



**ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО
АВИАЦИОННОГО
ИНСТИТУТА**

**AEROSPACE
MAI JOURNAL**

1 TOM 4
1997



9 770869 610009 >

РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙ РЕАЛЬНОГО ГАЗА, ИСТЕКАЮЩИХ В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Часть I. Постановка задачи и численный метод

Александр Михайлович МОЛЧАНОВ родился в 1954 г. в городе Москве. Генеральный директор АО «Интеравиа-Экология». Кандидат технических наук. Основные научные интересы — в области теории турбулентности, теории струйных течений, физики горения, прикладной математики и экологии. Автор более 50 научных работ.

Alexander M. MOLCHANOV (born 1954 in Moscow), General Director of «Interavia-Ekologia» JSC, Doctor of Sciences in Engineering. His scientific interests cover the theory of turbulence, jets, burning process, applied mathematics and ecology. He has published over 50 scientific papers.

Разработана методика расчета сверхзвуковых турбулентных реагирующих струй, истекающих в затопленное пространство и дозвуковой спутный поток. Используемый маршевый численный метод является безусловно устойчивым; отсутствует необходимость решения систем уравнений с блочными трехдиагональными матрицами. Предложена модель турбулентности, позволяющая учесть влияние сжимаемости и неизобаричности на интенсивность турбулентного смешения.

Работа посвящена разработке метода расчета сверхзвуковых турбулентных недорасширенных и перерасширенных струй реактивных двигателей. Рассматривается задача об истечении в затопленное пространство и спутный дозвуковой поток.

Эта задача важна для полетов летательных аппаратов на малых высотах, для испытательных стендов реактивных двигателей, а также имеет методологическое значение: в литературе имеется обширный экспериментальный материал по затопленным сверхзвуковым струям, который может служить основой для уточнения математических моделей турбулентных струй.

Из-за наличия областей течения с дозвуковыми скоростями рассчитывать турбулентные струи существенно сложнее, чем полностью сверхзвуковые потоки. Указанная задача может решаться на основе как полных уравнений Навье—Стокса (см., например, работу [1]), так и параболизированных уравнений Навье—Стокса с заданием продольного градиента давления в дозвуковых областях течения [2,3]. Преимущество использования параболизированных уравнений состоит в возможности расчета маршевыми численными методами, но при этом возникает проблема «сшивания» решений в дозвуковой и сверхзвуковой областях [2,3]. Процедура «сшивания» носит, как правило, итеративный характер. Кроме того, использование явных численных методов приводит к необходимости существенного уменьшения продольного шага интегрирования в переходной области. Все это приводит к увеличе-

нию затрат времени и оперативной памяти при расчете на ЭВМ.

В работе представлен сквозной безитеративный безусловно устойчивый численный метод расчета сверхзвуковых струй с дозвуковыми областями.

При построении математической модели особое внимание уделено вопросам турбулентного смешения и химической кинетики.

Первая часть работы посвящена изложению общей теории и описанию численного метода. Практические результаты и их анализ будут представлены во второй части.

1. Турбулентное течение газовой смеси описывается системой уравнений, получаемых формальным осреднением основных уравнений, которые записаны для вязкого теплопроводного газа. Используются два вида осреднения зависимых переменных [4]:

1) среднестатистическое, которое обозначается \bar{p} ;

2) осреднение с использованием плотности в качестве весового множителя, обозначается $\bar{C} = \overline{\rho C} / \bar{\rho}$.

Сначала для простоты выкладок рассмотрим случай, когда химические реакции отсутствуют.

При больших значениях чисел Рейнольдса Re двумерное осесимметрическое течение описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{v}) + \frac{\bar{\rho}\bar{v}}{y} = 0; \quad (1)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}'^2) - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{u}'\bar{v}') - \frac{\bar{\rho}\bar{u}'\bar{v}'}{y}; \quad (2)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}'\bar{v}') - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{v}'^2) - \frac{\bar{\rho}(\bar{v}'^2 - \bar{w}'^2)}{y}; \quad (3)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}'\bar{h}'_0) - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{v}'\bar{h}'_0) - \frac{\bar{\rho}\bar{v}'\bar{h}'_0}{y}; \quad (4)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{C}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{C}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}'\bar{C}') - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{v}'\bar{C}') - \frac{\bar{\rho}\bar{v}'\bar{C}'}{y}; \quad (5)$$

