—ЧАПЛЫГИНА

Одной из важнейших задач гидрогазодинамики является изучение взаимодействия потоков с крылом и винтом самолета, лопатками компрессоров, газовых турбин, насосов и т. д.

Крыловым профилем или просто профилем называется линия, очерчивающая поперечное сечение крыла или лопатки. В зависимости от назначения используются профили самых различных форм.

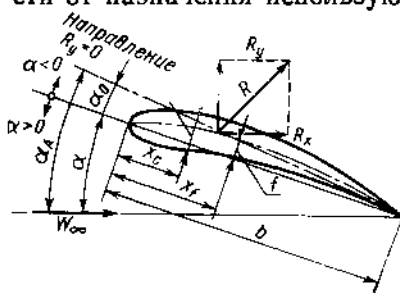


Рис. 18.1. Схема аэродинамического профиля

Для обычных дозвуковых профилей характерны скругленные передние кромки и заостренные задние (рис. 18.1). Для сверхзвуковых профилей характерны заостренные как задние, так и передние кромки.

Геометрические характеристики дозвукового профиля: 1) средняя линия или дуга — геометрическое место центров окружностей, вписанных в профиль; 2) хорда  $b$  — отрезок прямой, соединяющий две наиболее удаленные точки средней линии; 3) относительная толщина  $\bar{c} = c/b$  — отношение максимального диаметра вписанной в профиль окружности к длине хорды. Для современных профилей  $\bar{c} = 4 \dots 20\%$ ; 4) относительная абсцисса  $\bar{x}_c = x_c/b$  — отношение расстояния от передней кромки до сечения максимальной толщины к длине хорды  $\bar{x}_c = 0,2 \dots 0,4$ ; 5) относительная кривизна  $\bar{f} = f/b$  — отношение максимальной стрелы прогиба осевой линии к длине хорды;  $\bar{f} = 0 \dots 40\%$ ; 6) относительная абсцисса  $\bar{x}_f = x_f/b$  — отношение абсциссы сечения с максимальной стрелой прогиба к длине хорды  $\bar{x}_f \approx 0,2 \dots 0,5$ ; 7) угол атаки  $\alpha$  — угол между направлением вектора скорости  $W_\infty$  невозмущенного потока и хордой профиля; 8) угол атаки  $\alpha_0$  нулевой подъемной силы — угол между хордой и направлением вектора скорости невозмущенного потока при подъемной силе  $R_y = 0$ , т. е. при бесциркуляционном обтекании профиля; на рис. 18.1,  $\alpha_0 < 0$ ; 9) аэродинамический угол атаки  $\alpha_A$  — угол между направлением скорости невозмущенного потока и направлением нулевой подъемной силы  $\alpha_A = \alpha - \alpha_0$ .

Под аэродинамическими характеристиками профиля понимают

характеристики прямоугольного крыла бесконечного размаха. На всех участках единичной длины такого крыла действуют одинаковые полная аэродинамическая сила  $R$ , подъемная сила  $R_y$ , нормальная к вектору скорости на бесконечности и сила лобового сопротивления  $R_x$ , совпадающая по направлению с направлением вектора скорости на бесконечности, т. е. исключаются концевые эффекты, присущие крыльям или лопаткам конечных размеров.

В соответствии с положениями теории подобия используются не только силы и моменты сил, но и их безразмерные коэффициенты

$$C_R = \frac{R}{\frac{\rho_\infty W_\infty^3}{2} b}; \quad C_y = \frac{R_y}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} b}; \quad C_x = \frac{R_x}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} b}; \quad C_m = \frac{M}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2} b z},$$

где  $R$ ,  $R_y$ ,  $R_x$  — силы, действующие на один погонный метр крыла бесконечного размаха Н/м;  $M$  — момент силы  $R$  относительно выбранной оси;  $z$  — характерная длина.

Отношение величины подъемной силы профиля к силе лобового сопротивления называется качеством профиля

$$K = R_y/R_x = C_y/C_x.$$

**Задача 18.1.** Докажите, что качество есть отношение проекции на горизонталь длины планирования профиля к высоте, с которой начинается его планирование. Подсчитайте, на какое расстояние спланирует с высоты 1000 м планер ( $K=38$ ), пассажирский самолет ( $K=10$ ) и сверхзвуковой лайнер ( $K=6$ ).

В общем случае  $C_y$ ,  $C_x$ ,  $C_m$  зависят от геометрии профиля или других тел, угла атаки и от критериев подобия: чисел  $Re$ ,  $M$  и др., а также от взаимодействия исследуемых тел с соседними телами. В динамически подобных системах  $C_y$ ,  $C_x$ ,  $C_m$  и  $K$  одинаковы.

Обычно  $C_y$ ,  $C_x$  и  $C_m$  определяются экспериментально.

Теорема Жуковского о подъемной силе (п. 4.9), постулат Жуковского—Чаплыгина (см. ниже) с использованием метода конформного отображения (см. п. 3.10) позволяют определить величину  $R_y$  и  $C_y$  теоретически.

В течение ряда лет, после получения Н. Е. Жуковским формулы подъемной силы  $R_y = \rho_\infty W_\infty \Gamma$ , ученые и инженеры не могли ее использовать при проектировании крыльев, винтов самолетов и лопаток турбомашин, так как не были известны причины самопроизвольного появления циркуляции скорости  $\Gamma$  (см. п. 3.5) вокруг профиля и методы расчета ее величины. В 1908 г. Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин сформулировали свой знаменитый постулат.

**Постулат Жуковского—Чаплыгина.** При безотрывном обтекании профиля, вокруг него возникает циркуляция скорости  $\Gamma$  такой величины, при которой струи плавно стекают с задней острой кромки с конечной скоростью. Постулат — необходимое дополнение к теореме Жуковского. Он определяет причину возникновения и величину циркуляции скорости вокруг профиля.

Возникновение циркуляции скорости и распределение давлений по профилю. Циркуляция скорости и подъемная сила равны нулю при обтекании симметричного профи-

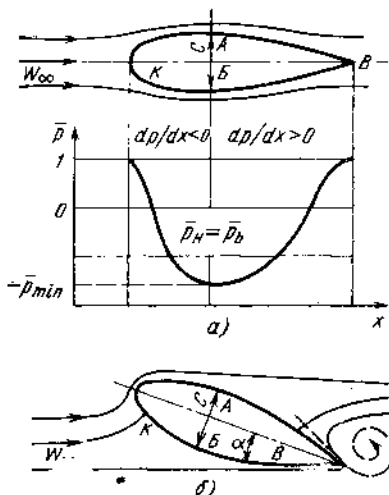


Рис. 18.2. Бесциркуляционное обтекание профиля:

*a*—при нулевом угле атаки; *б*—при угле атаки  $\alpha$

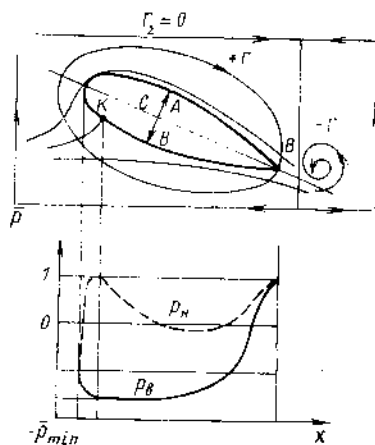


Рис. 18.3. Обтекание профиля с циркуляцией скорости

ля при нулевом угле атаки  $\alpha=0$  (рис. 18.2). В этом случае задняя острая кромка совпадает с задней критической точкой или точкой схода струи. Суммарные силы давления на нижнюю и верхнюю поверхности профиля одинаковы.

При увеличении угла атаки  $\alpha > 0$  передняя критическая точка  $K$  перемещается вниз по профилю к точке  $B$ , а точка схода струй  $B$  — вверх по профилю к точке  $A$  (рис. 18.2, б). Если было бы возможно плавное обтекание жидкостью задней острой кромки, то установилось бы новое бесциркуляционное обтекание профиля —  $\Gamma=0$ ,  $R_y=0$ . Однако, при радиусе закругления острой кромки  $r \rightarrow 0$ , скорость безотрывно обтекающей жидкости должна беспредельно возрастать (см. п. 3.8), так что давление, вычисленное по уравнению Бернулли, должно было бы неограниченно уменьшаться  $p \rightarrow (-\infty)$ , что невозможно. В действительности на верхней поверхности профиля самопроизвольно возникает течение жидкости к задней критической точке, где давление понижено. Это течение возвращает точку схода струй в заднюю острую кромку профиля. При этом поток жидкости срывается с острой кромки в виде *начального или разгонного вихря*, вращающегося против часовой стрелки с циркуляцией  $(-\Gamma)$  и сносится потоком (рис. 18.3).

Так как циркуляция скорости в невозмущенном потоке равна нулю, то по теории Томсона (см. п. 3.5) циркуляция скорости по жидкому контуру, охватывающему профиль и разгонный вихрь, должна остаться равной нулю  $\Gamma_z=0$ , как бы далеко не уносился потоком разгонный вихрь. Но это возможно только в том случае, если при срыве разгонного вихря вокруг профиля установится циркуляция, равная циркуляции разгонного вихря и направленная в об-



ратную сторону. При наложении такой циркуляции на гипотетическое бесциркуляционное течение (см. рис. 18.2, б) получаем реальное безотрывное обтекание профиля, при котором скорости над профилем становятся больше, а под профилем меньше скорости невозмущенного потока. В соответствии с уравнением Бернулли давление под профилем повышается, а над профилем — понижается, что приводит к возникновению подъемной силы.

При дальнейшем увеличении угла атаки или скорости набегающего потока происходит аналогичное явление: с задней острой кромки срывается новый разгонный вихрь, вращающийся в ту же сторону, что и первый, и на величину его циркуляции возрастает циркуляция вокруг профиля, а вместе с ней и  $R_y$  и струи плавно стекают с задней острой кромки.

При уменьшении угла атаки точка схода струй сместится на нижнюю поверхность и с острой кромки сойдет так называемый *остановочный вихрь*, вращающийся в обратную сторону. Это приведет к соответствующему уменьшению циркуляции вокруг профиля или даже к изменению ее знака и к уменьшению подъемной силы или к изменению ее направления. Как показывает опыт, безотрывное циркуляционное обтекание профиля может происходить в определенном диапазоне углов атаки и скоростей. При больших углах атаки безотрывное обтекание переходит в отрывное.

Определение числовой величины циркуляции скорости для заданных профиля и условий обтекания ( $\rho_\infty, W_\infty, \alpha$ ). На основании постулата Жуковского—Чаплыгина определяется точное положение передней и задней критических точек на профиле в физической плоскости  $z$ . Отобразив профиль и течение около него на вспомогательную плоскость  $\zeta$  круга (см. п. 3.10), находим соответствующие критические точки и поток, что и определяет искомую циркуляцию, одинаковую для круга и профиля в обеих плоскостях и определяемую выражением

$$\Gamma = m_u b W_\infty \sin(\alpha - \alpha_0) = m_u b W_\infty^2 \sin \alpha_A, \quad (18.1)$$

где  $m_u$  — коэффициент, приближенное значение которого для произвольного профиля имеет вид

$$m_u = \pi (1 + 0,77\bar{C}) \sqrt{1 + (\bar{f}/2)^2}. \quad (18.2)$$

Подъемная сила для профиля единичной длины, Н/м

$$R_y = \rho W_\infty \Gamma = m_u b \rho W_\infty^2 \sin \alpha_A \quad (18.3)$$

$$\text{и} \quad C_y = \frac{R_y}{\frac{\rho W_\infty^2}{2} b} = 2m_u \sin \alpha_A. \quad (18.4)$$

Для обычно применяемых малых углов атаки  $\sin \alpha_A \approx \alpha_A$  и

$$R_y = m_u b \rho W_\infty^2 \alpha_A;$$

$$C_y = 2m_u \alpha_A.$$

Если задняя кромка закруглена, то для определения циркуляции скорости необходимы дополнительные условия.

**Задача 18.2.** Объясните, почему для обычных самолетов необходимы достаточно длинные взлетно-посадочные полосы.

Подъемная сила плоской пластины при безотрывном дозвуковом обтекании идеальной жидкостью. Полагая в (18.2)  $C=0$  и  $f=0$ , получим

$$C_y = 2\pi\alpha. \quad (18.7)$$

Равнодействующая сил давления на верхнюю и нижнюю поверхности перпендикулярна к пластине. Кроме того, при обтекании переднего торца конечной толщины, давление на него понижается, в результате чего вдоль пластины действует тянущая сила. Подъемная сила является равнодействующей этих сил и по теореме Жуковского перпендикулярна вектору скорости невозмущенного потока.

Если пластина очень тонка, то обтекание передней кромки является отрывным. К отрывному обтеканию теорема Жуковского не применима.

