УДК 532.511:533.6.011:51

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЙ

А. М. МОЛЧАНОВ

Разработан эффективный безусловно устойчивый численный метод решения уравнений, описывающих течение сверхзвуковых струй невязкого газа.

Для расчета сверхзвуковых неизобарических струй обычно применяются явные маршевые методы, которые сопряжены с большими затратами машинного времени из-за жестких ограничений на шаг интегрирования в маршевом направлении. Например, в работе [1] время счета варианта с нерасчетностью струи 100 на ЭВМ БЭСМ-6 составляет 4 часа.

Целью статьи является разработка эффективного неявного маршевого метода решения стационарных уравнений движения газа. Этот метод, основанный на идеях работы [2], является безусловно устойчивым и не требует обращения блочных или скалярных трехдиагональных матриц. Для упрощения рассматривается только течение невязкого газа, однако метод легко распространяется и на вязкие течения. В статье изложена методика численного решения, приведены результаты некоторых расчетов и проведено сопоставление с результатами других авторов.

Стационарное двухмерное течение невязкого сжимаемого газа описывается системой дифференциальных уравнений, записанных в консервативной форме:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{y}} + H = 0, \tag{1}$$

где

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u I_S \end{bmatrix}; \quad \bar{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v I_S \end{bmatrix}; \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} \nu\rho v/\bar{y} \\ \nu\rho uv/\bar{y} \\ \nu\rho v^2/\bar{y} \\ \nu\rho v I_S/\bar{y} \end{bmatrix}.$$

К дифференциальным уравнениям добавляются уравнения

$$I_S = I + 0{,}5\,(u^2 + v^2); \tag{2}$$

$$p = \rho RT; \quad (3) \qquad\qquad I = \int_{T_0}^{T} C_p\, dT. \quad (4)$$

Здесь ρ — плотность; u, v — компоненты вектора скорости вдоль осей $\bar{x}$, $\bar{y}$ соответственно (ось $\bar{x}$ совпадает с осью струи); p — давление; I — энтальпия; I_S — энтальпия торможения; T — температура; R — газовая постоянная; C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении; T_0 — стандартная температура; $\nu = 0$ — в плоском течении, $\nu = 1$ — в осесимметричном течении.

В статье рассматриваются полностью сверхзвуковые течения ($u > a$), поэтому постановка задачи Коши для системы (1) — (4) корректна, и для численного решения можно применять маршевые методы. Скорость звука $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$, где $\gamma = C_p/(C_p - R)$ — показатель адиабаты.

Система координат $(\bar{x}, \bar{y})$ неудобна для быстро расширяющихся струй большой нерасчетности, поэтому необходимо перейти к криволинейной системе координат (ξ, η), расширяющейся вместе со струей:

$$\xi = x; \quad \eta = \eta\,(x, y), \tag{5}$$

где $x=\overline{x}/L$; $y=\overline{y}/L$; L — характерный размер струи, например, радиус среза сопла R_a. В новой системе координат уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}+H=0, \tag{6}$$

где

$$F=\overline{F}/b;\quad G=\overline{G}+\overline{a}\overline{F}/b;\quad H=\overline{H}L/b;\quad a=\frac{\partial \eta}{\partial x};\quad b=\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

Пользуясь методом построения разностных схем [2], получим для решения уравнения (6) следующую разностную схему:
предиктор:

$$\Delta F_i^n=-\Delta\xi/\Delta\eta\,(G_{i+1}^n-G_i^n)-\Delta\xi\,H_i^n; \tag{7}$$

$$(E+\Delta\xi/\Delta\eta\,|A|_i^n+\Delta\xi\,|B|_i^n)\,\delta F_i^{\overline{n+1}}=\Delta F_i^n+\Delta\xi/\Delta\eta\,|A|_{i+1}^n\,\delta F_{i+1}^{\overline{n+1}}; \tag{8}$$

$$F_i^{\overline{n+1}}=F_i^n+\delta F_i^{\overline{n+1}}; \tag{9}$$

корректор:

$$\Delta F_i^{\overline{n+1}}=-\Delta\xi/\Delta\eta\,(G_i^{\overline{n+1}}-G_{i-1}^{\overline{n+1}})-\Delta\xi\,H_i^{\overline{n+1}}; \tag{10}$$

$$(E+\Delta\xi/\eta\Delta\,|A|_i^{\overline{n+1}}+\Delta\xi\,|B|_i^{\overline{n+1}})\,\delta F_i^{n+1}=\Delta F_i^{\overline{n+1}}+\Delta\xi/\Delta\eta\,|A|_{i-1}^{\overline{n+1}}\,\delta F_{i-1}^{n+1}; \tag{11}$$

$$F_i^{n+1}=\frac{1}{2}\,(F_i^n+F_i^{\overline{n+1}}+\delta F_i^{n+1}). \tag{12}$$

Матрицы $|A|$ и $|B|$, входящие в соотношения (8) и (11), связаны с матрицами Якоби $A=\frac{\partial G}{\partial F}$ и $B=\frac{\partial H}{\partial F}$ и выбираются из условия обеспечения безусловной устойчивости разностной схемы.