$$h_0 = \int_0^{\bar{T}} C_p dT + 0,5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + K; \quad (6)$$

$$p = \bar{\rho}RT/M_{\Sigma}; \quad (7)$$

где x, y — ортогональная система координат (ось x совпадает с осью струи); u, v — осевая и радиальная компоненты скорости; ρ — плотность; p — давление; h_0 — удельная полная энтальпия; C — концентрация инертного компонента; R — универсальная газовая постоянная; M_{Σ} — молекулярная масса газовой смеси; c_p — удельная теплоемкость; T — температура.

Для замыкания системы необходимо использовать какую-нибудь модель турбулентности. Многие ныне используемые модели включают уравнения переноса турбулентной кинетической энергии $K = v_i^2/2$ (v_i — i -я компонента скорости) и скорости диссипации энергии ϵ . При больших значениях Re эти уравнения имеют вид

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial K}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial K}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}'K') - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{v}'K') - \frac{\bar{\rho}\bar{v}'K'}{y} + \bar{\rho}P + \pi_k - \bar{\rho}\epsilon + \kappa; \quad (8)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\epsilon}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\epsilon}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}'\epsilon') - \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{v}'\epsilon') - \frac{\bar{\rho}\bar{v}'\epsilon'}{y} + \frac{\epsilon}{K}(C_{\epsilon 1}\bar{\rho}P + \pi_k - C_{\epsilon 2}\bar{\rho}\epsilon + \kappa); \quad (9)$$

где

$$P = -(\bar{u}'^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{u}'\bar{v}'(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x}) + \bar{v}'^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + \frac{\bar{v}'\bar{w}'^2}{y});$$

$$\pi_k = \frac{\bar{\rho}'u'}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \frac{\bar{\rho}'v'}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}; \quad \kappa = \bar{\rho}'\frac{\partial v'_i}{\partial x_i};$$

$C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$ — числовые коэффициенты.

2. Для определения входящих в систему корреляций пульсационных величин в данной работе используется алгебраическая модель напряжений и потоков, основные принципы построения которой изложены в [4]. Используются следующие дополнительные условия:

1) в исходных уравнениях переноса турбулентных напряжений и потоков отброшены члены, содержащие градиент давления. Кроме того, предполагается равновесие между диссипацией и генерацией;

2) рассмотрим систему координат s, n (s — координата, направленная вдоль линии тока; n — по нормали к ней). Предполагается, что для членов, содержащих корреляции турбулентных пульсаций, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial s} \ll \frac{\partial}{\partial n} \quad \text{для всех параметров, кроме } \rho;$$

$$\bar{V}_s \gg \bar{V}_n; \quad \frac{\partial\bar{p}}{\partial n} = 0.$$

Такой подход к параболизации является более строгим, чем обычно используемые допущения

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}; \quad \bar{u} \gg \bar{v}; \quad \frac{\partial\bar{p}}{\partial y} = 0;$$

3) для течений постоянной плотности полученная модель турбулентности должна совпасть с классической $K-\epsilon$ моделью [5].

В результате система уравнений приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\rho}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{\rho}\bar{v}) + \frac{\bar{\rho}\bar{v}}{y} = 0; \quad (10)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \bar{\rho}\bar{v}'^2_n) + \frac{1}{y\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial y}(y\mu_T\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}); \quad (11)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\bar{p} + \bar{\rho}\bar{v}'^2_n) + \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial y}(\mu_T\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}); \quad (12)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial y} = \frac{1}{y\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial y}(y\mu_T(\frac{1}{Pr_T}\frac{\partial\bar{h}}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\bar{u}}{\cos^2\theta}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y})); \quad (13)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\bar{C}}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\bar{C}}{\partial y} = \frac{1}{y\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial y}(y\mu_T\frac{1}{Pr}\frac{\partial\bar{C}}{\partial y}); \quad (14)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial K}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{1}{y\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial y}(y\mu_T\frac{\partial K}{\partial y}) + \bar{\rho}P + \pi_k - \bar{\rho}\epsilon + \kappa; \quad (15)$$