**Задача 18.3.** Обоснуйте форму профиля, приведенного на рис. 18.1: закругление передней и заострение задней кромок, изогнутость  $\bar{f}$  и  $\bar{C} \neq 0$ .

**Задача 18.4.** Человек, массой  $m=80$  кг поддерживается в воздухе при  $\rho=1.2$  кг/м<sup>3</sup> воздушным змеем, который буксируется со скоростью  $W_\infty=100$  км/ч. Определить площадь змея при угле атаки  $\alpha=3^\circ$ , если он выполнен: а) в виде профиля  $\bar{C}=10\%$ ;  $\bar{f}=2\%$ ;  $\alpha_0=3^\circ$ ; б) в виде плоской пластины. Ответ:  $S_a=2.34$  м<sup>2</sup>;  $S_b=5$  м<sup>2</sup>.

## 18.2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТЕЛ С ПОТОКАМИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Возникновение подъемной силы при обтекании тел реальными жидкостями определяется теоремой Жуковского и постулатом Жуковского—Чаплыгина так же, как в уже изученном обтекании тел идеальной жидкостью.

При обтекании тел реальной жидкостью всегда возникает сила лобового сопротивления  $R_x$  — сумма проекций на направление скорости невозмущенного потока сил трения  $R_{x\text{тр}}$  и сил давления  $R_{x\text{д}}$  жидкости, действующих на поверхность тела. Направление силы лобового сопротивления совпадает с направлением скорости невозмущенного потока, т. е. противоположно направлению движения тела. Полная аэродинамическая сила  $R$  равна векторной сумме подъемной силы и силы лобового сопротивления  $\vec{R} = \vec{R}_y + \vec{R}_x$ .

Силы лобового сопротивления крыла или лопатки турбомшины состоит из сопротивлений профильного  $R_{xp}$ , волнового  $R_{xb}$  и индуктивного  $R_{xi}$

$$\left. \begin{aligned} R_x &= R_{xp} + R_{xb} + R_{xi}, \\ C_x &= C_{xp} + C_{xb} + C_{xi}. \end{aligned} \right\} \quad (18.8)$$

т. е.

Профильное сопротивление это сопротивление бесконечно тонкого крыла при обтекании его с дозвуковой скоро-

стью. Оно складывается из сопротивлений трения и давления

$$C_{xP} = C_{x\text{тр}} + C_{xд} \quad (18.9)$$

Возникновение этих составляющих обусловлено существованием пограничного слоя на поверхности тел при обтекании их вязкой жидкостью. Причины появления силы трения и методика расчета ее величины были изучены в гл. 15. Сила лобового сопротивления давления  $R_{xд}$  возникает вследствие взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком. Для простоты, рассмотрим обтекание симметричного профиля при нулевом угле атаки. При обтекании его идеальной жидкостью сила сопротивления давления, действующая на переднюю часть профиля  $R_{xдп}$ , полностью уравновешивается силами давления тяги, действующими на кормовую часть профиля  $R_{xдк}$  и сопротивление давления равно нулю.

Для того, чтобы найти распределение давления по поверхности профиля, обтекаемого реальной жидкостью, следует рассмотреть обтекание идеальной жидкостью профиля, все сечения которого увеличены на две толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta^* = \delta^*(x)$  [см. п. 15.1]. В этом случае распределение давления на переднюю часть профиля практически не изменится из-за малого значения  $\delta$  и  $\delta^*$  на этом начальном участке конфузурного течения. В кормовой диффузорной области течения  $\delta$  и  $\delta^*$  увеличиваются существенно, поперечные сечения каналов между линиями тока и статическое давление увеличиваются в меньшей степени, чем в идеальном случае. Это приводит к уменьшению силы давления на кормовую часть профиля и к возникновению силы лобового сопротивления давления  $R_{xд} = R_{xдп} - R_{xдк} > 0$ .

Задача 18.5. Нарисуйте схемы распределения статического давления по профилю при обтекании его идеальной и реальной жидкостью и докажите, что в первом случае  $R_{xд} = 0$ , а во втором —  $R_{xд} > 0$ .

Для определения силы  $R_x$  лобового сопротивления тела применим теорему количества движения к контрольному объему жидкости (см. п. 4.1), включающему обтекаемое тело (рис. 18.4)\*. При-

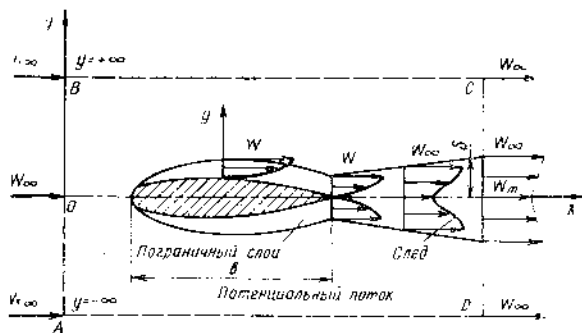


Рис. 18.4. Лобовое сопротивление профиля  $C_x$

\* Формула подъемной силы  $R_y = \rho_\infty W_\infty \Gamma$  также может быть получена из теоремы количества движения.

менение теоремы количества движения основано на том, что тело действует на жидкость с силой, равной силе лобового сопротивления, но противоположно ей по направлению, что вызывает соответствующее этой силе уменьшение количества движения жидкости. Это проявляется в существовании за обтекаемым телом *аэродинамического следа*, т. е. *спутной струи*. Частицы жидкости, подторможенные в пограничном слое, попадают в этот след и постепенно, обычно турбулентно, смешиваются со сносимым потоком. Границы следа расширяются, а скорость на оси увеличивается, приближаясь в бесконечности к скорости невозмущенного потока (см. гл. 17)\*. Непосредственно за плохообтекаемым телом давление в следе может быть существенно ниже давления в невозмущенном потоке. Однако, оно очень быстро выравнивается, в то время как отличие в скорости остается на больших расстояниях за телом.

Таким образом, все пространство, окружающее обтекаемое тело, можно разделить на три качественно различные области: потенциальный поток, пограничный слой и след, в котором господствуют законы свободных турбулентных струй.

Применив для жидкости в контрольном объеме  $ABCD$  интегральное уравнение количества движения (4.11) и учитывая, что расход жидкости через сечения  $AB$  и  $CD$  одинаков, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\infty} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} p dy - R_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_{\infty} W_{\infty} W - \rho_{\infty} W_{\infty}^2) dy$$

или

$$R_x = \rho_{\infty} W_{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\infty} - W) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\infty} - p) dy. \quad (18.10)$$

Формула (18.10) показывает, что возникновение силы лобового сопротивления объясняется рассеянием механической энергии в потоке вследствие вязкости жидкости, т. е. возрастанием энтропии. Для определения  $C_x$  необходимо знать распределение параметров потока на контрольной поверхности.

**Задача 18.6** Определить  $C_x$  профиля (см. рис. 18.4), если хорда  $b=2$  м;  $\delta=0,2$  м;  $W_{\infty}=100$  м/с;  $W_m=90$  м/с. Принять, что распределение скоростей линейное, а давление на всех границах постоянно  $p=p_{\infty}$ . Ответ:  $C_x=0,02$ .

Хорошо- и плохообтекаемые тела. Тела, обтекаемые без отрыва пограничного слоя называются хорошообтекаемыми; с отрывом — плохообтекаемыми. Обтекаемость тел может характеризоваться соотношением сил сопротивления трения и давления. Обтекаемость тел, так же как величина аэродинамических коэффициентов, зависит от формы тел, угла атаки, чисел Рейнольдса и Маха, взаимодействия с окружающими телами и т. д.

Сопротивление тонких профилей при дозвуковом безотрывном обтекании обусловлено почти исключительно трением. При малых  $Re_x < Re_{x_{кр}}$  и нулевом угле атаки сопротивление тонкого профиля практически равно сопротивлению тонкой пластины при ламинар-

\* Формула поля скоростей (17.2) получена Шлихтингом для дальнего следа.

ном пограничном слое. При увеличении  $Re_x > Re_{x,кр}$  сопротивление увеличивается за счет появления турбулентного пограничного слоя. Скругление передней кромки позволяет избежать отрыв потока при изменении угла

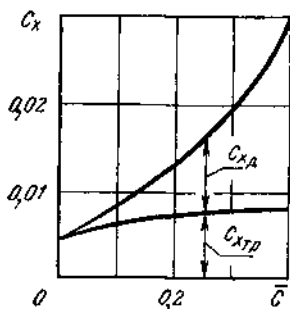


Рис. 18.5. Зависимость сопротивлений трения и давления от относительной толщины профиля (поток дозвуковой)

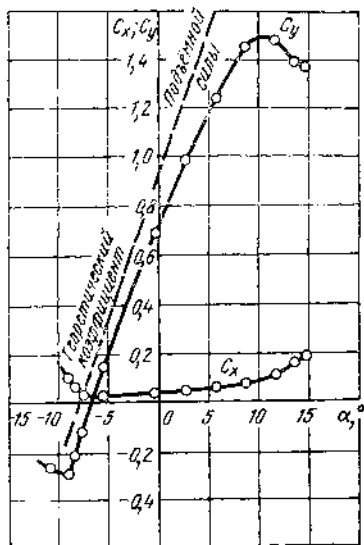


Рис. 18.6. Экспериментальная кривая  $C_y(\alpha)$  для единичного профиля

атаки от нулевого. Заострение задней кромки обеспечивает плавный сход струи с нее в определенном диапазоне углов атаки и получение подъемной силы, а также малые  $dp/dx$  в кормовой части профиля и безотрывное его обтекание.

С увеличением относительной величины  $\bar{c}$  профиля увеличивается диффузорность течения в его кормовой части и сопротивление давления (рис. 18.5).

Зависимость  $C_y$  и  $C_x$  несимметричного профиля от угла атаки  $\alpha$  приведена на рис. 18.6. Для несимметричного профиля угол нулевой подъемной силы отрицателен ( $\alpha_0 = -7^\circ$ ). При  $\alpha < \alpha_0$  подъемная сила направлена вниз  $R_y < 0$ ,  $C_y < 0$ . Вначале  $C_y$  возрастает пропорционально  $\alpha$ , что качественно соответствует теоретической зависимости (18.6), однако измеренные значения  $C_y$  получаются меньше теоретических за счет влияния вязкости. При критическом угле атаки  $\alpha_{кр}$  коэффициент подъемной силы достигает максимума и при дальнейшем увеличении резко падает, а  $C_x$  возрастает. Это объясняется тем, что отрыв пограничного слоя при увеличении  $\alpha$  в области  $\alpha_{кр}$  распространяется на все большую часть верхней поверхности профиля. Это приводит, с одной стороны, к уменьшению давления на кормовую часть, что увеличивает  $C_x$ , и к увеличению давления на среднюю часть верхней поверхности профиля, разрежение над которой имеет наибольшее значение в образовании подъемной силы. Все это происходит за счет уменьшения циркуляции скорости около профиля при отрывном обтекании задней ост-

рой кромки \*. Любой из рассмотренных ранее методов ликвидации отрыва пограничного слоя (см. п. 15.6) может обеспечить увеличение  $\alpha_{кр}$  и  $C_y$ .

Коэффициент лобового сопротивления плохобтекаемых тел. Рассмотрим зависимость  $C_x = f(Re)$  на примере обтекания шара при  $M_\infty = 0$  и постоянной интенсивности турбулентности  $\epsilon_\infty$  невозмущенного потока (см. рис. 5.2).

I. При малых числах  $Re_\infty < 100$  отрыв пограничного слоя отсутствует, картина обтекания шара близка к картине обтекания шара идеальной жидкостью и сила лобового сопротивления является почти исключительно силой сопротивления трения. Резкое снижение  $C_x$  с увеличением  $Re_\infty$  показывает, что в этой области сила сопротивления пропорциональна скорости  $W_\infty$ , что характерно для ламинарного течения.

II. При  $100 < Re_\infty < 2,5 \cdot 10^3$  в кормовой части возникает неустойчивое вихревое движение. Это понижает давление в кормовой части и приводит к увеличению сопротивления давления и замедлению падения  $C_x$  с увеличением  $Re_\infty$ .