Матрицу Якоби $\Gamma=\frac{\partial \overline{G}}{\partial \overline{F}}$ можно представить в виде $\Gamma=\sigma^{-1}\Lambda\sigma$, где σ^{-1} — матрица, в столбцах которой расположены координаты собственных векторов матрицы Γ, а Λ — диагональная матрица с собственными значениями матрицы Γ на диагонали. Тогда матрица $|A|$ определяется соотношением

$$|A|=\sigma^{-1}D\sigma, \tag{13}$$

где D — диагональная матрица с элементами

$$d_j=\max\left\{\left[\frac{1}{2}\,|\overline{a}+b\,\lambda_j(\Gamma)|-\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}\right],\ 0\right\}. \tag{14}$$

Здесь $\lambda_j(\Gamma)$ — j-е собственное значение матрицы Γ. Матрица $|B|$ определяется соотношением

$$|B|=\max\left[\left(\frac{1}{2}\,L\varphi-\frac{1}{\Delta\xi}\right),\ 0\right]E, \tag{15}$$

где $\varphi=\max\limits_j\left|\lambda_j\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial \overline{F}}\right)\right|$; E — единичная матрица.

Представление матриц $|A|$ и $|B|$ в форме (13), (15) позволяет свести операцию обращения матриц в неявной части разностной схемы (8), (11) к тривиальным операциям, не требующим больших затрат машинного времени и памяти [2].

Наиболее важным вопросом является получение аналитических выражений для параметров, входящих в матрицы $|A|$ и $|B|$, в данной статье эти выражения имеют вид

$$\lambda_{1,2}(\Gamma)=\frac{v}{u};\quad \lambda_3(\Gamma)=\frac{uv\mp aw}{u^2-a^2};\quad \lambda_4(\Gamma)=\frac{uv+aw}{u^2-a^2}, \tag{16}$$

где $w=\sqrt{u^2+v^2-a^2}$;

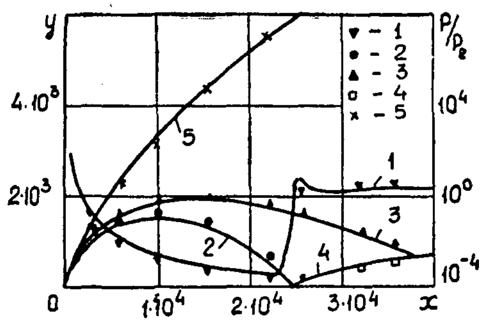

Рис. 1. Структура и осевое изменение безразмерного давления в сверхзвуковой спутной струе ($n = 10^7$):
кривые — расчет по разработанной методике, значки — данные работы [3]; 1 — изменение осевого давления p/p_e; 2 — висячий скачок; 3 — граница струи; 4 — отраженный скачок; 5 — присоединенный скачок

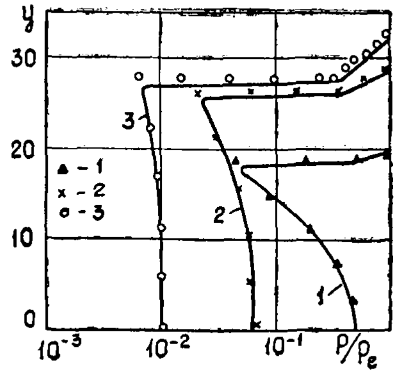

Рис. 2. Поперечные профили безразмерного давления в затопленной струе:
кривые — расчет по разработанной методике, значки — данные работы [3]; 1 — $x = 28{,}2$; 2 — $x = 56{,}1$; 3 — $x = 113$

$$\sigma^{-1} = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta u & \dfrac{av + uw}{w} & \dfrac{uw - av}{w} \\ 0 & \beta v & \dfrac{vw - au}{w} & \dfrac{au + vw}{w} \\ \varkappa_1 & 2\alpha\varkappa_2 & I_S & I_S \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где $\beta = \gamma - 1$; $\alpha = 0{,}5\,(u^2 + v^2)$; $\varkappa_1 = 2a^2 + \beta\,(2\alpha - I_S)$; $\varkappa_2 = \dfrac{a^2 + 2\alpha\beta}{2\alpha}$;

$$\varphi = \frac{1}{2L}\,\frac{\nu}{y}\,\left(|\pi| + \sqrt{\pi^2 - 4q}\right), \tag{18}$$

