

УДК 533.21

Математическое моделирование струй реактивных двигателей

Л. В. Быков, А. М. Молчанов

Московский авиационный институт (государственный технический университет), Москва;
e-mail: k204bykov@mail.ru, alexmol_2000@mail.ru

Работа посвящена разработке численного метода для расчета сверхзвуковых турбулентных струй с неравновесными химическими реакциями. Для моделирования химически реагирующего потока использовался неявный полностью связанный численный метод. Используется осредненная по Фавру полная система уравнений Навье-Стокса для многокомпонентной газовой смеси с неравновесными химическими реакциями аррениусовского типа. Для учета влияния высокоскоростной сжимаемости на турбулентность используется специальная модификация $K-\varepsilon$ модели турбулентности. Для подтверждения правильности разработанного кода проведен ряд расчетов течений струйного типа: нерасчетные сверхзвуковые холодные и нагретые струи, сверхзвуковое горение водорода в спутном потоке обедненного кислородом воздуха, догорание жидкостных и твердотопливных ракетных выхлопных факелов. Результаты расчета удовлетворительно согласуются с доступными экспериментальными данными.

Ключевые слова: численный метод, турбулентные струи, уравнения Навье-Стокса, химически реагирующие потоки, сверхзвуковые течения, эффекты сжимаемости, догорание, сверхзвуковое горение, ракетные факелы.

Введение

Расчету сверхзвуковых турбулентных струй посвящено достаточно много работ [1—6]. В большинстве из них используются параболизированные уравнения Навье-Стокса, либо стандартные программные комплексы.

Применение стандартных программных комплексов и других средств вычислительной гидродинамики (ANSYS CFX, FLUENT, FlowVision, Star-CD и т.п.) очень удобно для проведения расчетов более или менее стандартизированных задач. Оно же порождает ряд проблем: это организационные и финансовые затраты, связанные с необходимостью приобретения дорогостоящих лицензий, а также методические сложности (необходимость учета физических процессов, не предусмотренных в основной программе, например, проведение расчетов с учетом неравновесных физико-химических процессов и волновых эффектов в сверх- и гиперзвуковых течениях).

При математическом моделировании струй реактивных двигателей возникает целый ряд

принципиальных задач, которые необходимо решить. К таким задачам относятся:

— сложная волновая структура течений; например, на больших высотах полета летательных аппаратов давление в скачках уплотнения струй может меняться на 5—10 порядков;

— кинетика многокомпонентных химических реакций;

— проблема численного решения «жесткой» многопараметрической системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных; в частности, при сверхзвуковых скоростях характерное газодинамическое время может быть сравнимо со временем протекания химических реакций, особенно при низких плотностях; при этом использование предположения о химическом равновесии не может считаться корректным, так как появляется необходимость учитывать конечную скорость реакций;

— в сверхзвуковых турбулентных течениях пульсации давления, возникающие в слое смешения при взаимодействии дозвуковых и сверхзвуковых объемов газа, вызывают дополнительную диссипацию; стандартные моде-

ли турбулентности, разработанные для несжимаемых течений, не учитывают интенсивность смешения в таких течениях.

Целью данной работы является разработка численной схемы для расчета сверхзвуковых течений с неравновесными химическими реакциями. Схема является неявной и устойчивой. Решается полностью связанная система уравнений, включающая уравнения Навье-Стокса (Рейнольдса), уравнения неразрывности химических компонентов и уравнения для турбулентных характеристик. Вся система на каждом шаге по времени решается одновременно.

На основе этой схемы авторами создана компьютерная программа UNIVERSE-CFD, апробированная на расчете сверхзвуковых химически реагирующих турбулентных струй.

1. Основная система уравнений

Основная система уравнений, описывающая турбулентное течение сжимаемой смеси химически реагирующих газов, включает уравнения неразрывности, количества движения, энергии и $N_C - 1$ уравнений сохранения массы химических компонентов, где N_C — число компонентов. Кроме того, для замыкания системы необходимы уравнения переноса турбулентных характеристик. В данной работе использовалась модифицированная K - ϵ модель турбулентности [7], учитывающая влияние сжимаемости на турбулентное смешение.

Для двумерного течения при больших значениях чисел Рейнольдса в предположении термического равновесия и при использовании осреднения по Фавру эта система имеет следующий вид (знак осреднения для простоты записи опущен):

1) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\omega}{y} \rho v = 0, \quad (1.1)$$

2) уравнения количества движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\omega}{y} \rho uv = \\ = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\omega}{y} \tau_{xy}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\omega}{y} \rho v^2 = \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\omega}{y} (\tau_{yy} - \tau_{\theta\theta}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

3) уравнение энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u H) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v H) + \frac{\omega}{y} \rho v H = \\ = \frac{\partial}{\partial x}(-q_x + u\tau_{xx} + v\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(-q_y + \\ + u\tau_{yx} + v\tau_{yy}) + \frac{\omega}{y}(-q_y + u\tau_{yx} + v\tau_{yy}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

4) уравнения сохранения массы химических компонентов

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u Y_k) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v Y_k) + \frac{\omega}{y} \rho v Y_k = \\ = -\frac{\partial g_{k,x}}{\partial x} - \frac{\partial g_{k,y}}{\partial y} - \frac{\omega}{y} g_{k,y} + W_k, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$k = 1, 2, \dots, N_C - 1,$