III. В области  $2,5 \cdot 10^3 < Re_\infty < 2 \cdot 10^5$  ламинарный пограничный слой отрывается от поверхности шара. Положение точки (линии) отрыва ламинарного пограничного слоя не зависит от  $Re_\infty$  и происходит в одной и той же точке  $S$  при  $\varphi \approx 80^\circ$  при  $dp/dx \times (\delta^*)^2 / \mu_\infty W_\infty = 1,92$  (см. п. 15.6), т. е. при  $dp/dx > 0$ . Это указывает на то, что при обтекании шара вязкой жидкостью, точка минимального давления  $M$  располагается, вследствие воздействия пограничного слоя на поток, при  $\varphi \approx 70^\circ$ , а не при  $90^\circ$ , как в случае идеальной жидкости. Ламинарный пограничный слой, оторвавшийся от поверхности, продолжает на некотором расстоянии  $s-T$  течь в виде ламинарной струйки. Образовавшаяся поверхность тангенциального разрыва скорости неустойчива, поэтому в сечении  $T$  возникает интенсивная струйная турбулентность. В результате интенсивного турбулентного обмена жидкость подсасывается оторвавшимся (активным) потоком из кормовой области, где давление понижается до величины  $\bar{p} = (p - p_\infty) / (\rho_\infty W_\infty / 2) \approx -0,4$  аналогично тому, как это происходит при поперечном обтекании цилиндра, где  $\bar{p} \approx -1,2$  (см. рис. 4.13). На расстоянии одного-двух диаметров шара давление в среде сравнивается с давлением в окружающей среде  $\bar{p} = 0$  и из этой области возникает встречный завихренный поток к кормовой поверхности шара — *зона обратных токов*.

Пониженное давление на кормовую часть плохобтекаемого тела называется *донным давлением*. Разность сил давления на лобовую и кормовую поверхности и представляет силу лобового сопротивления давления, которая доминирует в этой области чисел  $Re$ . Здесь положение точки отрыва ламинарного пограничного слоя не изменяется и коэффициент лобового сопротивления сохраняет пос-

---

\* При отрывном обтекании острой кромки скорость вязкой жидкости имеет конечную величину, так как эта кромка оказывается «скругленной» вихрем, образующимся из заторможенных в пограничном слое частиц.

тоянное значение для шара  $C_x = 0,45 \dots 0,47$  (для цилиндра  $C_x \approx 1,3$ ) и сила лобового сопротивления  $R_x \sim W_\infty^2$ . Область III называется областью *локальной автомодельности по числу Рейнольдса*. В этой области происходит перестройка структуры обтекания. При увеличении числа Рейнольдса  $Re_\infty$  увеличивается интенсивность турбулентности в области обратных токов и точка  $T$  перехода ламинарного течения в турбулентное приближается к точке  $S$  отрыва ламинарного пограничного слоя.

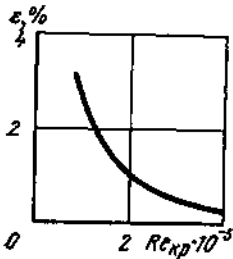


Рис. 18.7. Степень турбулентности в зависимости от критического числа Рейнольдса

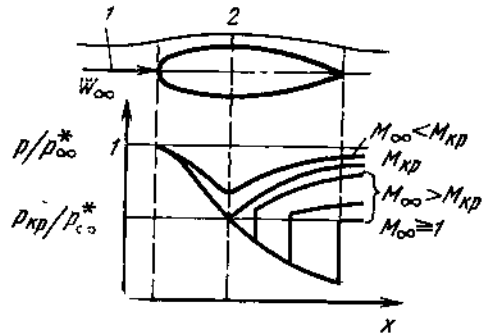


Рис. 18.8. Волновой кризис

IV. При  $Re_\infty \approx 3,2 \cdot 10^5$  наблюдается кризис сопротивления, при котором  $C_x$  уменьшается в 3 ... 5 раз при незначительном увеличении числа Рейнольдса. Это интересное явление объясняется тем, что при  $Re_{\infty \text{ кр}}$  точка перехода  $T$  совпадает с точкой отрыва  $S$  ламинарного пограничного слоя, т. е. ламинарный пограничный слой турбулизуется перед его отрывом. Турбулентный пограничный слой обладает большей сопротивляемостью отрыву. Поэтому точка отрыва, теперь уже турбулентного пограничного слоя, резко, кризисным образом, перемещается по потоку и устанавливается при угле  $\varphi = 120 \dots 140^\circ$  в области большего  $dp/dx > 0$ . Обтекание шара улучшается, кормовая поверхность шара, на которую действует пониженное давление, уменьшается и  $C_x$  уменьшается за счет уменьшения сопротивления давления (сопротивление трения увеличивается за счет появления турбулентного пограничного слоя). При  $Re_\infty > Re_{\infty \text{ кр}}$  снова наступает зона автомодельности по числу  $Re_\infty$ , что соответствует постоянному положению линии отрыва турбулентного пограничного слоя.

В области  $2,5 \cdot 10^3 < Re_\infty < 2 \cdot 10^5$  можно снизить  $C_x$  с 0,47 до 0,1, если искусственно турбулизовать ламинарный пограничный слой, например, установив перед точкой отрыва  $S$  на поверхности шара турбулизующее колечко из тонкой проволоки.

Измерение интенсивности турбулентности в потоках методом шара. Положение точки  $T$  перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный зависит от степени тур-

булентности  $\epsilon_\infty$  набегающего потока и шероховатости поверхности шара. Зависимость  $Re_{\infty \text{кр}} = f(\epsilon_\infty)$  при гидравлически гладком шаре представлена на рис. 18.7. Эта строго выполняющаяся зависимость используется для определения степени турбулентности потока по измерению  $C_x$  шара. При этом, за  $Re_{\infty \text{кр}}$  принимают значение числа  $Re_\infty$ , при котором  $C_{x \text{кр}} = 0,3$ .

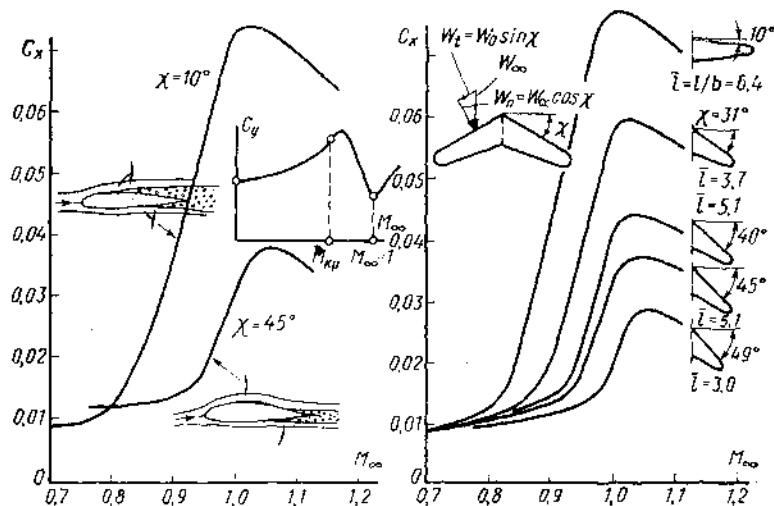


Рис. 18.9. Схема обтекания крылового профиля при околосвуковых скоростях и зависимость  $C_x$  и  $C_y$  от числа  $M_\infty$

Плохообтекаемые тела широко используются в качестве парашютов, тормозных щитков самолетов, стабилизаторов пламени в форсажных камерах сгорания ТРД и в различного рода турбулизаторах потоков.

Влияние сжимаемости газа или числа  $M_\infty$  на величину  $C_y$  и  $C_x$ . Волновое сопротивление. Рассмотрим течение идеального газа при  $p_\infty = \text{const}$  между верхней поверхностью профиля и отвердевшей поверхностью тока (рис. 18.8). Увеличение числа  $M_\infty$  в этом случае соответствует увеличению пол-

ного давления невозмущенного потока  $p_\infty^* = p_\infty \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$ .

При увеличении  $M_\infty$  от 0 до 0,3 сжимаемость газа практически не проявляется, скорость в любых сечениях струйки, например 1 и 2, изменяется в одинаковой степени, коэффициент давления  $p_2 = \frac{p_2 - p_\infty}{\frac{\rho_\infty W_\infty^2}{2}} = \frac{W_\infty^2 - W_2^2}{W_\infty^2} = \left(1 - \frac{S_2^2}{S_\infty^2}\right)$ , т. е. остается постоянным и  $C_x$  и  $C_y^2$  сохраняют неизменное значение (рис. 18.9).

При  $0,3 < M_\infty < M_{\text{кр}}$  сжимаемость жидкости проявляется в том, что максимальная скорость течения, например в минимальном се-



чении 2 увеличивается в большее число раз, чем увеличивается  $W_\infty$ . Это объясняется уменьшением плотности при ускорении газа. Такое увеличение скорости вызывает соответственное уменьшение давления  $p_2/p_\infty^*$  и увеличение  $C_y$ .

Теоретические расчеты и опыты показывают, что  $C_y$  профиля в области  $0,3 < M_\infty < M_{кр}$  следует рассчитывать по формуле\*

$$C_y = C_{yH} / \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad (18.11)$$

где  $C_{yH}$  — коэффициент подъемной силы данного профиля при заданном угле атаки в потоке несжимаемой жидкости ( $M_\infty < 0,3$ ).

При кризисе  $M_\infty = M_{кр} < 1$  скорость в минимальном сечении 2 достигает скорости звука, а давление — критического минимального значения  $\frac{p_{2кр}}{p_\infty^*} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \pi(1)$ . При дальнейшем увеличении

$M_\infty > M_{кр}$  отношение  $p_{2кр}/p_\infty^*$  не изменяется, поэтому  $p_{2кр} = p_\infty^* \pi(1)$  увеличивается и  $C_y$  уменьшается.

Коэффициент лобового сопротивления  $C_x$  профиля в области  $0,3 < M_\infty < M_{кр}$  сохраняет неизменное значение вследствие сохранения неизменной картины течения и картины распределения давления по профилю (при обтекании профиля идеальным газом  $C_x = 0$ ).

Область обтекания профиля  $M_{кр} < M_\infty < 1$  качественно отличается от области  $M_\infty \leq M_{кр}$ . При  $M_\infty > M_{кр}$ , за минимальным сечением 2, поток, становясь сверхзвуковым, продолжает ускоряться в расширяющемся канале, а давление — падать. Сверхзвуковая область замыкается скачком уплотнения. Связанное с этим понижение статического давления на кормовую часть профиля (см. п. 15.6) вызывает резкое увеличение лобового сопротивления давления (см. рис. 18.8), которое в связи с причиной возникновения называется *волновым сопротивлением*.

Увеличение  $C_x$  продолжается и при  $M_\infty > 1$  за счет образования перед профилем головной ударной волны.

При дальнейшем увеличении числа  $M_\infty$ , когда угол  $\omega$  полуклина на сверхзвукового профиля становится меньше  $\omega_{max}$  (см. рис. 12.7), отошедшая ударная волна превращается в присоединенные косые скачки уплотнения и  $C_x$  начинает снижаться вместе с уменьшением угла косых скачков и волновых потерь.

При увеличении  $M_\infty > 3 \dots 5$  углы головных косых скачков уплотнения изменяются незначительно (см. рис. 12.7) и  $C_x$  перестает зависеть от числа  $M_\infty$ .

Область  $M_{кр} < M_\infty < 1$  называется *областью волнового кризиса сопротивления* или *звуковым барьером*, так как в ней происходит пяти-, десятикратное увеличение  $C_x$  при незначительном увеличении  $M_\infty$ .

\* Число  $M_\infty = M_{кр} < 1$  называется число  $M$  невозмущенного потока при котором скорость потока в некотором сечении около профиля достигает значения местной скорости звука.

Стреловидное крыло — это крыло, передняя кромка которого образует с поперечной осью самолета угол стреловидности  $\chi$  (см. рис. 18.8, б).

Поток, обтекающий стреловидное крыло, можно представить как сумму двух потоков: 1) тангенциального  $W_t = W_\infty \sin \chi$  текущего вдоль крыла и не влияющего на распределение давления по профилю (если пренебречь влиянием вязкости); 2) нормального к крылу  $W_n = W_\infty \cos \chi$ , определяющего распределение давления по профилю. Следовательно, эффективное число  $M_n$ , определяющее

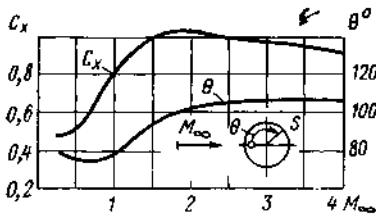


Рис. 18.10. К обтеканию шара

характер обтекания профиля  $M_n = W_n/a_\infty = M_\infty \cos \chi$  тем меньше числа  $M_\infty$ , чем больше угол стреловидности.

Результаты опытов показывают, что увеличение угла стреловидности приводит к увеличению  $M_{кр}$ , существенному снижению максимального значения  $C_x$  и смещению его в область более высоких чисел  $M_\infty$ . Поэтому все современные

сверхзвуковые самолеты имеют стреловидные крылья.

В действительности, тангенциальная составляющая потока взаимодействует с пограничным слоем, снося его вдоль крыла. Это уменьшает положительный эффект стреловидности. Для устранения этого вредного влияния вязкости на поверхности крыла устанавливаются ребра, препятствующие перетеканию пограничного слоя.