$$\bar{\rho}\bar{u}\frac{\partial\epsilon}{\partial x} + \bar{\rho}\bar{v}\frac{\partial\epsilon}{\partial y} = \frac{1}{y\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial y}(y\mu_T\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\epsilon}{\partial y}) +$$

$$+\frac{\varepsilon}{k}(C_{\varepsilon 1} \bar{\rho} P + \pi_k - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon + \kappa); \quad (16)$$

$$h = \int_0^{\bar{T}} C_p dT, \quad h_0 = h + 0,5(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) + K; \quad (17)$$

$$p = \bar{\rho} R \bar{T} / M_{\Sigma}; \quad (18)$$

$$\mu_T = c_{\mu} \frac{\bar{V}_n^2}{0,52K} \bar{\rho} \frac{K^2}{\varepsilon}; \quad (19)$$

$$\bar{V}_n^2 / K = \frac{2}{3} \left(1 - 0,222 \left(1 - \frac{\kappa}{\bar{\rho} \varepsilon} \right) \right); \quad (20)$$

$$\bar{\rho} P = \frac{\mu_T}{\cos^4 \theta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (21)$$

Здесь предполагается, что угол наклона линии тока θ мало меняется поперек слоя смешения и его можно положить равным значению на внутренней границе слоя смешения.

Числовые коэффициенты, входящие в уравнения (10) — (21), выбираются следующими:

$$Pr_T = 0,7, \quad \sigma = 1,3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1,43,$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1,92; \quad c_{\mu} = 0,09 \text{ при } \theta \neq 0,$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1,92 - 0,0667f; \quad c_{\mu} = 0,09 - 0,04f \text{ при } \theta = 0,$$

где

$$f = \left| \frac{y_G}{2\Delta u} \left(\frac{d\bar{u}_0}{dx} - \left| \frac{d\bar{u}_0}{dx} \right| \right) \right|^{0,2};$$

u_0 — значение скорости на оси; Δu — перепад скоростей на границах слоя смешения; y_G — ширина слоя смешения (см. работу [5]).

По сравнению с уравнениями для течений постоянной плотности в модель турбулентности входят дополнительные члены: корреляция пульсаций давления и дивергенции скорости κ и параметр π_k , учитывающий влияние градиента давления. Удачное моделирование этих параметров определяет возможность учета влияния сжимаемости на турбулентность.

Параметр κ имеет значение только при больших скоростях. Для него предложена следующая формула:

$$\kappa = -\bar{\rho} \varepsilon (C_A M_T + C'_A M_T^2), \quad (22)$$

где $M_T = \sqrt{K/a}$; $a = \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ — скорость звука; γ — показатель адиабаты; $C_A = 0,3$; $C'_A = 7,5$ — числовые константы.

С увеличением скорости увеличивается значение κ , что приводит к следующим эффектам:

1) уменьшаются значения K и ε (см. уравнения (15) — (16)), причем K уменьшается сильнее. Это приводит к уменьшению коэффициента турбулентного переноса μ_T ;

2) уменьшается отношение \bar{v}'^2_n / K , что тоже ведет к уменьшению μ_T ;

3) при $\theta = 0$ диагональные компоненты тензора напряжений Рейнольдса определяются по формулам

$$\bar{u}'^2 / K = \frac{2}{3} \left(1 + 0,444 \left(1 - \frac{\kappa}{\bar{\rho} \varepsilon} \right) \right); \quad (23)$$

$$\bar{v}'^2 / K = \bar{w}'^2 / K = \frac{2}{3} \left(1 - 0,222 \left(1 - \frac{\kappa}{\bar{\rho} \varepsilon} \right) \right); \quad (24)$$

Очевидно, что отношение \bar{u}'^2 / \bar{v}'^2 растет с увеличением скорости потока.

Таким образом, наличие параметра κ уменьшает интенсивность турбулентного смешения и увеличивает анизотропность турбулентности. Эти факты подтверждаются экспериментальными данными [6,7].