5) уравнение для K — кинетической энергии турбулентности

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u K) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v K) + \frac{\omega}{y} \rho v K = \\ = -\frac{\partial J_{K,x}}{\partial x} - \frac{\partial J_{K,y}}{\partial y} - \frac{\omega}{y} J_{K,y} + S_K, \end{aligned} \quad (1.6)$$

6) уравнение для ϵ — скорости диссипации энергии турбулентности

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \epsilon) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \epsilon) + \frac{\omega}{y} \rho v \epsilon = \\ = -\frac{\partial J_{\epsilon,x}}{\partial x} - \frac{\partial J_{\epsilon,y}}{\partial y} - \frac{\omega}{y} J_{\epsilon,y} + S_\epsilon. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В этих уравнениях используются следующие обозначения:

$\omega = 0$ в случае плоского течения в декартовой системе координат (x, y) ; $\omega = 1$ в случае осесимметричного течения в цилиндрической системе координат (x, y) ; ρ — плотность; u и v — компоненты скорости; E — полная внутренняя энергия; H — полная энтальпия газовой смеси; p — статическое давление; Y_k — массовая доля k -го компонента; N_C — число компонентов газовой смеси; W_k — скорость образования k -го компо-

нента; K — кинетическая энергия турбулентности; ε — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности; S_K, S_ε — источники в уравнениях для турбулентных характеристик.

В данной работе рассматриваются течения с большими значениями числа Рейнольдса, в которых можно пренебречь молекулярными вязкостью, теплопроводностью и диффузией. Для турбулентных вязких и диффузионных потоков используются следующие формулы, основанные на введении коэффициента турбулентной вязкости μ_T и турбулентных чисел Прандтля и Шмидта:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2\mu_T}{3} \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\omega}{y} v \right] - \frac{2}{3} \rho K, \\ \tau_{yy} &= \frac{2\mu_T}{3} \left[-\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\omega}{y} v \right] - \frac{2}{3} \rho K, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{\theta\theta} &= \frac{2}{3} \mu_T \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\omega}{y} v - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \rho K, \\ q_x &= -\frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial h}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$g_{k,x} = -\frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, \quad g_{k,y} = -\frac{\mu_T}{Pr_T} \frac{\partial Y_k}{\partial y}, \quad (1.10)$$

$$J_{K,x} = -\frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x}, \quad J_{K,y} = -\frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial y}, \quad (1.11)$$

$$J_{\varepsilon,x} = -\frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad J_{\varepsilon,y} = -\frac{\mu_T}{\sigma_K} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}.$$

При этом предполагается, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта равны.

Для замыкания системы используются следующие дополнительные соотношения:

$$\sum_{k=1}^{N_c} Y_k = 1, \quad h = \sum_{k=1}^{N_c} h_k Y_k, \quad (1.12)$$

$$H = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + K, \quad E = H - \frac{p}{\rho}.$$

Для термически совершенного газа уравнение состояния имеет вид:

$$p = \rho TR \sum_{k=1}^{N_c} \frac{Y_k}{M_k}, \quad (1.13)$$

где R — универсальная газовая постоянная, M_k — молекулярная масса k -го компонента.

2. Модель турбулентности

Стандартные модели турбулентности, разработанные для несжимаемых течений, завышают интенсивность смешения в сжимаемых течениях. Предполагается, что это связано с тем, что пульсации давления, возникающие в слое смешения при взаимодействии дозвуковых и сверхзвуковых объемов газа, вызывают дополнительную диссипацию.

В данной работе используется модель, предложенная в [7], в которой введены поправки для учета влияния сжимаемости в зависимости от турбулентного числа Маха $M_T = \sqrt{2K}/a$, где a — местная скорость звука.

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитывается по формуле:

$$\mu_T = C_\mu \rho K^2 / [(1 + C_M M_T) \varepsilon], \quad (2.1)$$

а в уравнение переноса K соответственно добавлен дополнительный отрицательный источник

$$S_t = -C_M \rho M_T \varepsilon. \quad (2.2)$$

Полностью источники в уравнениях для турбулентных характеристик имеют вид:

$$S_K = P_K - (1 + C_M M_T) \rho \varepsilon; \quad (2.3)$$

$$S_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} P_K - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{K},$$

где P_K — генерация турбулентной энергии из [7].

Использовались следующие числовые константы, входящие в модель турбулентности:

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon 1} &= 1,44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92; \quad C_\mu = 0,09; \quad C_M = 0,29; \\ Pr_T &= 0,7; \quad \sigma_K = 1,0; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Химическая кинетика

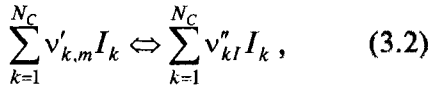
Скорость образования компонентов W_k , входящая в уравнение (1.5) рассчитывается по формуле:

$$W_k = M_k \sum_{m=1}^{N_R} (v_{k,m}'' - v_{k,m}') R_m, \quad (3.1)$$

где N_R — число реакций, протекающих в химически реагирующей системе; M_k — молекулярная масса k -го компонента; $v_{k,m}'$ — стехиометрический коэффициент k -го компонента в m -ой

прямой реакции (слева направо), $v_{k,m}^n$ — стехиометрический коэффициент k -го компонента в m -ой обратной реакции (справа налево); R_m — скорость m -ой химической реакции.