Уменьшение удлинения  $\bar{l} = l/b$  крыла приводит к увеличению  $M_{кр}$  и к снижению  $C_x$  (см. рис. 18.8, б) за счет уменьшения разрежения около верхней поверхности крыла. Последнее объясняется усилением эффекта перетекания воздуха (см. ниже) и использованием относительно более тонких профилей.

Звуковой барьер в авиации был преодолен за счет двух технических достижений:

1) замены поршневых авиационных двигателей реактивными, что обеспечило получение потребных тяг при малом весе силовой установки;

2) резкого снижения лобового сопротивления крыла и летательного аппарата за счет улучшения их газодинамических характеристик.

Влияние сжимаемости на обтекание плохообтекаемых тел. В качестве примера рассмотрим обтекание шара. Для шара  $M_{кр} \approx 0,6$  (рис. 18.10). При  $M_\infty < M_{кр}$  сжимаемость газа проявляется в увеличении абсолютных значений  $dp/dx \leq 0$ . Это приводит к стабилизации ламинарного пограничного слоя и затягиванию кризиса сопротивления на большие числа  $Re_{кр}$ , например,  $Re_{кр} \approx 4,57 \cdot 10^5$  при  $M_\infty = 0,5$  вместо  $Re_{кр} = 3,2 \cdot 10^5$  при  $M_\infty = 0$  (см. рис. 5.2).

При  $M_\infty > M_{кр}$  на поверхности шара образуется зона сверхзвуковой скорости, замыкающаяся скачком уплотнения, который, независимо от режима течения в пограничном слое, вызывает его отрыв. В связи с этим, при  $M_{кр} < M_\infty < 1$  кризис сопротивления шара со снижением  $C_x$  (см. рис. 5.2) совсем не возникает ( $C_x$  не зависит от  $Re_\infty$ ).

При увеличении числа  $M_\infty$  в области  $M_{кр} < M_\infty < 1$  наблюдается резкое увеличение сопротивления шара, совпадающее с появлением ударных волн. Точка отрыва пограничного слоя смещается по направлению к передней критической точке (рис. 18.10) и образуется турбулентный след большего диаметра с пониженным давлением на кормовую поверхность шара. При  $M_\infty > 1$  перед шаром устанавливается отошедшая криволинейная ударная волна и  $C_x$  продолжает повышаться и достигает величины  $C_{x\max} \approx 1,05$  при  $M_\infty \approx 1,7$ .

Как показывают эксперименты, точка отрыва пограничного слоя смещается на корму на угол  $\theta \approx 110^\circ$ , зона пониженного давления сокращается и в связи с этим наблюдается незначительное снижение  $C_x$ .

При обтекании затупленного тела сверхзвуковым потоком отошедшая ударная волна ни при каких числах  $M_\infty$  не может трансформироваться в присоединенную, как это имеет место при заостренных телах.

### 18.3. КРЫЛО КОНЕЧНОГО РАЗМАХА. ИНДУКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Пусть крыло конечного размаха  $l$  установлено в потоке идеальной жидкости под положительным углом атаки  $\alpha$  и имеет циркуляцию скорости  $\Gamma$ , направленную по часовой стрелке и положительную подъемную силу (рис. 18.11, а). В этом случае давление жидкости на нижней поверхности крыла больше, чем на верхней  $p_{\text{ниж}} > p_{\text{в}}$ . Концевые эффекты крыла конечного размаха состоят в том, что возникает самопроизвольный поперечный ток жидкости из области большего давления в область меньшего: на нижней поверхности крыла — от оси симметрии к торцам; затем вокруг торцов; на верхней поверхности — от торцов к оси симметрии. Взаимодействие этого тока с невозмущенным потоком приводит к образованию около торцов вихревых шнуров и вихревой пелены за задней кромкой. Вихревые шнуры вызывают отклонение невозмущенного потока вниз, уменьшая действительный угол атаки по сравнению с геометрическим, что и является причиной появления индуктивного сопротивления.

При отрицательном угле атаки изменяются на обратные направления циркуляции скорости, подъемной силы ( $p_{\text{ниж}} < p_{\text{в}}$ ), поперечного тока и направление отклонения потока. Индуктивное сопротивление сохраняется. Только при установке крыла на угол нулевой подъемной силы ( $\Gamma = 0$ ;  $R_y = 0$ ,  $p_{\text{ниж}} = p_{\text{в}}$ ) поперечные токи прекращаются, пропадают вихри и индуктивное сопротивление.

Для того, чтобы определить подъемную силу и индуктивное сопротивление крыла конечного размаха, используют вихревую модель крыла.

Крыло бесконечного размаха воздействует на обтекающий его поток как бесконечный, так называемый *присоединенный вихрь*, имеющий циркуляцию крыла  $\Gamma$  и расположенный вдоль его размаха. В простейшей вихревой схеме крыло конечного размаха заменяется *присоединенным вихрем с постоянной циркуляцией  $\Gamma$* . Вихрь

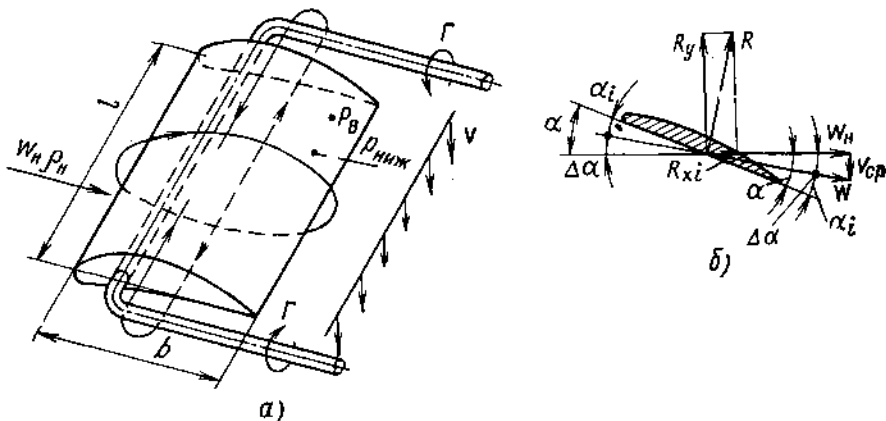


Рис. 18.11. Крыло конечного размаха:

а—простейшая вихревая схема с П-образным вихрем; б—скос потока за крылом конечного размаха

не может окончиться в жидкости (см. п. 3.5), и за торцами крыла подхватывается потоком и вытягивается вдоль линии тока в бесконечность. Эти вихри называются *свободными или вихревыми усами* и имеют циркуляцию скорости  $\Gamma$  такую же, как у присоединенного вихря. В первом приближении принимают, что крыло конечного размаха действует на поток так же, как П-образный вихрь, состоящий из присоединенного вихря и двух свободных вихрей\*.

Свободные вихри индуцируют за крылом вертикальное поле скоростей, направленное вниз, вызывающее отклонение всего потока на угол  $\Delta\alpha$  (рис. 18.11, б).

Средняя скорость скоса потока определяется величинами циркуляции скорости и относительного размаха крыла (см. Юрьев Б. Н. Экспериментальная аэродинамика, ч. II. Оборонгиз, М. 1938.):

$$v_{cp} = 2\Gamma/\pi l = (C_y/\pi l) \cdot W_n, \quad (18.12)$$

\* В действительности циркуляция скорости и подъемная сила изменяются вдоль конечного размаха, достигая максимального значения в области оси симметрии и уменьшаясь до нуля у торцов. Однако принятая схема правильно иллюстрирует физическую картину течения и для прямоугольного в плане крыла обеспечивает получение результатов, удовлетворительно согласующихся с опытом.

где  $\bar{l}=l/b$  — относительный размах или удлинение прямоугольного крыла.

Угол скоса потока

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = v_{\text{ср}}/W_{\text{н}} = C_y/\pi\bar{l}$$

весьма мал, так как  $v_{\text{ср}} \ll W_{\text{н}}$ . Поэтому  $\operatorname{tg} \Delta\alpha \approx \sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$  и  $\cos \Delta\alpha \approx 1$ .

Таким образом приходим к выводу, что крыло конечного размаха обтекается потоком со скоростью  $\vec{W} = \vec{W}_{\text{н}} + \vec{v}_{\text{ср}}$ , равной примерно  $W_{\text{н}}$  и направленной под истинным аэродинамическим углом атаки  $\alpha_i = \alpha - \Delta\alpha$ , где  $\alpha$  — геометрический угол атаки.

В соответствии с теоремой Жуковского на крыло действует сила

$$R = \rho W \Gamma l \approx \rho_{\text{н}} W_{\text{н}} \Gamma l = C_y \frac{\rho_{\text{н}} W_{\text{н}}^2}{2} l b,$$

направленная перпендикулярно вектору скорости  $\vec{W}$ , т. е. отклоненная от направления, перпендикулярного вектору скорости набегающего потока  $\vec{W}_{\text{н}}$ .

Проекция силы  $R$  на ось  $y$  дает подъемную силу крыла конечного размаха

$$R_y = R \cos \Delta\alpha \approx R.$$

Проекция силы  $R$  на направление невозмущенного потока дает силу индуктивного сопротивления

$$R_{x_i} = R \sin \Delta\alpha = R \Delta\alpha = \rho_{\text{н}} W_{\text{н}} \Gamma l \Delta\alpha.$$

Коэффициент индуктивного сопротивления крыла конечного размаха определим с учетом, что  $\Gamma = C_y b W_{\text{н}}/2$

$$C_{x_i} = C_y \Delta\alpha = C_y^2/\pi l. \quad (18.13)$$

Итак, крыло конечного размаха обладает специфическим индуктивным сопротивлением даже при обтекании его идеальной жидкостью.

Коэффициент индуктивного сопротивления пропорционален квадрату коэффициента подъемной силы и обратно пропорционален удлинению крыла. Следовательно индуктивное сопротивление отсутствует либо в случае нулевой подъемной силы ( $C_y=0$ ), либо при бесконечном удлинении крыла ( $\bar{l} \approx \infty$ ).

Индуктивное сопротивление образно называют платой за подъемную силу крыла конечного удлинения, так как для него невозможно получить подъемную силу без индуктивного сопротивления.

При прочих равных условиях крыло большего удлинения имеет и большую подъемную силу и меньшее индуктивное сопротивление. Планеры летают на малых скоростях. Поэтому для них индуктивное сопротивление имеет существенное значение. Для его снижения увеличивают удлинение  $\bar{l} = 20 \dots 30$  вместо  $\bar{l} = 6 \dots 7$  для пассажирских самолетов.

**Задача 18.7.** Придумайте устройство, уменьшающее  $C_{x_i}$  заданного крыла при заданном угле атаки.

## 18.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РЕШЕТОК ПРОФИЛЕЙ. ТЕОРЕМА Н. Е. ЖУКОВСКОГО ДЛЯ РЕШЕТОК

Профилированные лопатки, установленные на вращающихся рабочих колесах лопаточных машин (турбомашин), образуют *рабочие решетки* (рис. 18.12). Кроме них, турбомашинны имеют *неподвижные решетки* — *направляющие, спрямляющие, сопловые*. Жидкость, протекая по межлопаточным каналам решеток, взаимодействует с лопатками, изменяет направление своего движения и параметры. Механическая энергия подводится к рабочему колесу компрессора извне. Лопатки рабочей решетки совершают техническую

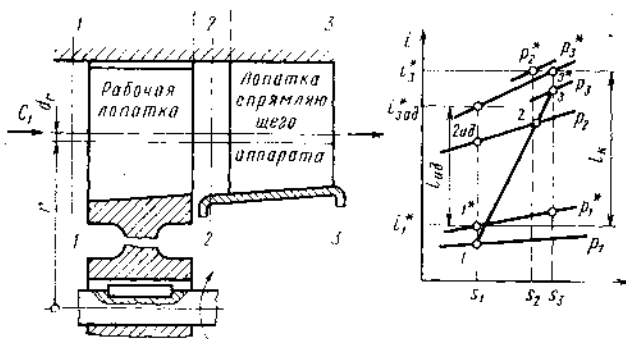


Рис. 18.12. Ступень осевого компрессора

работу над газом ( $i_k = i_3^* - i_1^*$ ), увеличивая его энергию и подавая газ вдоль оси машины (отсюда осевой компрессор) к потребителю. На вращающихся лопатках турбины газ совершает техническую работу, которая передается внешнему потребителю. В неподвижных решетках техническая работа не совершается, а происходит преобразование энергии для получения потока заданных параметров и направления.

Основные задачи исследования турбомашин состоят в определении сил взаимодействия между потоком жидкости и лопатками в заданной решетке, а также в определении формы, размеров, числа лопаток и углов их установки для получения заданной работы при максимальном КПД. Решение этих задач непосредственно на турбомашиннах встречает большие трудности: течение жидкости в рабочих решетках является неустановившемся, лопатки по высоте имеют переменный профиль, а конечная высота лопатки вносит концевые эффекты. Поэтому в основе современных теоретических и экспериментальных исследований течений в турбомашиннах лежит метод исследования течений в *плоских бесконечных решетках эквивалентных профилей*, предложенный Н. Е. Жуковским в 1889 г.