Параметр π_k моделируется формулой из работы [8]:

$$\pi_k = C_{\pi} \frac{K}{a^2} \bar{u} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad (25)$$

где $C_{\pi} = 2,5$

3. При расчете химически реагирующих течений систему уравнений (10) — (21) необходимо дополнить уравнениями неразрывности химических компонентов:

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial x} + \bar{\rho} \bar{v} \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} = \frac{1}{y \cos^2 \theta} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \mu_T \frac{1}{Pr} \frac{\partial \bar{C}_i}{\partial y} \right) + W_i \quad (26)$$

($i = 1, \dots, N$),

где C_i — массовая концентрация i -го компонента; N — число химических компонентов; W_i — массовая скорость образования i -го компонента; W_i является нелинейной функцией температуры, плотности и концентраций компонентов: $W_i = W_i(T, \rho, C_i)$.

В данной работе используется допущение

$$W_i(T, \rho, C_i) = W_i(\bar{T}, \bar{\rho}, \bar{C}_i), \quad (27)$$

т.е. не учитывается влияние турбулентности на химические процессы.

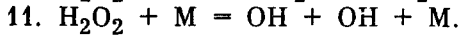
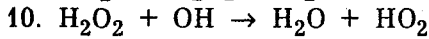
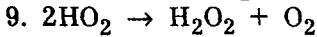
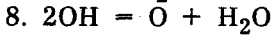
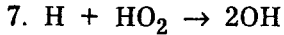
При указанных условиях удельная энтальпия газовой смеси h определяется по формулам

$$\bar{h} = \sum_i^N C_i h_i; \quad h_i = h_{i0} + \int_0^{\bar{T}} C_{pi} dT, \quad (28)$$

где h_{i0} и C_{pi} — соответственно энтальпия образования и теплоемкость i -го компонента.

При расчете взаимодействия продуктов сгорания реактивных двигателей с атмосферой учитываются следующие реакции [9]:

1. $CO + OH = CO_2 + H$
2. $OH + H_2 = H_2O + H$
3. $H + O_2 = OH + O$
4. $O + H_2 = OH + H$
5. $H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$
6. $OH + HO_2 \rightarrow H_2O + O_2$



Константы скоростей этих реакций берутся из работы [10].

4. Систему уравнений в частных производных (10) — (16) и (26) можно записать в дивергентной форме:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + H = Y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(YL \frac{\partial E}{\partial y} \right) + S + W, \quad (29)$$

где

$$F = [\rho u, \rho u^2 + P^*, \rho uv, \rho uh_0, \rho ue, \rho uK, \rho uC_1, \dots, \rho uC_N]^T;$$

$$G = [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P^*, \rho vh_0, \rho ve, \rho vK, \rho vC_1, \dots, \rho vC_N]^T;$$

$$H = \frac{1}{y} [\rho v, \rho uv, \rho v^2, \rho vh_0, \rho ve, \rho vK, \rho vC_1, \dots, \rho vC_N]^T;$$

$$E = [\rho, u, v, h, e, K, C_1, \dots, C_N]^T;$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{y} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{y} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{y} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{y} \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u\mu/\cos^2\theta & 0 & \mu/Pr & 0 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu/\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu/Pr & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu/Pr \end{pmatrix};$$

$$S = [0, 0, 0, 0, \frac{\epsilon}{K}(C_{\epsilon 1} \rho P - C_{\epsilon 2} \rho \epsilon + \pi_K + \kappa),$$

$$\rho P - \rho \epsilon + \pi_K + \kappa, 0, \dots, 0]^T;$$

$$W = [0, 0, 0, 0, 0, 0, W_1, \dots, W_N]^T;$$

$$\bar{y} = y/R_a, \quad \bar{x} = x/R_a, \quad \mu = \mu_T/\cos^2\theta, \quad Pr = Pr_T;$$

$$R_a \text{ — радиус сопла; } p^* = p + \rho \bar{v}_n^2.$$

Здесь и далее знаки осреднения опущены.