Если химическую реакцию под номером m представить в виде:



то

$$R_m = \left(F_m \prod_{k=1}^{N_C} [I_k]^{v'_{k,m}} - B_m \prod_{k=1}^{N_C} [I_k]^{v''_{k,m}} \right), \quad (3.3)$$

где $[I_k] = \frac{\rho Y_k}{W_k}$ — мольная концентрация k -го компонента, N_C — число компонентов, F_m и B_m — коэффициенты скоростей прямой и обратной реакции под номером m .

Коэффициенты скоростей прямых реакций рассчитываются по формулам:

$$F_m = A_m T^{\beta_m} \exp\left(-\frac{T_m}{T}\right), \quad (3.4)$$

где A_m — предэкспоненциальный множитель, β_k — безразмерный температурный показатель степени, $T_m = E_m/R$; E_m — энергия активации, T — температура.

Коэффициенты скоростей обратных реакций определяются через константы химического равновесия $K_{C,m}$:

$$B_m = \frac{F_m}{K_{C,m}}, \quad (3.5)$$

а константы равновесия, в свою очередь, определяются через изменение свободной энергии Гиббса:

$$K_{C,m} = \left(\frac{p_0}{RT}\right)^{v_m} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{N_C} (v''_{k,m} - v'_{k,m}) \left(\frac{h_k}{RT} - \frac{s_k}{R}\right)\right\}, \quad (3.6)$$

где $p_0 = 101325$ Па — стандартное давление,

$$v_m = \sum_{k=1}^{N_C} (v''_{k,m} - v'_{k,m}). \quad (3.7)$$

В табл. 1 приведены реакции, которые учитываются при моделировании горения водорода и окиси углерода в кислороде.

Таблица 1. Реакция горения

№	Реакция	Коэффициент скорости прямой реакции, F_k	Источник
1	$H + O_2 = OH + O$	$8,650 \cdot 10^{11} \cdot T^{-0,24} \cdot \exp(-8220/T)$	[10]
2	$O + H_2 = OH + H$	$1,5 \cdot 10^4 \cdot T^{-2,0} \cdot \exp(-3800/T)$	[8], [10]
3	$OH + H_2 = H_2O + H$	$2,53 \cdot 10^5 \cdot T^{-1,48} \cdot \exp(-1700/T)$	[8], [10]
4	$2OH = H_2O + O$	$1,5 \cdot 10^6 \cdot T^{1,14} \cdot \exp(-50/T)$	[8], [10]
5	$2H + M = H_2 + M$	$9,72 \cdot 10^{10} \cdot T^{-0,6}$	[8], $M = H_2$
6	$H + OH + M = H_2O + M$	$2 \cdot 10^{14} \cdot T^{-1}$	[10], $M = H_2$
7	$2O + M = O_2 + M$	$1,89 \cdot 10^7 \cdot \exp(900/T)$	[9], $M = Ar$
8	$CO + OH = CO_2 + H$	$3,3 \cdot 10^3 \cdot T^{-1,55} \cdot \exp(402/T)$	[11]
9	$CO + O + M = CO_2 + M$	$6,17 \cdot 10^8 \cdot \exp(-1510/T)$	[19]

Размерность F_m для бимолекулярных реакций (1—4, 8) — $\left[\frac{M^3}{\text{кмоль} \cdot \text{с}}\right]$, для реакций с третьим

телом (5, 6, 7, 9) — $\left[\frac{M^6}{\text{кмоль}^2 \cdot \text{с}}\right]$.

В табл. 2 приведены значения сравнительной эффективности третьего тела [12], используемые при моделировании.

Таблица 2. Сравнительная эффективность третьего тела

M	Ar	N ₂	O ₂	H ₂	H ₂ O	CO	CO ₂
Эфф.	0,35	0,4	0,4	1,0	6,5	0,75	1,5

4. Термодинамические свойства

Энтальпии h_k и энтропии s_k химических компонентов рассчитывались по формулам:

$$\frac{h_k}{RT} = a_{1,k} + a_{2,k} \frac{T}{2} + a_{3,k} \frac{T^2}{3} + a_{4,k} \frac{T^3}{4} + a_{5,k} \frac{T^4}{5} + \frac{b_{1,k}}{T}, \quad (4.1)$$

$$\frac{s_k}{R} = a_{1,k} \ln T + a_{2,k} T + a_{3,k} \frac{T^2}{2} + a_{4,k} \frac{T^3}{3} + a_{5,k} \frac{T^4}{4} + b_{2,k},$$

где коэффициенты $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2$ для каждого компонента взяты из [13].

5. Метод численного решения

В векторной форме систему уравнений (1.1)–(1.7) удобно представить в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_C}{\partial x} + \frac{\partial G_C}{\partial y} + \frac{\omega}{y} H_C + \frac{\partial F_V}{\partial x} + \frac{\partial G_V}{\partial y} + \frac{\omega}{y} H_V = S, \tag{5.1}$$