Для получения плоской решетки рассечем кольцевую решетку двумя соосными цилиндрическими сечениями с радиусами  $r$  и  $r + dr$  (см. рис. 18.12). Развернем на плоскость полученную кольцевую решетку и увеличим количество и высоту лопаток беспредель-

но. Получим неподвижную плоскую решетку профилей (рис. 18.13).

Введем следующие определения: *фронт решетки*  $u$  — линия, соединяющая соответственные точки профилей (положительное направление от корытца к спинке профиля); *ось решетки*  $a$  — нормаль к фронту (положительное направление совпадает с направлением движения жидкости); шаг решетки  $t$  — расстояние между соответственными точками соседних профилей; *относительный шаг*  $\bar{t} = t/b$ ; *густота решетки*  $\tau = b/t$ ; *установочный угол профиля*  $\vartheta$  — угол между хордой профиля  $b$  и фронтом; *угол входа*  $\beta_1$  — угол между вектором скорости  $\vec{W}_1$  на входе в решетку и фронтом; *угол выхода*  $\beta_2$  — угол между вектором скорости  $\vec{W}_2$  на выходе из решетки и фронтом; *угол поворота потока в решетке*  $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ .

Плоская решетка однозначно определяется формой профиля и величинами хорды  $b$ , шага  $t$  и установочного угла  $\vartheta$ .

Классификация решеток весьма обширна: 1) по направлению движения жидкости относительно оси вращения машины — осевые, радиальные, осерадиальные, диагональные; 2) по числам  $M$  на входе в решетку — дозвуковые ( $M_1 < M_{кр}$ ), околозвуковые ( $M_{кр} \leq M_1 < 1,0$ ), сверхзвуковые ( $M_1 > 1$ ); 3) по изменению параметров потока — диффузорные или компрессорные [ $W_2 < W_1$ ;  $\rho_2 > \rho_1$ ;  $(\pi - \beta_1) > \beta_2 > \beta_1$ ], активные или турбинные ( $W_2 = W_1$ ;  $\rho_2 = \rho_1$ ;  $\beta_2 = \pi - \beta_1$ ), конфузорные или турбинные ( $W_2 > W_1$ ;  $\rho_2 < \rho_1$ ;  $\beta_2 > \beta_1$  или  $\beta_2 > \pi - \beta_1$ ).

**Задача 18.8.** Изобразите схемы плоских дозвуковых диффузорной, активной и конфузорной решеток.

Силы, действующие на профиль в решетке. Теорема Н. Е. Жуковского для решетки. Представим равнодействующую  $R$  всех поверхностных сил, действующих на профиль в решетке, как сумму окружного  $R_u$  и осевого  $R_a$  усилий (см. рис. 18.13)

$$\vec{R} = \vec{R}_u + \vec{R}_a; \quad R = \sqrt{R_u^2 + R_a^2}. \quad (18.14)$$

Выделим контрольный объем  $a_1 b_1 b_2 a_2$  единичной высоты, включающий один из профилей. Участки контрольной поверхности  $a_1 b_1$

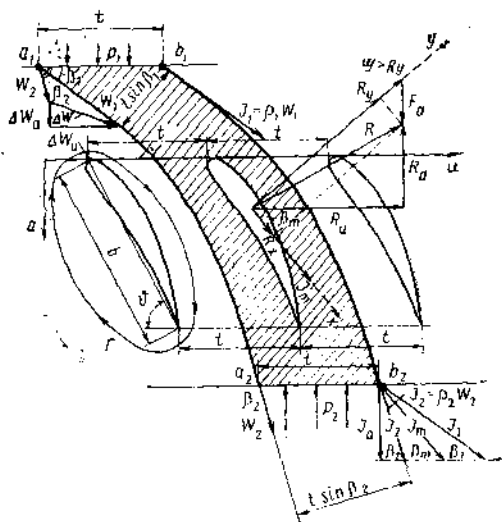


Рис. 18.13. Силы, действующие на профиль в диффузорной решетке при обтекании сжимаемой вязкой жидкостью

и  $a_2b_2$  расположим параллельно фронту решетки на таких расстояниях от нее, где параметры потока распределены равномерно. Поверхности  $a_1a_2$  и  $b_1b_2$  проведем на расстоянии шага друг от друга по конгруэнтным линиям тока, совпадающим при совмещении. Поэтому силы действия внешней среды на поверхности  $a_1a_2$  и  $b_1b_2$  равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, т. е. уравниваются.

**Закрутка потока в решетке.** При диффузорной решетке  $W_1 > W_2$  и из треугольника скоростей (см. рис. 18.13) имеем

$$\left. \begin{aligned} \vec{W}_1 &= \vec{W}_2 + \Delta\vec{W}, \quad \Delta\vec{W} = \vec{W}_1 - \vec{W}_2; \quad W_{1a} = W_1 \sin \beta_1, \quad W_{1u} = W_1 \cos \beta_1; \\ W_1^2 &= W_{1u}^2 + W_{1a}^2, \quad W_2^2 = W_{2u}^2 + W_{2a}^2; \\ \Delta W_a &= W_{1a} - W_{2a}, \quad \Delta W_u = W_{1u} - W_{2u}, \end{aligned} \right\} (18.15)$$

где  $\Delta W_u$  — закрутка потока в решетке, т. е. разность окружных составляющих скоростей на входе в решетку и на выходе из нее;  $\Delta W_a$  — разность осевых составляющих скоростей.

Циркуляция скорости по замкнутому контуру  $a_1b_1$ ,  $b_2a_2$  равна сумме циркуляций по его отдельным участкам. Учитывая, что  $\Gamma_{b_1b_2} = \Gamma_{a_2a_1}$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_{a_1b_1} + \Gamma_{b_2a_2} + \Gamma_{b_2a_2} + \Gamma_{a_2a_1} = \Gamma_{a_1b_1} + \Gamma_{b_2a_2} = tW_1 \cos \beta_1 - \\ &\quad - tW_2 \cos \beta_2 \text{ и } \Gamma = t\Delta W_u. \end{aligned} \right\} (18.16)$$

Среднегеометрическая плотность тока  $\vec{J}_m$  (см. рис. 18.13) определяется по формуле

$$\vec{J}_m = \frac{\vec{J}_1 + \vec{J}_2}{2}, \quad (18.17)$$

где  $q_m$ ,  $\vec{W}_m$  — плотность и скорость жидкости, соответствующие средней геометрической плотности тока;  $\vec{J}_1 = q_1 \vec{W}_1$ , и  $\vec{J}_2 = q_2 \vec{W}_2$  — плотности тока в сечениях  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$ .

Уравнение неразрывности для сечений  $a_1b_1$ ,  $m$  и  $a_2b_2$ :  $G = tq_1 W_1 \sin \beta_1 = tq_2 W_2 \sin \beta_2 = tq_m W_m \sin \beta_m$ . или с учетом (18.15)

$$q_1 W_{1a} = q_2 W_{2a} = q_m W_{ma}; \text{ т. е. } J_{1a} = J_{2a} = J_{ma} = J_a; \quad (18.18)$$

Из определения и из рис. 18.13 следует, что

$$J_{mu} = \frac{J_{1u} + J_{2u}}{2}. \quad (18.19)$$

Для определения окружной  $R_u$  и радиальной  $R_a$  составляющих равнодействующей составим уравнение количества движения для контрольного объема  $a_1b_1b_2a_2$  в проекциях на фронт и ось решетки, изменив знак сил на обратный (определяется сила действия жидкости на тело), Н/м:

$$R_u = -G(W_{2u} - W_{1u}) = J_{ma}\Gamma; \quad (18.20)$$

$$\left. \begin{aligned} R_a - p_1 t + p_2 t &= -G(W_{2a} - W_{1a}); \\ R_a &= t(p_1 - p_2) + G(W_{1a} - W_{2a}) = t\Delta p + tJ_{ma}\Delta W_a. \end{aligned} \right\} (18.21)$$



Окружное усилие  $R_u$ , действующее на профиль в решетке, равно произведению секундного расхода жидкости на закрутку потока в решетке или произведению осевой плотности тока на циркуляцию скорости по контуру  $a_1 b_1 b_2 a_2$ .

Осевое усилие  $R_a$  в диффузорной решетке отрицательно, т. е. действует противоположно направлению потока, т. е.  $|t(p_1 - p_2)| > |\mathcal{G}(W_{1a} - W_{2a})|$ . В рабочем колесе компрессора суммарное окружное усилие  $R_u$  определяет крутящий момент, работу компрессора и закрутку потока, а осевое усилие — подачу газа вдоль оси машины. Осевое усилие воспринимается упорным подшипником компрессора.

Сила Жуковского и дополнительная осевая сила. Представим равнодействующую  $R$  как сумму силы Жуковского  $\mathcal{G}$  и дополнительной осевой силы  $F_a$  (см. рис. 18.13).

$$\vec{R} = \vec{\mathcal{G}} + \vec{F}_a, \quad (18.22)$$

так, чтобы сила Жуковского была перпендикулярна вектору средней геометрической плотности тока  $J_m$  и  $\mathcal{G} \cos \gamma = \mathcal{G}_u = R_u$ ,  $\mathcal{G} \sin \gamma = \mathcal{G}_a = -F_a + R_a$ .

Условие перпендикулярности  $\vec{\mathcal{G}}$  и  $\vec{J}_m$  (см. рис. 18.13) дает

$$\operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \beta_m = -1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{J_{ma}}{J_{mu}} \frac{\mathcal{G}_a}{\mathcal{G}_u} = -1$$

и

$$\mathcal{G}_a = -\mathcal{G} \frac{J_{mu}}{J_{ma}} = -R_u \frac{J_{mu}}{J_{ma}} = -J_{mu} \Gamma; \quad (18.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \sqrt{\mathcal{G}_u^2 + \mathcal{G}_a^2} = \sqrt{R_u^2 + J_{mu}^2 \Gamma^2} = \sqrt{J_{ma}^2 \Gamma^2 + J_{mu}^2 \Gamma^2} = \\ &= J_m \Gamma = Q_m W_m \Gamma. \end{aligned} \quad (18.24)$$

Дополнительную осевую силу определим в соответствии с рис. 18.13 и формулами (18.23) и (18.21)

$$F_a = -\mathcal{G}_a + R_a = J_{mu} \Gamma + t \Delta p + t J_{ma} \Delta W_a. \quad (18.25)$$

Теорема Н. Е. Жуковского (1912 г.). При обтекании прямолинейной плоской решетки сжимаемой вязкой жидкостью на профиль действует сила Жуковского  $\mathcal{G}$ , нормальная к вектору средней геометрической плотности тока и равная произведению средней геометрической плотности тока на циркуляцию скорости по контуру  $a_1 b_1 b_2 a_2$  и дополнительная осевая сила  $F_a$ . Для определения направления силы Жуковского следует повернуть вектор средней геометрической плотности тока на  $90^\circ$  в сторону, противоположную направлению циркуляции скорости.

Подъемная сила  $R_y$  и сила лобового сопротивления  $R_x$  профиля в решетке представляют проекции равнодействующей на направление силы Жуковского и средней геометрической плотности тока, соответственно

$$R_y = \mathcal{G} - F_a \cos \beta_m; \quad (18.26)$$

$$R_x = F_a \sin \beta_m. \quad (18.27)$$

Обтекание решетки несжимаемой вязкой жидкостью  $q_1 = q_2 = q_m = q$ . В соответствии с (18.18) заключаем, что

$$W_{1a} = W_{2a} = W_{ma}, \quad \Delta W_a = W_{1a} - W_{2a} = 0; \quad (18.28)$$

$$F_a = t\Delta p + J_{mu}\Gamma. \quad (18.29)$$

В этом случае  $\vec{W}_m = \frac{\vec{W}_1 + \vec{W}_2}{2}$ ;

$$W_{mu} = \frac{W_{1u} + W_{2u}}{2}. \quad (18.30)$$

Составим уравнение Бернулли для участка потока между сечениями  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$

$$p_1 + \frac{qW_1^2}{2} = p_2 + \frac{qW_2^2}{2} + ql_{\text{тр}}, \quad (18.31)$$

где  $ql_{\text{тр}} = p_1^* - p_2^*$  — гидравлические потери в решетке. Выразим из (18.31) величину  $\Delta p$  с учетом (18.15), (18.16), (18.17) и (18.28)

$$\Delta p = p_1 - p_2 = ql_{\text{тр}} - q \left( \frac{W_1^2 - W_2^2}{2} \right) = ql_{\text{тр}} - \frac{J_{mu}}{t} \Gamma. \quad (18.32)$$

Подставляя это значение  $\Delta p$  в (18.29) получим

$$F_a = tq l_{\text{тр}}. \quad (18.33)$$

Подставляя значение  $F_a$  из (18.33) в (18.26) и (18.27), найдем

$$R_y = \mathcal{G} - F_a \cos \beta_m = qW_m \Gamma - tq l_{\text{тр}} \cos \beta_m; \quad (18.34)$$

$$R_x = F_a \sin \beta_m = tq l_{\text{тр}} \sin \beta_m. \quad (18.35)$$

При обтекании решетки несжимаемой вязкой жидкостью дополнительная осевая сила  $F_a$  и сила лобового сопротивления профиля  $R_x$  обусловлены только гидравлическими потерями. Подъемная сила уменьшается за счет гидравлических сопротивлений.