Имеет смысл перейти к криволинейной системе координат, которая позволила бы расширять расчетную область по мере расширения струи. Для затопленных струй наиболее удобной представляется система координат Мизеса:

$$\xi = \bar{x}, \quad \eta = \psi/\psi_E, \quad (30)$$

где функция тока ψ определяется соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{x}} = -\frac{\rho v \bar{y}}{\psi}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}} = -\frac{\rho u \bar{y}}{\psi}; \quad (31)$$

ψ_E — значение ψ на внешней границе струи.

В новой системе координат уравнение (29) запишется в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \bar{a} \frac{\partial F}{\partial \eta} + b \frac{\partial G}{\partial \eta} + \bar{H} = \bar{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\bar{L} \frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + \bar{S} + \bar{W}, \quad (32)$$

где

$$\bar{H} = HR_a, \quad \bar{J} = Y^{-1}b; \quad \bar{L} = YLb/R_a; \quad \bar{S} = SR_a,$$

$$\bar{W} = WR_a; \quad \bar{a} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\psi_E} \left(\frac{\rho v \bar{y}}{\psi} + \eta \psi'_E \right); \quad b = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\rho u \bar{y}}{\psi_E \psi}.$$

В рассматриваемых струях имеются области, в которых $u < a$ и через которые возможно распространение возмущений вверх по потоку. Задача становится краевой. Для устранения этого неудобства в данной работе использовался специальный метод расщепления продольной составляющей градиента давления.

При этом в дозвуковых областях удобнее решать иную, чем (32), систему уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + Z \frac{\partial f}{\partial \eta} + X \frac{\partial g}{\partial \eta} + h = \bar{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\bar{L} \frac{\partial E}{\partial \eta} \right) + \bar{s} + \bar{w}, \quad (33)$$

где

$$f = [\rho u, u, v, h_0, e, K, C_1, \dots, C_N]^T;$$

$$g = [\rho v, 0, p^*, 0, 0, 0, 0, \dots, 0]^T;$$

$$h = \left[\frac{\rho v}{\bar{y}}, \frac{1}{\rho u} \frac{\partial p^*}{\partial x}, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0 \right]^T;$$

$$\bar{J} = \bar{J}/(\rho u); \quad \bar{s} = \bar{S}/(\rho u); \quad \bar{w} = \bar{W}/(\rho u);$$

$$Z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b/(\rho u) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$$A = -\eta \psi'_E/\psi_E.$$

Вопрос определения p^* и $\partial p^* / \partial x$ будет рассмотрен в разд. 4.3.

Уравнения переноса K и ϵ , а также уравнения неразрывности химических компонентов содержат жесткий источник — S и W соответственно. Эти уравнения лучше решать отдельно, поэтому при решении систем (32) и (33) применялся принцип расщепления по физическим процессам.

Например, вместо уравнения (32) на каждом шаге по ξ ($\xi^n \leq \xi \leq \xi^{n+1}$) решается последовательность уравнений

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \bar{a} \frac{\partial F}{\partial \eta} + b \frac{\partial G}{\partial \eta} + H = \bar{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(L \frac{\partial E}{\partial \eta} \right); \quad (34)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \xi} = \bar{S}; \quad (35)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \xi} = \bar{W} \quad (36)$$

при выполнении условий

$$F_1(\xi^n, \eta) = F(\xi^n, \eta); \quad F_2(\xi^n, \eta) = F_1(\xi^{n+1}, \eta);$$

$$F_3(\xi^n, \eta) = F_2(\xi^{n+1}, \eta); \quad F(\xi^{n+1}, \eta) = F_3(\xi^{n+1}, \eta).$$

Аналогично решается уравнение (33).

4.1. Для решения системы уравнений (34) использовалась специальная модификация неявного метода Маккормака [11]. Применение этой численной схемы для сверхзвуковых струй подробно описано в работе [12].