где

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, \rho E, \rho Y_1, \rho Y_2, \dots, \rho Y_{Nc-1}, \rho K, \rho \epsilon]^T, \tag{5.2}$$

$$F_C = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(\rho E + p) \\ \rho u Y_1 \\ \vdots \\ \rho u Y_{Nc-1} \\ \rho u K \\ \rho u \epsilon \end{bmatrix}, G_C = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v Y_1 \\ \vdots \\ \rho v Y_{Nc-1} \\ \rho v K \\ \rho v \epsilon \end{bmatrix}, H_C = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ v(\rho E + p) \\ \rho v Y_1 \\ \vdots \\ \rho v Y_{Nc-1} \\ \rho v K \\ \rho v \epsilon \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

$$F_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xx} \\ -\tau_{yx} \\ q_x - u\tau_{xx} - v\tau_{yx} \\ g_{1,x} \\ \vdots \\ g_{Nc-1,x} \\ J_{K,x} \\ J_{\epsilon,x} \end{bmatrix}, G_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{yy} \\ q_y - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} \\ g_{1,y} \\ \vdots \\ g_{Nc-1,y} \\ J_{K,y} \\ J_{\epsilon,y} \end{bmatrix}, H_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{yy} + \tau_{\theta\theta} \\ q_y - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} \\ g_{1,y} \\ \vdots \\ g_{Nc-1,y} \\ J_{K,y} \\ J_{\epsilon,y} \end{bmatrix}, \tag{5.4}$$

$$S = [0, 0, 0, 0, W_1, \dots, W_{Nc-1}, S_K, S_\epsilon]^T. \tag{5.5}$$

Для того, чтобы перейти от расчетной области произвольной формы к прямоугольной расчетной области, используется преобразование координат:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \tag{5.6}$$

где дважды непрерывно дифференцируемые функции $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ зависят от конкретной формы расчетной области.

В новой системе координат система (5.1) имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} + \frac{\omega}{y} \bar{H} = \bar{S}, \tag{5.7}$$

где конвективные и вязкие потоки для удобства записи объединены:

$$\begin{aligned} F &= F_C + F_V, \quad G = G_C + G_V, \quad H = H_C + H_V, \\ \bar{U} &= J^{-1}U, \quad \bar{F} = J^{-1}(\xi_x F + \xi_y G), \quad \bar{G} = J^{-1}(\eta_x F + \eta_y G), \\ \bar{H} &= J^{-1}H, \quad \bar{S} = J^{-1}S, \quad J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Конечно-объемное представление уравнения (5.7) имеет вид

$$\frac{\delta \bar{U}_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\bar{F}_{i+1/2,j} - \bar{F}_{i-1/2,j}}{\Delta \xi} + \frac{\bar{G}_{i,j+1/2} - \bar{G}_{i,j-1/2}}{\Delta \eta} + \frac{\omega}{y} \bar{H}_{i,j} = \bar{S}_{i,j}, \quad (5.9)$$

где $\delta \bar{U}_{i,j}^{n+1}$ — изменение решения в узле (i, j) за время с момента $n\Delta t$ до момента $(n+1)\Delta t$.

Потоки в уравнении (5.9) представляются в неявной форме:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \alpha \bar{F}^{n+1} + (1-\alpha) \bar{F}^n, \\ \bar{G} &= \alpha \bar{G}^{n+1} + (1-\alpha) \bar{G}^n, \\ \bar{H} &= \alpha \bar{H}^{n+1} + (1-\alpha) \bar{H}^n, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где параметр $\alpha > 0,5$. Принято, что $\alpha = 2$.

Для представления потоков на $(n+1)$ -ом шаге используется линеаризация по приращению $\delta \bar{U}_{i,j}^{n+1}$. При этом для конвективных и вязких потоков эта линеаризация осуществляется по-разному.

Конвективные потоки линеаризуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{F}_C^{n+1} &= \bar{F}_C^n + A^n \delta \bar{U}^{n+1}, \\ \bar{G}_C^{n+1} &= \bar{G}_C^n + B^n \delta \bar{U}^{n+1}, \\ \bar{H}_C^{n+1} &= \bar{H}_C^n + C^n \delta \bar{U}^{n+1}, \\ \bar{S}^{n+1} &= \bar{S}^n + \Omega^n \delta \bar{U}^{n+1}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $A = \frac{\partial \bar{F}_C}{\partial \bar{U}}$, $B = \frac{\partial \bar{G}_C}{\partial \bar{U}}$, $C = \frac{\partial \bar{H}_C}{\partial \bar{U}}$, $\Omega = \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{U}}$ — матрицы Якоби векторов $\bar{F}_C, \bar{G}_C, \bar{H}_C, \bar{S}$ по вектору \bar{U} .

Затем эти векторы расщепляются в соответствии со знаком собственных значений матриц Якоби. Например:

$$\bar{F}_{C_{i+1/2}} = A_+ \bar{U}_L + A_- \bar{U}_R, \quad (5.12)$$

где \bar{U}_L и \bar{U}_R относятся к ячейкам, находящимся соответственно слева и справа от грани $i+1/2$, разделяющей эти ячейки;

$$A_{\pm} = S_{\xi}^{-1} \Lambda_{A_{\pm}} S_{\xi} \text{ и } \Lambda_{A_{\pm}} = 0,5(\Lambda_A \pm |\Lambda_A|).$$

Здесь диагональная матрица $|\Lambda_A|$ представлена абсолютными значениями элементов ма-

трицы Λ_A . Матрицы A_+ и A_- имеют по построению только соответственно положительные и отрицательные собственные значения.