Обтекание решетки несжимаемой идеальной жидкостью  $q = \text{const}$ ,  $\mu = 0$ ,  $l_{\text{тр}} = 0$ . В этом случае  $F_a = 0$ ,  $R_x = 0$  (парадокс Даламбера—Эйлера) и полная аэродинамическая сила совпадает с силой Жуковского и с подъемной силой, Н/м:

$$R = \mathcal{G} = R_y = J_m \Gamma = qW_m \Gamma, \quad (18.36)$$

где  $\Gamma$  — циркуляция скорости по *любому контуру, охватывающему профиль*.

**Теорема Н. Е. Жуковского.** При обтекании прямолинейной плоской решетки несжимаемой идеальной жидкостью на профиль действует только сила Жуковского (подъемная сила), направленная по нормали к вектору средней геометрической скорости. Для определения направления силы Жуковского следует вектор средней геометрической скорости повернуть на  $90^\circ$  в сторону, противоположную направлению циркуляции скорости.

Обтекание решетки идеальной сжимаемой жидкостью. Исследования показывают, что в этом случае рав-

нодействующая сила не перпендикулярна вектору средней геометрической плотности тока и, следовательно,  $R \neq \mathcal{G} \neq R_y$ ,  $F_a \neq 0$  и  $R_x \neq 0$ . Однако, для не очень больших дозвуковых скоростей эти отклонения не велики и обычно полагают

$$R_x = 0; R \approx \mathcal{G} \approx R_y. \quad (18.37)$$

Теорема Жуковского имеет огромное теоретическое и практическое значение. Она указала конструкторам от чего зависит подъемная сила профиля в решетке и способы ее увеличения. Для увеличения подъемной силы при заданной средней геометрической плотности тока необходимо увеличивать циркуляцию скорости  $\Gamma = t \Delta W_u$ , т. е. при заданном шаге — закрутку потока  $\Delta W_u = W_{1u} - W_{2u}$ .

В диффузорной решетке увеличение закрутки ограничено, т. к. требует увеличения диффузорности  $dp/dx > 0$ , что вызывает отрыв пограничного слоя (см. п. 15.6). В активной ( $dp/dx = 0$ ) и конфузорной ( $dp/dx < 0$ ) решетках допустима значительно большая закрутка потока.

Теорема Н. Е. Жуковского о силовом воздействии потенциального потока сжимаемой жидкости на единичный профиль. Устремим шаг решетки к бесконечности  $t \rightarrow \infty$  и таким образом перейдем от обтекания профиля в решетке к обтеканию единичного профиля.

Решетка из бесконечного числа профилей, при конечном шаге, поворачивает весь поток, проходящий через нее и изменяет его параметры.

Единичный профиль вносит в поток лишь местные возмущения и не изменяет заметно направления и параметров всего потока. Поэтому, если сечения  $a_1 b_1$  и  $a_2 b_2$  удалить от профиля на достаточное расстояние, то можно записать  $q_2 = q_1$  и  $W_2 = W_1 = W_m$  и  $F_a = R_x = 0$ . Подъемную силу единичного профиля, равную силе Жуковского, получим из (18.36), Н/м:

$$R_y = \mathcal{G} = q_1 W_1 \Gamma. \quad (18.38)$$

Итак, используя уравнение количества движения, мы получим формулу для расчета подъемной силы, аналогичную (4.68), полученную ранее на основе кинематического анализа течения (см. п. 4.9).

**Задача 18.9.** Сопоставьте дозвуковую диффузорную (18.13) и конфузорную (рис. 18.14) решетки, изменение параметров потока в них и действующие силы.

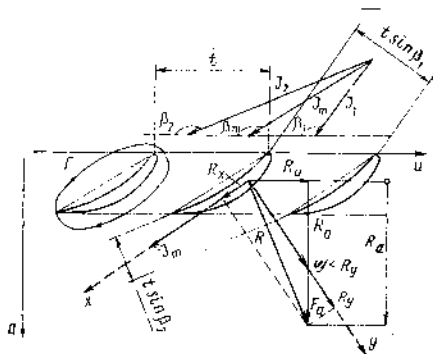
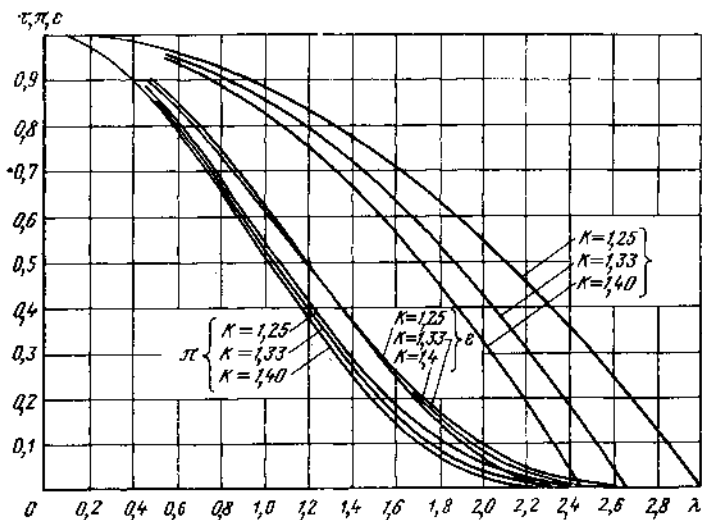


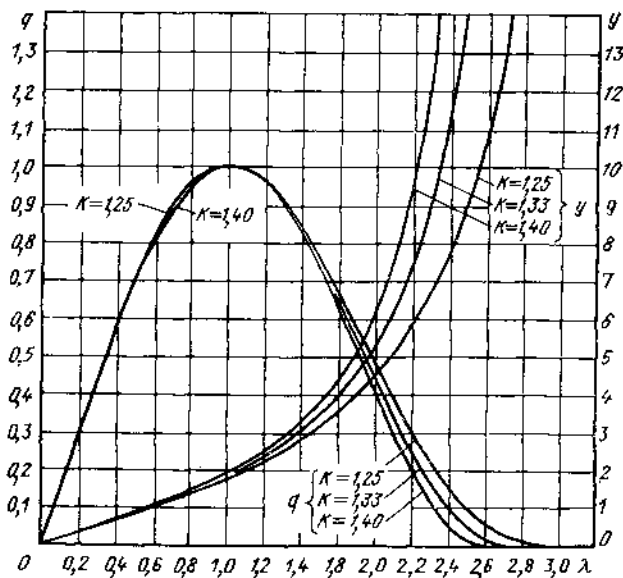
Рис. 18.14. Силы, действующие на профиль в конфузорной решетке при обтекании сжимаемой вязкой жидкостью

## Международная стандартная атмосфера (МСА)

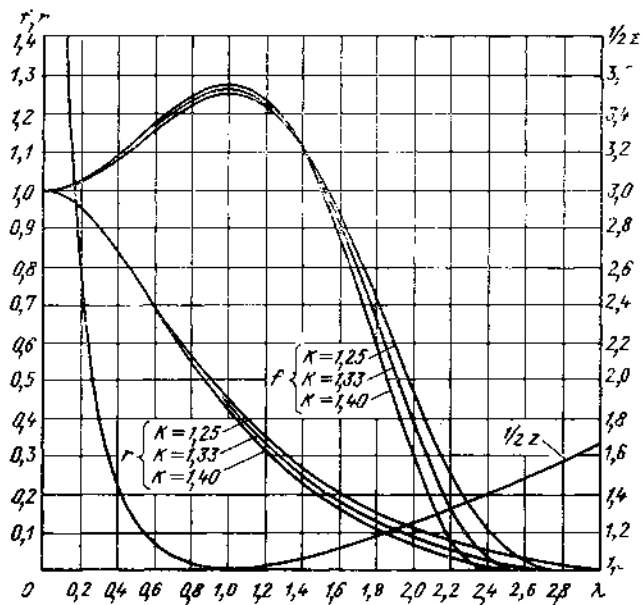
Высота от уровня океана Н, км	Температура T, К	Давление p, Па	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Вязкость $\nu \cdot 10^3$ , Нс/м <sup>2</sup>	Длина свободного пробега молекул $\lambda$ , м
0	288,2	101 330	1,225	1,79	$6,9 \cdot 10^{-8}$
1	281,7	89 880	1,11	1,76	
2	275,1	79 490	1,01	1,73	
3	268,6	70 130	$9,09 \cdot 10^{-1}$	1,69	
4	262,1	61 660	$8,19 \cdot 10^{-1}$	1,66	
5	255,6	54 050	$7,37 \cdot 10^{-1}$	1,63	
6	249,1	47 210	$6,60 \cdot 10^{-1}$	1,60	
7	242,6	41 090	$5,90 \cdot 10^{-1}$	1,56	
8	236,1	35 650	$5,26 \cdot 10^{-1}$	1,53	
9	229,6	30 790	$4,67 \cdot 10^{-1}$	1,49	
10	223,2	26 490	$4,14 \cdot 10^{-1}$	1,46	$2,1 \cdot 10^{-7}$
11	216,7	22 690	$3,65 \cdot 10^{-1}$	1,42	
15	216,7	12 110	$1,95 \cdot 10^{-1}$	1,42	
20	216,7	5 530	$8,89 \cdot 10^{-2}$	1,42	$9,7 \cdot 10^{-7}$
25	216,7	2 530	$4,06 \cdot 10^{-2}$	1,42	$2,2 \cdot 10^{-6}$
30	230,4	1 200	$1,79 \cdot 10^{-2}$	1,49	$4,8 \cdot 10^{-6}$
35	244,9	500,2	$6,76 \cdot 10^{-3}$	1,89	
40	257,7	296	$4,00 \cdot 10^{-3}$	1,57	$2,2 \cdot 10^{-5}$
50	274,0	84,6	$1,08 \cdot 10^{-3}$	1,72	$7,8 \cdot 10^{-5}$
60	253,4	44,1	$3,32 \cdot 10^{-4}$	1,62	$2,6 \cdot 10^{-4}$
70	219,2	5,8	$9,27 \cdot 10^{-5}$	1,44	$9,3 \cdot 10^{-4}$
80	185,0	1,11	$2,09 \cdot 10^{-5}$	1,24	$4,3 \cdot 10^{-3}$
90	185,0	0,18	$3,47 \cdot 10^{-6}$	1,24	$2,1 \cdot 10^{-2}$
100	209,2	0,03	$5,39 \cdot 10^{-7}$	1,39	$9,5 \cdot 10^{-2}$
120	446,2	$3,01 \cdot 10^{-3}$	$2,33 \cdot 10^{-8}$		1,3
200	1536,4	$2,00 \cdot 10^{-4}$	$4,43 \cdot 10^{-10}$		300,0



Приложение II. Газодинамические функции  $\tau(\lambda)$ ;  $\pi(\lambda)$ ;  $\epsilon(\lambda)$



Приложение III. Газодинамические функции  $q(\lambda)$ ;  $y(\lambda)$



Приложение IV. Газодинамические функции  $1/2 z(\lambda)$ ;  $f(\lambda)$ ;  $r(\lambda)$

Таблица газодинамических функций ( $\kappa=1,4$ )