Разностная схема:

предиктор:

$$\begin{aligned} \Delta F_k^n &= \Delta \xi \left(-(\bar{a}_k^n (F_{k+1}^n - F_k^n) + \bar{b}_k^n (G_{k+1}^n - G_k^n)) / \Delta \eta - \right. \\ &\quad \left. - \bar{H}_k^n + \bar{J}_k^n / (2 \Delta \eta^2) ((\bar{L}_{k+1}^n + \bar{L}_k^n) (E_{k+1}^n - E_k^n) - \right. \\ &\quad \left. - (\bar{L}_k^n + \bar{L}_{k-1}^n) (E_k^n - E_{k-1}^n)) \right); \end{aligned}$$

$$\left(I + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} |A|_k^n + \Delta \xi |B|_k^n \right) \delta F_k^* = \Delta F_k^n + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} |A|_k^n \delta F_{k+1}^*;$$

$$F_k^* = F_k^n + \delta F_k^*; \quad (37)$$

корректор:

$$\begin{aligned} \Delta F_k^n &= \Delta \xi \left(-(\bar{a}_k^{n+1} (F_k^* - F_{k-1}^*) + \bar{b}_k^{n+1} (G_k^* - G_{k-1}^*)) / \Delta \eta - \right. \\ &\quad \left. - \bar{H}_k^* + \bar{J}_k^* / (2 \Delta \eta^2) ((\bar{L}_{k+1}^* + \bar{L}_k^*) (E_{k+1}^* - E_k^*) - \right. \\ &\quad \left. - (\bar{L}_k^* + \bar{L}_{k-1}^*) (E_k^* - E_{k-1}^*)) \right); \end{aligned}$$

$$\left(I + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} |A|_k^* + \Delta \xi |B|_k^* \right) \delta F_k^{n+1} =$$

$$= \Delta F_k^* + \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} |A|_k^* \delta F_{k-1}^{n+1};$$

$$F_k^{n+1} = \frac{1}{2} (F_k^n + F_k^* + \delta F_k^{n+1}). \quad (38)$$

Здесь I — единичная матрица.

Матрицы $|A|$ и $|B|$, входящие в неявные части разностной схемы, связаны с матрицами Якоби $A = \bar{a} I + b \frac{\partial G}{\partial F}$ и $B = \frac{\partial H}{\partial F}$, имеют положительные собственные значения и строятся из условия обеспечения абсолютной устойчивости.

Матрица $|A|$ представляется в виде

$$|A| = S_A^{-1} D S_A, \quad (39)$$

где S_A^{-1} — матрица, в столбцах которой расположены координаты собственных векторов матрицы $\frac{\partial D}{\partial F}$, D — диагональная матрица с элементами, зависящими от собственных значений матрицы A и коэффициента вязкости μ :

$$d_j = \max(0, 5(|a_j| + 2l/\Delta \eta - \Delta \eta/\Delta \xi), 0);$$

$$a_{1,2,5,7,\dots,\sigma+N} = \bar{a} + b v / u, \quad a_{3,4} = \bar{a} + b(uv \pm aw) / z;$$

$$z = u^2 - a^2; \quad w = \sqrt{z + v^2};$$

$$l = \frac{b^2 \mu}{\rho u R_a z} (u^2 (\gamma - \beta / \cos^2 \theta + \gamma / Pr) - a^2 / Pr), \quad \beta = \gamma - 1;$$

$$S_A^{-1} = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta u & (av + uv) / w & (uw - av) / w & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta v & (vw - au) / w & (au + vw) / w & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & \epsilon & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & K & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & C_1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & C_N & C_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\kappa_1 = 2a^2 - \beta(h_J - 2\alpha), \quad \kappa_2 = a^2 + 2\alpha\beta;$$

$$\alpha = 0,5(u^2 + v^2); \quad h_J = h_0 - K.$$

Таким образом, влияние вязкости учитывается только введением корректирующего слагаемого l .

Матрица $|B|$ определяется соотношением

$$|B| = B I, \quad (40)$$

где

$$B = \max(0, 5\varphi - 1 / \Delta \xi, 0);$$

$$\varphi = |v| \left((\gamma + 1)u + \sqrt{(\gamma - 1)^2 u^2 + 4a^2} \right) / (2yz).$$

Полученная разностная схема является безусловно устойчивой; обращение матриц в неявной части (37), (38) представляет тривиальную операцию, подробности которой изложены в работе [11].

Для подавления осцилляций в районе скачков уплотнения в разностную схему вводилась искусственная вязкость: к правой части уравнения (34) добавлялся член

$$Y^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Y A_v \frac{\partial F}{\partial \eta} \right).$$

где $A_{\nu} = f(p) \Delta \eta \lambda_{\max}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы A ; $f(p) = |p_{k+1} - 2p_k + p_{k-1}| / (4p_k)$.