Для расчета A_+, A_- используется модифицированный метод Стеджера и Уорминга, описанный в [14]:

$$A_{\pm} = A_{\pm}(\bar{U}_{LR}), \quad \bar{U}_{LR} = \frac{\bar{U}_L + \bar{U}_R}{2}. \quad (5.13)$$

Использовались два типа аппроксимации \bar{U}_L и \bar{U}_R [15]:

1) аппроксимация первого порядка

$$\bar{U}_L = \bar{U}_{i,j}, \quad \bar{U}_R = \bar{U}_{i+1,j}, \quad (5.14)$$

2) аппроксимация второго порядка

$$\bar{U}_L = \frac{1}{2}(3\bar{U}_i - \bar{U}_{i-1}), \quad \bar{U}_R = \frac{1}{2}(3\bar{U}_{i+1} - \bar{U}_{i+2}). \quad (5.15)$$

Для линеаризации вязких потоков используется предположение о «тонком слое» и метод Тайзингера и Кои [16], подробно описанный в [17].

После подстановки (5.10) в (5.9) и применения описанных выше методов линеаризации получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} A_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j}^{n+1} + B_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j+1}^{n+1} + C_{i,j} \delta \bar{U}_{i,j-1}^{n+1} + \\ + D_{i,j} \delta \bar{U}_{i+1,j}^{n+1} + E_{i,j} \delta \bar{U}_{i-1,j}^{n+1} = \Delta \bar{U}_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}, E_{i,j}$ представляют собой блочные матричные элементы, размер каждого из которых равен $(N_C + 5) \times (N_C + 5)$ в соответствии с числом уравнений в системе (1.1)–(1.7).

Для решения системы (5.16) использовался модифицированный метод аппроксимационной факторизации Маккормака (MAFk) [15].

6. Результаты расчетов

Для апробации методики проведена серия тестовых расчетов. Первые 2 теста проведены на простых течениях без химических реакций. Для таких течений имеются достаточно точные экспериментальные и расчетные данные.

Тест 1. Сверхзвуковая струя в спутном потоке

Для проверки работоспособности численного метода проведен расчет струи со следующими параметрами:

$$M_a = 4; T_a = 2000 \text{ K}; \gamma_a = 1,4; p_a / p_e = 10^5;$$

$$M_e = 12; T_e = 288 \text{ K}; \gamma_e = 1,4;$$

где M — число Маха, γ — показатель адиабаты, индекс «а» относится к параметрам на срезе сопла, индекс «е» относится к внешнему потоку. Для данного течения характерно наличие областей с огромными градиентами давления и очень высокие числа Маха.

Наблюдается удовлетворительное согласие результатов расчета с расчетами невязкого газа, полученными в [18] (рис. 1 и 2). Зона центрального скачка несколько размыта, особенно при использовании 1-го порядка аппроксимации. При использовании 2-го порядка аппроксимации совпадение значительно улучшается. Необходимо отметить, что при использовании 2-го порядка аппроксимации (при $\Delta t \leq \Delta X / C_T$)

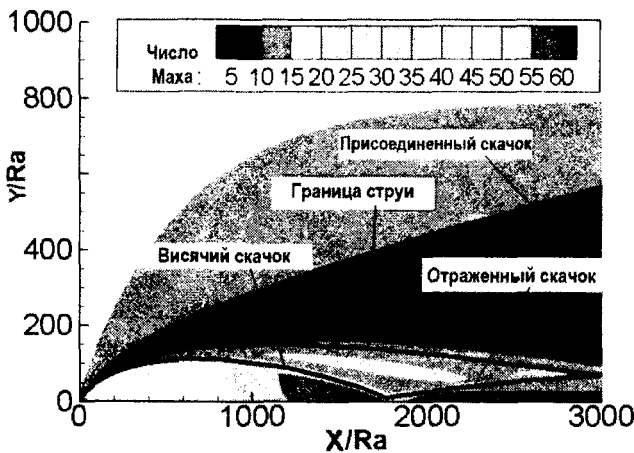


Рис. 1. Тест 1. Структура струи. Сравнение результатов расчета при использовании 2-го порядка аппроксимации (оттенки серого цвета) с данными, полученными в [18] (сплошные черные линии)

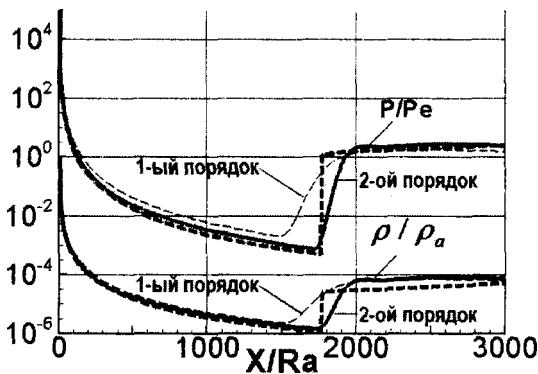


Рис. 2. Тест 1. Распределение давления и плотности вдоль оси струи. Сравнение результатов расчета при использовании 1-го и 2-го порядка аппроксимации с данными, полученными в [18] (черные пунктирные линии)

без корректирующего множителя происходит потеря устойчивости счета при любых значениях числа Куранта — Фридрихса — Леви (CFL).

Тест 2. Сильно недорасширенная горячая затопленная струя

Рассматривается звуковая струя с большой степенью нерасчетности. В этом варианте возникает достаточно большой диск Маха. Результаты расчета сравниваются с экспериментальными данными, полученными в [19]. Струя модельного двигателя имеет следующие параметры: $M_a = 1$, $p_a / p_e = 14,16$; температура торможения $T_0 = 1970 \text{ K}$, радиус сопла $R_a = 12,5 \text{ мм}$. В камеру сгорания подается керосин и воздух при комнатной температуре.