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\nu$	$\rho$	$u$	$f$	$g$	$M$	$z$
0	1,000	1,0000	1,0000	0,000	0,000	1,000	1,000	1,000	$\infty$
0,05	0,9996	0,9986	0,9990	0,0788	0,0789	1,0015	0,9971	0,0457	20,0500
0,10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,1580	1,0038	1,9885	0,0914	10,1000
0,15	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	0,2375	1,0129	0,9744	0,1372	6,8167
0,20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,3176	1,0227	0,9551	0,1830	5,2000
0,25	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,3985	1,0350	0,9314	0,2290	4,2500
0,30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,4804	1,0496	0,9037	0,2760	3,6336
0,35	0,9796	0,9303	0,9497	0,5243	0,5636	1,0661	0,8727	0,3228	3,2071
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,6482	1,0842	0,8391	0,3701	2,9000
0,45	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,7346	1,1036	0,8035	0,4179	2,6722
0,50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,8230	1,1239	0,7666	0,4663	2,5000
0,55	0,9496	0,8344	0,8787	0,7623	0,9136	1,1445	0,7290	0,5152	2,3682
0,60	0,9400	0,8053	0,8567	0,8169	1,0069	1,1651	0,6912	0,5649	2,2667
0,65	0,9296	0,7745	0,8332	0,8543	1,1030	1,1852	0,6535	0,6154	2,1885
0,70	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	1,2024	0,2042	0,6163	0,6668	2,1286
0,75	0,9063	0,7086	0,7819	0,9250	1,3054	1,2216	0,5800	0,7192	2,0833
0,80	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	1,4126	1,2370	0,5447	0,7727	2,0500
0,85	0,8796	0,6382	0,7256	0,9729	1,5243	1,2498	0,5107	0,8274	2,0265
0,90	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	1,6412	1,2595	0,4779	0,8833	2,0111
0,95	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	1,7638	1,2658	0,4466	0,9409	2,0026
1,00	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,8929	1,2679	0,4167	1,0000	2,0000
1,05	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	2,0291	1,2655	0,3882	1,0609	2,0024
1,10	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	2,1734	1,2584	0,3613	1,1239	2,0091
1,15	0,7796	0,4184	0,5366	0,9735	2,3269	1,2463	0,3357	1,1890	2,0196
1,20	0,7600	0,3827	0,5035	0,9531	2,4906	1,2286	0,3115	1,2566	2,0333
1,25	0,7396	0,3479	0,4704	0,9275	2,6660	1,2054	0,2886	1,3268	2,0500
1,30	0,7183	0,3142	0,4374	0,8969	2,8547	1,1765	0,2670	1,4002	2,0692
1,35	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	3,0586	1,1417	0,2467	1,4769	2,0907
1,40	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	3,2798	1,1012	0,2275	1,5575	2,1143
1,45	0,6495	0,2209	0,3401	0,7778	3,5211	1,0551	0,2094	1,6423	2,1397
1,50	0,6250	0,1930	0,3088	0,7307	3,7858	1,0037	0,1923	1,7321	2,1667
1,55	0,5996	0,1669	0,2784	0,6807	4,0778	0,9472	0,1762	1,8273	2,1952
1,60	0,5733	0,1427	0,2489	0,6282	4,4020	0,8861	0,1611	1,9290	2,2250
1,65	0,5463	0,1205	0,2205	0,5740	4,7647	0,8210	0,1467	2,0380	2,2561
1,70	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	5,1735	0,7524	0,1333	2,1555	2,2882
1,75	0,4896	0,0821	0,1677	0,4630	5,6383	0,6813	0,1205	2,2831	2,3214
1,80	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	6,1723	0,6085	0,1085	2,4227	2,3556
1,85	0,4296	0,0520	0,1210	0,3530	6,7934	0,5349	0,0971	2,5766	2,3905
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	7,5243	0,4617	0,0864	2,7481	2,4263
1,95	0,3662	0,0297	0,0812	0,2497	8,3985	0,3899	0,0763	2,9414	2,4628
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	9,4641	0,3203	0,0668	3,1622	2,5000
2,05	0,2996	0,0147	0,0491	0,1588	10,794	0,2556	0,0576	3,4190	2,5378
2,10	0,2650	0,0096	0,0361	0,1198	12,500	0,1956	0,0490	3,7240	2,5762
2,15	0,2296	0,0058	0,0253	0,0857	14,772	0,1420	0,0408	4,0961	2,6151
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	17,949	0,0960	0,0331	4,5674	2,6545
2,25	0,1563	0,0015	0,0097	0,0343	22,712	0,0585	0,0258	5,1958	2,6944
2,30	0,1183	0,0006	0,0048	0,0175	30,658	0,0302	0,0189	6,1033	2,7348
2,35	0,0796	0,0001	0,0017	0,0063	46,593	0,0111	0,0122	7,6053	2,7755
2,40	0,0400	0,13·10 <sup>-4</sup>	0,0003	0,0012	94,703	0,0022	0,0059	10,957	2,8167
2,45	0	0	0	0	$\infty$	0	0	$\infty$	2,8581

Таблица для расчета сверхзвуковых течений газа с непрерывным увеличением скорости ( $\kappa = 1,4$ )

$\delta^\circ$	$\varphi^\circ$	M	$\lambda$	$\pi(\lambda)$	$\epsilon(\lambda)$	$\tau(\lambda)$	$\alpha_0^0$	$r/r_0$
0°00'	0°00'	1,000	1,000	0,528	0,634	0,833	90°00'	1.
0°30'	18°24'	1,051	1,042	0,497	0,607	0,819	72°06'	1,049
1°00'	23°32'	1,083	1,067	0,479	0,591	0,810	67°28'	1,087
2°00'	30°00'	1,133	1,107	0,450	0,565	0,796	62°00'	1,147
3°00'	34°54'	1,178	1,142	0,424	0,542	0,783	58°06'	1,205
4°00'	38°52'	1,219	1,172	0,402	0,522	0,771	55°08'	1,262
6°	45°24'	1,294	1,227	0,364	0,497	0,749	50°36'	1,372
8°	51°00'	1,367	1,277	0,330	0,452	0,728	47°00'	1,498
10°	55°50'	1,435	1,323	0,299	0,422	0,708	44°10'	1,626
12°	60°20'	1,504	1,367	0,271	0,393	0,688	41°40'	1,772
14°	64°25'	1,569	1,408	0,246	0,367	0,670	39°35'	1,923
16°	68°24'	1,639	1,448	0,222	0,341	0,650	37°36'	2,094
18°	72°06'	1,705	1,486	0,201	0,318	0,632	35°54'	2,291
20°	75°42'	1,775	1,523	0,181	0,295	0,613	34°18'	2,500
22°	79°12'	1,846	1,559	0,162	0,273	0,595	32°48'	2,735
24°	82°30'	1,914	1,594	0,146	0,253	0,576	31°30'	2,993
26°	85°48'	1,988	1,628	0,130	0,233	0,558	30°12'	3,319
28°	89°00'	2,063	1,660	0,116	0,215	0,541	29°00'	3,647
30°	92°00'	2,130	1,691	0,1040	0,198	0,523	28°00'	4,046
32°	95°05'	2,209	1,722	0,0920	0,182	0,506	26°55'	4,436
34°	98°03'	2,285	1,752	0,0814	0,167	0,488	25°57'	4,955
36°	101°00'	2,366	1,782	0,0717	0,152	0,471	25°00'	5,521
38°	103°57'	2,454	1,810	0,0630	0,139	0,454	24°03'	6,166
40°	106°48'	2,539	1,838	0,0552	0,126	0,437	23°12'	6,919
42°	109°36'	2,624	1,865	0,0481	0,114	0,420	22°24'	7,798
44°	112°21'	2,717	1,891	0,0419	0,104	0,404	21°36'	8,710
46°	115°12'	2,816	1,918	0,0360	0,093	0,387	20°48'	9,954
48°	117°54'	2,910	1,943	0,0310	0,084	0,371	20°06'	11,20
50°	120°36'	3,010	1,967	0,0267	0,075	0,355	19°24'	12,94
52°	123°18'	3,119	1,990	0,0229	0,067	0,340	18°42'	14,72
54°	126°00'	3,236	2,014	0,0194	0,060	0,324	18°00'	16,90
56°	128°36'	3,344	2,036	0,0164	0,053	0,309	17°24'	19,49
58°	131°15'	3,470	2,058	0,0138	0,047	0,294	16°45'	22,49
60°	133°54'	3,606	2,080	0,0115	0,041	0,279	16°06'	26,30
62°	136°30'	3,742	2,100	0,954·10 <sup>-2</sup>	0,036	0,265	15°30'	30,55
64°	139°03'	3,876	2,121	0,784·10 <sup>-2</sup>	0,031	0,250	14°57'	36,40
66°	141°36'	4,021	2,140	0,645·10 <sup>-2</sup>	0,027	0,237	14°24'	43,15
68°	144°12'	4,193	2,159	0,525·10 <sup>-2</sup>	0,0235	0,223	13°48'	51,62
70°	146°42'	4,348	2,177	0,426·10 <sup>-2</sup>	0,0203	0,210	13°18'	62,50
72°	149°12'	4,515	2,195	0,339·10 <sup>-2</sup>	0,0172	0,197	12°48'	73,00
74°	151°42'	4,695	2,212	0,270·10 <sup>-2</sup>	0,0146	0,184	12°18'	91,20
76°	154°15'	4,912	2,228	0,214·10 <sup>-2</sup>	0,0124	0,173	11°45'	111,7
78°	156°45'	5,126	2,244	0,165·10 <sup>-2</sup>	0,0103	0,160	11°15'	143,3
80°	159°15'	5,362	2,260	0,126·10 <sup>-2</sup>	0,851·10 <sup>-2</sup>	0,149	10°45'	177,0
82°	161°42'	5,593	2,274	0,971·10 <sup>-3</sup>	0,705·10 <sup>-2</sup>	0,138	10°18'	219,8
84°	164°12'	5,875	2,289	0,722·10 <sup>-3</sup>	0,570·10 <sup>-2</sup>	0,127	9°48'	279,3
86°	166°42'	6,188	2,302	0,545·10 <sup>-3</sup>	0,466·10 <sup>-2</sup>	0,117	9°18'	361,0
88°	169°06'	6,464	2,315	0,398·10 <sup>-3</sup>	0,373·10 <sup>-2</sup>	0,107	8°54'	466,0
90°	171°36'	6,845	2,328	0,285·10 <sup>-3</sup>	0,294·10 <sup>-2</sup>	0,097	8°24'	631,0
92°	174°00'	7,184	2,340	0,197·10 <sup>-3</sup>	0,226·10 <sup>-2</sup>	0,087	8°00'	841,2
94°	176°27'	7,610	2,350	0,139·10 <sup>-3</sup>	0,176·10 <sup>-2</sup>	0,079	7°33'	1135
96°	178°54'	8,091	2,361	0,954·10 <sup>-4</sup>	0,134·10 <sup>-2</sup>	0,071	7°06'	1478



## Продолжение приложения VI

$\delta^\circ$	$\varphi^\circ$	M	$\lambda$	$\pi(\lambda)$	$\varepsilon(\lambda)$	$\tau(\lambda)$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	$r/r_0$
98°	181°21'	8,636	2,371	0,628 · 10 <sup>-4</sup>	0,996 · 10 <sup>-3</sup>	0,063	6°39'	2240
100°	183°48'	9,259	2,380	0,403 · 10 <sup>-4</sup>	0,726 · 10 <sup>-3</sup>	0,055	6°12'	3092
102°	186°12'	9,891	2,389	0,257 · 10 <sup>-4</sup>	0,526 · 10 <sup>-3</sup>	0,049	5°48'	4730
104°	188°36'	10,626	2,397	0,156 · 10 <sup>-4</sup>	0,368 · 10 <sup>-3</sup>	0,042	5°24'	7440
130°27'	220°27'	$\infty$	2,449	0	0	0	0°00'	$\infty$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 888 с.
2. **Абрамович Г. Н.** Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960. 715 с.
3. **Авдуевский В. С.** и др. Под ред. В. К. Кошкина. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М.: Машиностроение, 1975. 624 с.
4. **Аржаников Н. С., Садекова Г. С.** Аэродинамика больших скоростей. М.: Высшая школа, 1965. 560 с.
5. **Бекнев В. С., Панков О. М., Янсон Р. А.** Газовая динамика газотурбинных и комбинированных установок./Под ред. В. В. Уварова. М.: Машиностроение, 1973. 392 с.
6. **Борисенко А. И.** Газовая динамика двигателей. М.: Оборонгиз, 1962. 793 с.
7. **Виноградов Б. С.** Прикладная газовая динамика. М.: Изд. Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы, 1965. 348 с.
8. **Вукалович М. П., Новиков И. И.** Техническая термодинамика. М.: Энергия, 1968. 496 с.
9. **Вулис Л. А.** Термодинамика газовых потоков. М.: Госэнергоиздат, 1950. 304 с.
10. **Гиневский А. С.** Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969. 400 с.
11. **Дейч М. Е.** Техническая газодинамика. М.: Энергия, 1974. 592 с.
12. **Идельчик И. Е.** Гидравлические сопротивления. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1960. 464 с.
13. **Иров Ю. Д.** и др. Газодинамические функции. М.: Машиностроение, 1965. 400 с.
14. **Копырин М. А.** Гидравлика и гидравлические машины. М.: Высшая школа, 1961. 302 с.
15. **Кочин И. А., Кибель И. А. и Розе И. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. I. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
16. **Краснов Н. Ф.** Аэродинамика. Т. 1 и 2. М.: Высшая школа, 1976. 384, 368 с.
17. **Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 788 с.
18. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
19. **Некрасов Б. Б.** Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах. М.: Машиностроение, 1967. 368 с.
20. **Повх М. Л.** Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1969. 524 с.
21. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.
22. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. I и II. М.: Наука, 1976. 536, 576 с.
23. **Сергель О. С.** Прикладная гидрогазодинамика. Ч. I и II. Изд. МАИ. 1968. 187, 242 с.