Граничные условия на оси струи задавались в виде

$$\frac{\partial F_i}{\partial \eta} = 0 \text{ для } i \neq 3; \quad F_3 = 0. \quad (41)$$

Здесь i — номер компоненты вектора F .

4.2. В дозвуковых областях струи при расщеплении используется уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + Z \frac{\partial f}{\partial \eta} + X \frac{\partial g}{\partial \eta} + h = \bar{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\bar{L} \frac{\partial E}{\partial \eta} \right), \quad (42)$$

которое решается с помощью разностной схемы, аналогичной (38) — (39). По-другому определяются матрицы $|A|$ и $|B|$ в неявной части схемы:

$$|B| = 0; \quad (43)$$

$$|A| = dI, \quad (44)$$

где

$$d = \max(0,5(|\lambda| + 2l/\Delta\eta - \Delta\eta/\Delta\xi), 0);$$

$$\lambda = \bar{a} + b v / u; \quad l = b^2 \mu / (\rho u R_a Pr).$$

4.3. Координата \bar{y} может определяться по следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} = v / u + \frac{\eta \psi'_{E \psi}}{\rho u \bar{y}}; \quad (45)$$

$$\bar{y}^2 = \int_0^{\psi} \frac{d\psi^2}{\rho u}. \quad (46)$$

Эти уравнения получаются из уравнений (30), (31).

Состыковка «сверхзвуковой» (уравнение (32)) и «дозвуковой» (уравнение (33)) методик осуществляется следующим образом.

В каждом сечении струи $\xi = \xi^n$ определяются граничные точки разностной сетки KU и KD (см. рисунок), в которых скорость $u \leq 1,2a$ (точка KD существует только при наличии дозвуковой области за диском Маха).

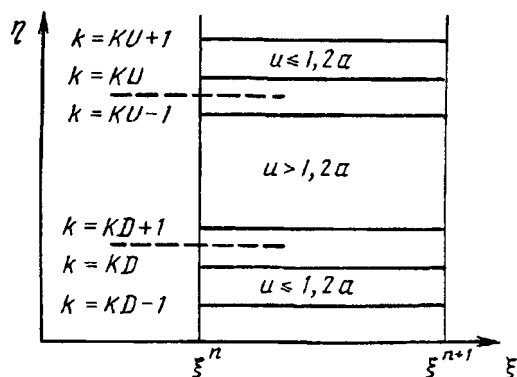


Рис. Разностная сетка

В узловых точках $k=1, \dots, KD$ и $k=KU, KU+1, \dots, NN$ расчет ведется по «дозвуковой» методике (NN — число узлов сетки). При $k=KD+1, \dots, KU-1$ используется «сверхзвуковая» методика. При переходе от «дозвуковой» методики к «сверхзвуковой» в узлах $k=KU$ и $k=KD$ по известным значениям приращений δf_k проводится определение приращений δF_k , которые затем используются в неявной части «сверхзвуковой» методики. Аналогично при переходе от «сверхзвуковой» методики к «дозвуковой» в узлах $k=KD+1$ и $k=KU-1$ определяют приращения δf_k по заданным приращениям δF_k .

Важным является определение значений p^* и $\partial p^* / \partial x$ в «дозвуковых» областях струи.

Во внешней части струи полагается

$$p^* = p_E; \quad \frac{\partial p^*}{\partial x} = 0, \quad (47)$$

где p_E — давление во внешнем потоке.

В области за диском Маха принимается $\partial p^* / \partial x = 0$, а давление p^* определяется из условия совпадения в узле $k=KD+4$ значений поперечной координаты \bar{y} , определенных по уравнениям (45) и (46). Такой подход к определению давления удобнее используемого в работе [3] метода, так как не требует итеративного решения системы уравнений и привлечения метода характеристик. Это преимущество достигается за счет использования координат Мизеса.

Место расположения диска определяется так же, как в работе [3]: по условию равенства нулю угла наклона линии тока за тройной точкой.