где

$$\pi = \frac{(\gamma + 1)\,uv}{u^2 - a^2}; \qquad q = \frac{\gamma v^2}{u^2 - a^2}.$$

На основе разработанного численного метода составлена программа для ЭВМ и проведен ряд расчетов сверхзвуковых осесимметричных невязких струй.

На рис. 1, 2 в качестве примера представлены результаты расчета сверхзвуковых струй идеального газа со следующими параметрами:

рис. 1: $M_a = 5$, $M_e = 10$, $n = 10^7$;
рис. 2: $M_a = 4$, $M_e = 0$, $n = 500$.

В расчетах принималось: $\gamma_a = 1{,}3$; $\gamma_i = 1{,}4$; $\theta = 10°$. Здесь M — число Маха; $n = p_a/p_e$ — нерасчетность струи; θ — угол полуконуса на выходе из сопла; индекс a относится к параметрам на срезе сопла, индекс e — к параметрам внешнего потока.

Из рис. 1, 2 видно, что результаты расчета по разработанной методике удовлетворительно согласуются с данными работы [3], в которой используется метод характеристик.

Все расчеты велись с числом узлов расчетной сетки $N = 40$. Время расчета на ЭВМ БЭСМ-6 при $n = 10^7$ равно 10 мин, при $n = 500$ — 5 мин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисов Н. Ф. Численный расчет неизобарических сверхзвуковых вязких струй, истекающих в спутный сверхзвуковой поток // Учен. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 1. С. 15—26.
2. Мак-кормак Р. В. Численный метод решения уравнений вязких сжимаемых течений // Аэрокосмическая техника. 1983. Т. 1. № 4. С. 114—123.
3. Аверенкова Г. К., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Дьяконов Ю. Н. и др. Сверхзвуковые струи идеального газа: В 2 ч. М.: Изд-во МГУ, 1970—1971.

Поступила в редакцию
06.07.88

УДК 532.526

НЕСЖИМАЕМЫЙ ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЛЕ С УЧЕТОМ ВДУВА

В. В. ОЖЕГОВ, В. Г. ПАВЛОВ

Рассматривается задача о ламинарном пограничном слое на вращающемся осесимметричном теле в условиях его обтекания однородным потоком, параллельным оси вращения, при наличии вдува или отсоса газа того же свойства, что и пограничный слой. Для решения задачи используется метод Блазиуса — Хоуарта.

Несжимаемый ламинарный пограничный слой на вращающемся осесимметричном теле при наличии вдува или отсоса газа того же состава и свойств, что и пограничный слой, описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial ru}{\partial x}+\frac{\partial rv}{\partial y}=0;\\ u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{w^2dr}{rdx}=U_e\frac{dU_e}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y};\\ u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{uw}{r}\frac{dr}{dx}=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{gathered}\tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered}y=0: u=0,\quad v=v_W(x),\quad w=\omega r(x);\\ y\to\infty: u\to U_e(x),\quad w\to 0.\end{gathered}\tag{2}$$

В уравнениях (1) используется ортогональная система координат: ось x — вдоль образующей тела; ось y — по нормали к поверхности; r — расстояние от точки на поверхности тела до оси симметрии. Переменные u, v, w — проекции скорости на касательную к телу, нормаль и бинормаль соответственно; ω — угловая скорость вращения относительно оси симметрии тела; v_W — скорость вдува (отсоса).

Используя уравнения неразрывности, уравнения движения (1) и граничные условия (2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}w^2=U_e\frac{dU_e}{dx}+\nu\frac{d^3\psi}{dy^3};\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\psi\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}w\frac{\partial\psi}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\end{gathered}\tag{3}$$

$$\begin{gathered}y=0:\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\quad \frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\psi+\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v_W(x),\quad w=\omega r(x);\\ y\to\infty:\frac{\partial\psi}{\partial y}\to U_e,\quad w\to 0.\end{gathered}\tag{4}$$