24. **Степчиков А. А.** Задачи по гидрогазовой динамике. М.: Машиностроение, 1980. 180 с.
25. **Теория воздушно-реактивных двигателей/Под ред. С. М. Шляхтенко, М.: Машиностроение, 1975. 568 с.**
26. **Фабрикант Н. Я.** Аэродинамика. М.: Наука, 1964. 814 с.
27. **Ферри А.** Аэродинамика сверхзвуковых течений.: Пер. с англ. М.: Гос-техтеоретиздат, 1963. 458 с.
28. **Хинце И. О.** Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
29. **Чжен П.** Отрывные течения: Пер. с англ. Т. 1, 2 и 3. М.: Мир, 1972—1973. 300, 280, 300 с.
30. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Основные физические свойства жидкости. Некоторые понятия и определения</b> . . . . .	<b>8</b>
1.1. Совершенный газ . . . . .	8
1.2. Молекулярное строение . . . . .	9
1.3. Сплошность жидкости . . . . .	10
1.4. Силы, действующие на жидкий объем . . . . .	13
1.5. Вязкость или внутреннее трение в жидкостях . . . . .	15
1.6. Сжимаемость жидкости . . . . .	21
<b>Глава 2. Гидростатика</b> . . . . .	<b>25</b>
2.1. Дифференциальное уравнение равновесия . . . . .	26
2.2. Уравнение поверхности уровня . . . . .	27
2.3. Абсолютное равновесие несжимаемой жидкости. Закон Паскаля . . . . .	27
2.4. Сила давления на плоскую стенку . . . . .	29
2.5. Закон Архимеда . . . . .	30
2.6. Относительное равновесие жидкости при поступательном равноускоренном движении сосуда . . . . .	31
2.7. Равновесие капсельной жидкости во вращающемся сосуде . . . . .	32
2.8. Равновесие газов. Международная стандартная атмосфера . . . . .	32
<b>Глава 3. Кинематика жидкости</b> . . . . .	<b>35</b>
3.1. Методы Лагранжа и Эйлера исследования движения жидкости . . . . .	35
3.2. Расход жидкости. Средняя скорость . . . . .	38
3.3. Уравнение неразрывности . . . . .	39
3.4. Движение жидкой частицы . . . . .	41
3.5. Вихревое движение жидкости . . . . .	44
3.6. Безвихревое течение жидкости . . . . .	48
3.7. Безвихревое плоское установившееся течение несжимаемой жидкости . . . . .	49
3.8. Метод наложения или суперпозиции полей течений . . . . .	50
3.9. Синтезирование более сложных течений из простейших . . . . .	53
3.10. О методе конформных отображений . . . . .	56
<b>Глава 4. Основные уравнения гидродинамики</b> . . . . .	<b>60</b>
4.1. Уравнения движения жидкости . . . . .	60
4.2. Примеры применения интегрального уравнения движения . . . . .	65
4.3. Сила тяги реактивных двигателей . . . . .	68
4.4. Уравнение моментов количества движения (второе уравнение Эйлера) . . . . .	71
4.5. Дифференциальное уравнение движения в напряжениях . . . . .	73
4.6. Дифференциальные уравнения Навье—Стокса (1845 г.) . . . . .	75
4.7. Дифференциальные уравнения Эйлера и их интегрирование . . . . .	77

	Стр.
4.8. Анализ уравнения Бернулли . . . . .	80
4.9. Сила взаимодействия между идеальной несжимаемой жидкостью и цилиндром при циркуляционном обтекании его. Теорема П. Е. Жуковского о подъемной силе . . . . .	88
4.10. Плоское потенциальное установившееся течение идеального газа . . . . .	90
4.11. Интегральное уравнение энергии . . . . .	90
4.12. Обобщенное уравнение Бернулли для установившегося течения в элементарной струйке . . . . .	93
4.13. Дифференциальное уравнение энергии . . . . .	95
4.14. Уравнение второго закона термодинамики . . . . .	98
<b>Глава 5. Теория подобия и анализ размерностей . . . . .</b>	<b>100</b>
5.1. Подобие физических процессов . . . . .	100
5.2. Три теоремы теории подобия . . . . .	103
5.3. Критерии гидродинамического подобия . . . . .	104
5.4. Критерии теплового подобия . . . . .	108
5.5. Составление критериального уравнения . . . . .	110
5.6. Теория размерностей . . . . .	113
<b>Глава 6. Режимы течения жидкости . . . . .</b>	<b>115</b>
6.1. Переход ламинарного течения в турбулентное . . . . .	115
6.2. Потеря устойчивости ламинарного течения . . . . .	117
6.3. Пульсационное и осредненное движение . . . . .	119
6.4. Дополнительные (кажущиеся) турбулентные напряжения . . . . .	121
6.5. Полуэмпирическая теория пути перемешивания . . . . .	123
6.6. Предельные течения по числу Рейнольдса . . . . .	129
6.7. Гидравлические потери . . . . .	130
<b>Глава 7. Ламинарное установившееся течение несжимаемой жидкости (элементы гидравлики) . . . . .</b>	<b>133</b>
7.1. Точные решения . . . . .	133
7.2. Уравнение Бернулли для потоков реальной жидкости в каналах . . . . .	139
7.3. О приближенных решениях уравнений Навье—Стокса и неразрывности для ползущих течений . . . . .	140
<b>Глава 8. Установившееся турбулентное течение несжимаемой жидкости в трубах. Пристеночная турбулентность . . . . .</b>	<b>145</b>
8.1. Поле скоростей . . . . .	145
8.2. Закон сопротивления гладких труб . . . . .	152
8.3. Течение жидкости в шероховатых трубах . . . . .	154
8.4. Расчет гидравлических потерь в трубах с некруглым поперечным сечением . . . . .	157
<b>Глава 9. Местные гидравлические сопротивления. Истечение жидкости через отверстия и насадки . . . . .</b>	<b>158</b>
9.1. Местные сопротивления при турбулентных течениях . . . . .	158
9.2. Местные сопротивления при ламинарном режиме течения . . . . .	162
9.3. Истечение жидкостей через отверстия и насадки . . . . .	164
<b>Глава 10. Гидравлический расчет трубопроводов . . . . .</b>	<b>175</b>
10.1. Простой трубопровод . . . . .	175
10.2. Сложные трубопроводы . . . . .	178
10.3. Трубопровод с насосной подачей жидкости . . . . .	181
<b>Глава 11. Основные уравнения газовой динамики элементарной струйки. Некоторые понятия и определения . . . . .</b>	<b>187</b>
11.1. Уравнение энергии в тепловой форме или уравнение энтальпии. Параметры заторможенного потока. Газодинамические функции $\tau(\lambda)$ , $\pi(\lambda)$ , $\varepsilon(\lambda)$ . . . . .	188
11.2. Изменение давления торможения в потоках . . . . .	197
11.3. Газодинамическая форма уравнения неразрывности и расхода. Газодинамические функции $q(\lambda)$ и $y(\lambda)$ . . . . .	200

11.4. Газодинамическая форма уравнения количества движения в полных импульсах. Газодинамические функции $z(\lambda)$ , $f(\lambda)$ , $r(\lambda)$	202
11.5. Закон обращения воздействий	204
11.6. Области течений газов в зависимости от числа М	206
11.7. Распространение слабых (звуковых) волн давления в газовых потоках	209
<b>Глава 12. Скачки уплотнения (ударные волны)</b>	<b>213</b>
12.1. Прямые скачки уплотнения	215
12.2. Косые скачки уплотнения	220
12.3. Определение давления торможения $p_n^*$ и приведенной скорости в сверхзвуковых потоках	229
12.4. Взаимодействие и отражение скачков уплотнения	230
<b>Глава 13. Геометрическое воздействие на газовый поток</b>	<b>234</b>
13.1. Ускорение сверхзвукового потока при обтекании внешнего тупого угла (течение Прандтля—Майера)	235
13.2. Отражение и пересечение характеристик	242
13.3. Ускорение дозвукового потока в сужающемся сопле при одномерном идеальном течении	245
13.4. Режимы течения газа в канале с горлом. Сопло Лаваля	247
13.5. Сопло с косым срезом	255
<b>Глава 14. Воздействие на газовый поток расходное, тепловое, механическое, трения и комбинированное</b>	<b>256</b>
14.1. Расходное воздействие	257
14.2. Механическое воздействие	259
14.3. Тепловое воздействие	260
14.4. Воздействие трения	265
14.5. Комбинированное воздействие	269
<b>Глава 15. Основы теории пограничного слоя. Реальные течения в соплах</b>	<b>270</b>
15.1. Интегральные характеристики пограничного слоя	273
15.2. Ламинарный, переходный и турбулентный режимы течения в пограничном слое	275
15.3. Ламинарный пограничный слой	276
15.4. Турбулентный пограничный слой	286
15.5. Пограничный слой в сжимаемом газе на плоской стенке	291
15.6. Пограничный слой с продольным градиентом давления. Отрыв. Взаимодействие со скачками уплотнения. Управление пограничным слоем	294
15.7. Реальные течения в сужающихся соплах и соплах Лаваля	304
<b>Глава 16. Диффузоры</b>	<b>314</b>
16.1. Дозвуковые диффузоры ВРД	314
16.2. Диффузоры для небольших сверхзвуковых скоростей	318
16.3. Сверхзвуковые диффузоры	319
<b>Глава 17. Турбулентные струи</b>	<b>326</b>
17.1. Общие свойства и структура турбулентных струй	328
17.2. Расчет струй	337
<b>Глава 18. Обтекание тел потоками жидкости</b>	<b>342</b>
18.1. Профиль и его характеристики. Постулат Жуковского—Чаплыгина	342
18.2. Взаимодействие тел с потоками реальной жидкости	346
18.3. Крыло конечного размаха. Индуктивное сопротивление	355
18.4. Элементы теории решеток профилей. Теорема Н. Е. Жуковского для решеток	358
Приложения I—VI	364
Список литературы	370

ИБ № 2192

Олег Сергеевич СЕРГЕЛЬ

ПРИКЛАДНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Редактор *В. И. Рыбакова*

Художественный редактор *В. В. Лебедев*

Технический редактор *Т. И. Андреева*

Корректоры *А. П. Озерова* и *В. А. Воробьева*

Обложка художника *В. В. Евдокимова*

Сдано в набор 13.08.80.

Подписано в печать 12.12.80. Т-19756

Формат 60×90<sup>1/16</sup>

Бумага типографская № 2

Гарнитура литературная.

Печать высокая

Усл. печ. л. 23,5.

Уч.-изд. л. 24,74.

Тираж 4000 экз. Заказ 950 Цена 1 р. 20 к.

Издательство «Машиностроение», 107076,  
Стромынский пер., 4

Московская типография № 8

Союзполиграфпрома

при Государственном комитете СССР

по делам издательств, полиграфии

и книжной торговли,

Хохловский пер., 7.

## УВАЖАЕМЫЕ ТОВАРИЩИ!

Своевременно заказывайте и приобретайте в местных книжных магазинах литературу, выпускаемую издательством «Машиностроение».

Специализированный магазин «Техническая книга» (Москва, К-51, ул. Петровка, 15) принимает предварительные заказы на новую литературу, а также высылает по почте наложенным платежом литературу, имеющуюся в его ассортименте.

В издательстве «Машиностроение» в 1981 году выйдут следующие книги:

**Ярковец А. И.** Основы механизации и автоматизации технологических процессов в самолетостроении: Учеб. пособие для авиационных вузов. — М.: Машиностроение, 1981.

Изложены основы механизации и автоматизации технологических процессов в самолетостроении. Приведены общие требования к конструкции заготовок, деталей и сборочных единиц. Освещены процессы обработки, изготовления и сборки, которые предстоит автоматизировать. Рассмотрены направления и средства механизации и автоматизации технологических процессов изготовления и испытания систем бортового оборудования.

**Мунин А. Г., Кузнецов В. М., Леонтьев Е. А.** Аэродинамические источники шума. — М.: Машиностроение, 1981.

В книге обобщены исследования по аэроакустике и аэроакустическим характеристикам затопленной, спутной, соосной струй и струй, истекающих из сопел различных конфигураций. Изложена теория малых вихревых, энтропийных и акустических возмущений в нестационарном потоке сжимаемого газа. Рассмотрены основные источники шума. Дан метод расчета интенсивности излучения шума различными участками турбулентной струи. Приведены решения задач о шуме профиля, свободного ротора при дозвуковых, около- и сверхзвуковых скоростях и др.

Книга предназначена для инженеров авиационной промышленности. Она может быть полезна инженерно-техническим работникам других отраслей промышленности, занимающихся борьбой с аэродинамическими шумами.