4.4. Для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (35) и (36) использовались неявные разностные схемы второго порядка аппроксимации

$$\left(I - 0,5 \Delta \xi \frac{\partial \bar{S}^n}{\partial F} \right) (F^{n+1} - F^n) = \Delta \xi \bar{S}^n; \quad (48)$$

$$\left(I - 0,5 \Delta \xi \frac{\partial \bar{W}^n}{\partial F} \right) (F^{n+1} - F^n) = \Delta \xi \bar{W}^n. \quad (49)$$

Матрицы Якоби $\frac{\partial \bar{W}}{\partial F}$ и $\frac{\partial \bar{S}}{\partial F}$ определяются численно. Они имеют вырожденные формы, и поэтому решение уравнений (48) и (49) сводится к обращению матриц соответственно второго и $(N-NE)$ -го порядка. Здесь через NE обозначено число химических элементов.

4.5. На каждом шаге по продольной координате ξ в каждом узле сетки решается система нелинейных уравнений для определения зависимых переменных $\rho, u, v, p, T, \epsilon$ и т.д. по компонентам вектора F или f . Для этого используется метод Ньютона.

Выводы

Разработана методика расчета сверхзвуковых турбулентных реагирующих струй, истекающих в затопленное пространство и дозвуковой спутный поток. Предложена модель турбулентности, позволяющая учесть влияние сжимаемости и неизобаричности на интенсивность турбулентного смешения.

Методика может быть использована для оценки вредного воздействия реактивных двигателей на окружающую среду.

Summary

Developed is a method to compute supersonic turbulent reaction jet exhausting into quiescent and in the subsonic wake flow. The numerical march method used is unconditionally stable; there is no necessity to solve equations with block three-diagonal matrixes. The turbulence model is suggested which considers compressibility and non-isobaric properties affecting the turbulent mixing intensity. The method developed can be used to compute a harm from jet engines to environment.

Литература

1. Исии Р., Умеда Я. Численное исследование двухфазных струй // *Аэрокосмическая техника*. 1988. № 12. С. 31 — 40.
2. Козлов В.Е. Метод расчета слабонеизобарической сверхзвуковой турбулентной струи в дозвуковом спутном потоке // *Сверхзвуковые газовые струи*. — Новосибирск: Наука, 1983. — С. 64 — 72.
3. Dash S.V., Wolf D.E. «Interactive Phenomena in Supersonic Jet Mixing Problems,

Part 1,» *AIAA Journal*, Vol. 22, 1984, No. 7, pp. 905 — 913.

4. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В.Колльмана. — М.: Мир, 1984. — 464 с.
5. Launder B.E., Morse A., Rodi W., Spalding D.B. «Prediction of Free Shear Flows. Comparison of the Performance of Six Turbulence Models,» *NASA-SP 321*, 1972, pp. 361 — 426.
6. Lau J.c., Morris P.J., Fisher M.J. «Measurement in Subsonic and Supersonic Free Jets Using a Laser Velocimeter,» *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 93, 1979, part 1, pp. 1 — 27.
7. Lau J.C. Effects of Exit Mach Number and Temperature on Mean-Flow and Turbulence Characteristics in Round Jets. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 105, 1981, pp. 193 — 218.
8. Wilcox D.C., Alber I.E. A Turbulence Model for High Speed Flows, *Proceedings of the 1972 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute*, 1972, pp. 231 — 252.
9. Bilger R.W., Starnes S.Y., Kee R.J. «On Reduced Mechanisms for Methane-Air Combustion in Nonpremixed Flames,» *Combustion and Flame*, Vol 80, 1990, pp. 135 — 149.
10. Химия горения / Под ред. У.Гардинера мл. — М.: Мир, 1988. — 464 с.
11. MacCormack R.W. A Numerical Method for Solvin the Eguations of Compressible Viscous Flow. *AIAA Paper 81-0110*, Jan. 1981.
12. Molchanov A.M. Application of the Implicit MacCormack Method to the Computation of Supersoic Turbulent Jets, Using an Algebraic Stress Model. *The Second Japan-Soviet Union Joint Symposium on Computational Fluid Dynamics*, 1990, pp. 231 — 238.

АО «Интеравиа-Экология»

Статья поступила в редакцию 29.04.93