Сложность данного варианта — расчет в области диска Маха. В [20] для решения этой пробле-

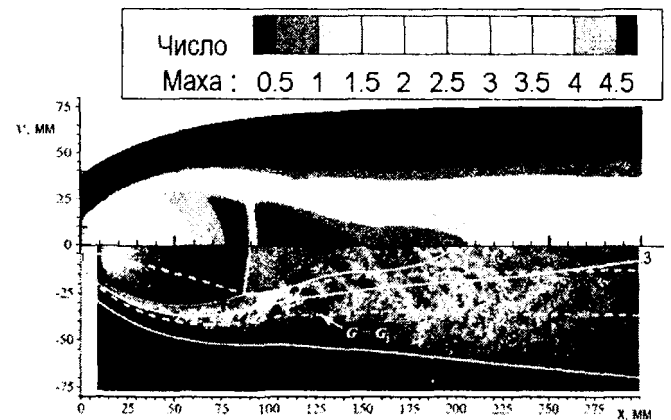


Рис. 3. Тест 2. Распределение числа Маха в струе. Сравнение результатов расчета (верхняя часть рисунка) с шпирен-фотографией струи, полученной в [19]

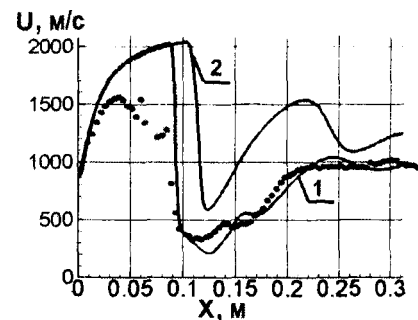


Рис. 4. Тест 2. Осевое распределение скорости. Сравнение результатов расчета (сплошные линии) с экспериментальными данными [19] (точки). 1 — расчет с использованием 2-го порядка аппроксимации конвективных членов; 2 — расчет с использованием 1-го порядка аппроксимации конвективных членов

мы используется специальная адаптивная сетка с выделением скачков. В данной работе используется сквозной счет без выделения скачков.

На рис. 3 показано сравнение рассчитанной структуры струи с шпирен-фотографией, полученной в [19]. Результаты удовлетворительно согласуются. На рис. 4 представлено изменение скорости вдоль оси струи.

При использовании 2-го порядка аппроксимации получается удовлетворительное совпадение с данными [19]. Следует отметить, что при расчете с использованием 1-го порядка аппроксимации диск Маха получается полностью вырожденным.

Тесты 3, 4 посвящены исследованию сверхзвуковых потоков с неравновесными химическими реакциями, для которых экспериментальное исследование достаточно затруднительно.

Тест 3. Догорание выхлопной струи твердотопливного двигателя

Для демонстрации метода проведено сравнение расчетов с измерениями перерасширенных «горячих» струй модели 1:5 «Зенит», проведенными ЦНИИМАШ, КБТМ [6]. Температура в камере сгорания с наполнителем ВИК-2Д $T_0 = 2950$ К, параметры на срезе сопла $M_a = 4$, $p_a/p_e = 0,65$. Массовое содержание догорающих компонент равно 0,01 для H_2 и 0,29 для окиси углерода CO.

Сравнение рассчитанного избыточного давления Пито на оси струи с результатами экспе-

римента приведено на рис. 5, 6. На рис. 5 показано влияние учета сжимаемости в модели турбулентности. Очевидно, что использование стандартной $k-\epsilon$ модели турбулентности приводит к грубым ошибкам расчета. Результаты расчетов, полученные с использованием скорректированной на сжимаемость модели турбулентности, хорошо согласуются с измерениями, включающими как начальный неизобарический, так и основной участок струи. На рис. 6 показано влияние порядка аппроксимации конвективного потока. Видно, что при использовании аппроксимации 1-го порядка волновая структура струи существенно сглаживается по сравнению с экспериментом.

На рис. 7 показано сравнение результатов расчета температуры торможения вдоль оси струи с экспериментальными данными из работы [5]. Используется то же топливо ВИК-2Д, но с иными параметрами на срезе сопла: $M_a = 3,24$, $p_a/p_e = 0,73$. Массовое содержание догорающих компонент равно 0,01 для H_2 и 0,29 для окиси углерода CO. Температура в газогенераторе $T_x = 2840$ К. Очевидно, что догорание компонент топлива существенно влияет на температуру струи.

Тест 4. Сверхзвуковое горение водорода в обедненном кислороде воздуха при использовании щелевого впрыска

Для верификации математической модели горения в случае плоского течения в кана-

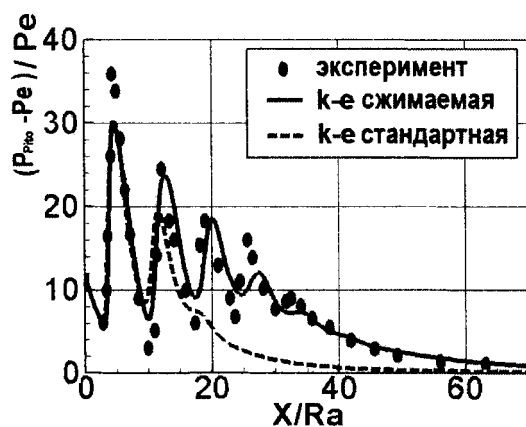


Рис. 5. Тест 3. Осевое распределение давления Пито. Сравнение результатов расчета при использовании различных моделей турбулентности (линии) с экспериментальными данными [6] (точки)

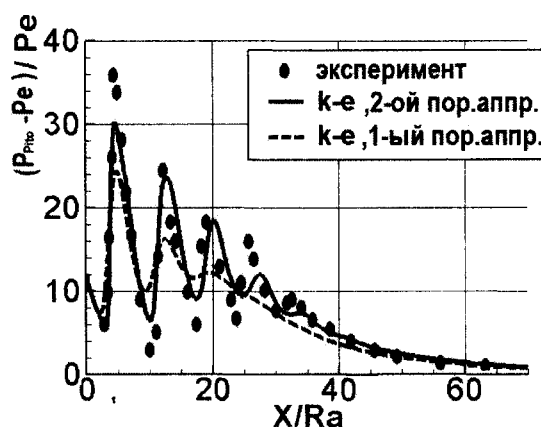


Рис. 6. Тест 3. Осевое распределение давления Пито. Сравнение результатов расчета при использовании различных порядков аппроксимации конвективных членов (линии) с экспериментальными данными [6] (точки)

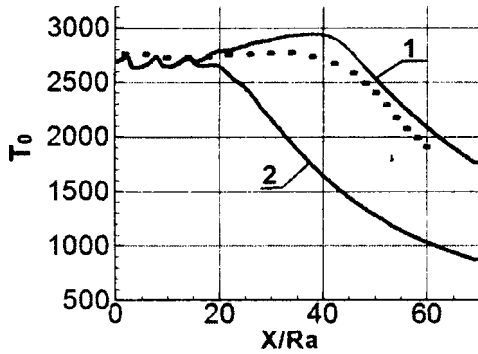


Рис. 7. Тест 3. Осевое распределение температуры торможения. Сравнение результатов расчета (линии) с экспериментальными данными [5] (точки). Кривая 1 — расчет с учетом догорания; 2 — расчет без учета догорания

ле была рассмотрена задача истечения пристенной плоской водородной струи в спутный сверхзвуковой поток в камере сгорания в соответствии с условиями опытов, проведенных в [21]. Схема экспериментальной установки, на которой были выполнены эти исследования, приведена на рис. 8. В работе исследовано горение пристенной звуковой струи холодного водорода $M_a = 1$; $T_a = 254$ К, инжектируемого через щель в стенке аэродинамической трубы высотой $h_1 = 4$ мм, в сверхзвуковой поток

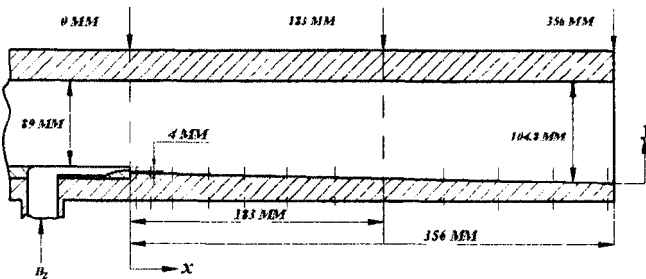


Рис. 8. Тест 4. Схема экспериментальной установки [21]

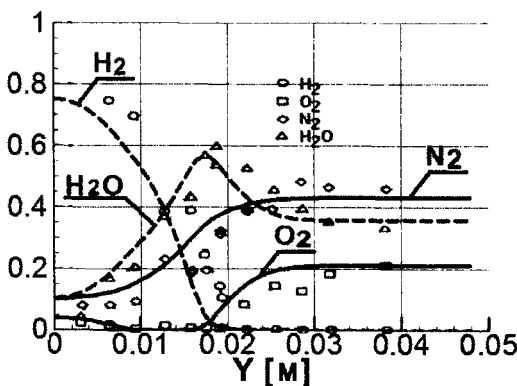


Рис. 9. Тест 4. Молярные доли компонентов при $X = 356$ мм. Результаты расчетов (сплошные и прерывистые линии) сравниваются с экспериментальными данными (значки) [21]

подогретого воздуха ($M_a = 2,44$; $T_a = 1270$ К). Тангенциальный вдув водорода осуществлялся при статическом давлении, равном статическому давлению набегающего потока $P = 10^5$ Па. Воздушный поток состоял из кислорода, водяного пара и азота с начальными концентрациями $Y_{O_2} = 0,266$, $Y_{H_2O} = 0,256$, $Y_{N_2} = 0,478$. Были измерены профили температуры, молярные концентрации реагентов (H_2 , O_2) и продуктов сгорания (H_2O) в выходном сечении камеры сгорания ($x/h_1 = 89$).

Результаты расчета молярных долей компонентов и экспериментальные данные приведены на рис. 9. Результаты расчета удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Выводы

Разработана и апробирована численная схема для исследования сверхзвуковых турбулентных струй реактивных двигателей. Проведено сопоставление полученных результатов с имеющимися расчетными и экспериментальными данными. Представлено исследование влияния методов моделирования турбулентности, параметров численной схемы и химической кинетики на газодинамические свойства сверхзвуковых струй с неравновесными химическими реакциями. Сопоставление результатов показало, что:

1) учет высокоскоростной сжимаемости в предложенной модели турбулентности позволяет с хорошей точностью описать скорость распространения струи и ее волновую структуру;

2) выбор констант, входящих в уравнения химической кинетики, играет важную роль. Показано, что средние значения, приведенные в литературе, занижают интенсивность горения в струях реактивных двигателей по сравнению с экспериментом. В данной работе предложены значения констант, позволяющие получить более точное согласование с приведенными экспериментальными данными;

3) использование аппроксимации 1-го порядка для аппроксимации конвективных потоков приводит к существенному искажению волновой структуры сверхзвуковых струй. При ис-

пользовании 2-го порядка аппроксимации получается более удовлетворительное согласование результатов расчета с экспериментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rodionov A.V. A Godunov's Method Modification for Prediction of Supersonic Reacting Turbulent Jets // *La Recherche Aerospacial*. N. 4. 1995. P. 263–276.
2. An Evaluation of Parameters Influencing Jet. Mixing Using the WIND Navier-Stokes Code. NASA/TM — 2002—211727. August 2002. P. 1–23
3. Калтаев А.Ж., Найманова А.Ж. Об одном численном методе расчета сверхзвуковых пространственных струй. // *Матем. моделирование*. 2002. 14:12. С. 105–116
4. Keysar L., Degani D. Numerical Investigation of Axisymmetric Compressible Turbulent Jets. // *AIAA Paper* 2004—1107. P. 1–25.
5. Сафронов А.В., Хотулев В.А. Результаты экспериментальных исследований сверхзвуковых холодных и горячих струйных течений, истекающих в затопленное пространство. // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2008. Т. 6. www.chemphys.edu.ru/article/129/
6. Сафронов А.В. Метод расчета струй продуктов сгорания при старте // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2006. Т. 4. www.chemphys.edu.ru/media/files/2006-10-23-001.pdf.
7. Молчанов А.М. Расчет сверхзвуковых неизобарических струй с поправками на сжимаемость в модели турбулентности. // *Вестник Московского авиационного института*. 2009. Т. 16. № 1. С. 38–48.
8. Baulch D.L., Cobos C.J., Cox R.A. et al. Summary table of evaluated kinetic data for combustion modelling // *Combustion and Flame*. 1994. V. 98. P. 59–79.
9. Tsang W., Hampson R.F. Chemical kinetic data base for combustion chemistry. Part I. Methane and related compounds // *J. Phys. Chem. Ref. Data*. 1986. V. 15. P. 1087.
10. Ibragimova L.B., Smekhov G.D., Shatalov O.P. Recommended Rate Constants of Chemical Reactions in H₂O₂ Gas Mixture with Electronically Excited Species O₂(1), O(1D), OH(2) Involved // *Физико-химическая кинетика в газовой динамике*. 2003. Т. 1. 31 с. (<http://www.chemphys.edu.ru>).
11. Lissianski V., Yang H., Qin Z., Mueller M.R., Shin K.S., Gardiner. W. C., Jr. High-temperature measurements of the rate of the coefficient of the H + CO₂ → CO + OH reaction // *Chem. Phys. Lett*. 1995. V. 240. P. 57–62.
12. Химия горения / ред. У. Гардинер. М.: Мир, 1988. 464 с.
13. McBride B. J., Gordon S., Reno M.A. Coefficients for Calculating Thermodynamic and Transport Properties of Individual Species // *NASA Technical Memorandum* 4513. Oct. 1993.
14. MacCormack R.W., Candler G.V. The solution of the Navier-Stokes equations using Gauss-Seidel line relaxation // *Computers and Fluids*. V. 17. 1989. P. 135–150.
15. MacCormack R.W., Pulliam T. Assessment of a New Numerical Procedure for Fluid Dynamics // *AIAA Paper* 98—2821, 1998. P. 1–9.
16. Tysinger T., Caughey D. Implicit Multigrid Algorithm for the Navier-Stokes Equations // *AIAA Paper* 91—0242, 1991. P. 1–16.
17. Быков Л.В., Молчанов А.М., Янышев Д.С. Численный метод расчета сверхзвуковых турбулентных течений с химическими реакциями // *Вестник Московского авиационного института*. 2010. Т. 17. № 3. С. 108–117.
18. Аверякова Г.И., Апратов Э.И., Волконская Т.Г. и др. Сверхзвуковые струи идеального газа. М.: Изд. МГУ. Ч. 1, 1970. 279 с.
19. Chauveau C., Davidenko D.M., Sarh B., Gökalp I., Avrashkov V., Fabre C. PIV Measurements in an Underexpanded Hot Free Jet // *13th Int Symp on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*. P. 1161
20. Lehnasch G., Bruel P. A Robust Methodology for RANS Simulations of Highly Underexpanded Jets // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008. V. 56. Is. 12. P. 2179–2205
21. Burrows M.C., Kurkov A.P. Supersonic combustion of hydrogen in a vitiated air stream using stepped-wall injection // *AIAA Paper*. 1971. 71—721. 9 p.

ВНИМАНИЕ!

Уважаемый читатель, Вы получили номер журнала с голограммой на первой стороне обложки. Это означает, что этот экземпляр журнала является оригинальным, выпущенным научно-техническим издательством ООО «Наука и технологии». Если голограмма отсутствует, то экземпляр журнала — контрафактный. В этом случае убедительная просьба сообщить в издательство, где был приобретен этот экземпляр журнала, по телефону (495) 223-09-10, факсу (499) 164-47-74 или e-mail: market@nait.ru.

Заранее благодарим за сотрудничество.