5. Турбулентные потоки скалярной величины

В предыдущих разделах мы, в основном, рассматривали вопросы, связанные с моделированием динамических характеристик турбулентности: напряжений Рейнольдса, турбулентной вязкости и т.д.

Однако в основную систему уравнений входят и другие параметры, связанные с турбулентным переносом. В частности, в уравнении энергии (2.6) присутствует член $\bar{\rho}\widetilde{u_j'' h''}$, имеющий физический смысл турбулентного потока энтальпии.

На практике мы сталкиваемся и с другими подобными параметрами, например, с турбулентным потоком массы того или иного компонента газовой смеси.

И энтальпия, и внутренняя энергия, и концентрация газового компонента являются скалярными величинами. Поэтому их турбулентные потоки называются *потоками скалярной величины*. Для общности обозначим эту величину через f.

Чаще всего для этих потоков используются формулы, основанные на градиентной гипотезе:

$$\bar{\rho}\widetilde{u_j'' f''} = -\frac{\mu_T}{\sigma_f}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}, \tag{5.1}$$

где σ_f - некий числовой коэффициент.

Для потока энтальпии это так называемое *турбулентное число Прандтля*. В практических расчетах это число полагают обычно константой, равной 0.7 для свободных течений, и 0.9 для пристеночной области.

Тем не менее, многочисленные экспериментальные данные показывают, что на самом деле турбулентное число Прандтля, введенное формулой (5.1), может меняться в весьма широком диапазоне: от 0.1 до 2. В данном разделе будут рассмотрены некоторые аспекты, которые позволят более корректно определять турбулентные потоки скалярных величин.

5.1. Уравнение для потока скалярной величины.

Общий вид уравнения переноса скалярной величины:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j f\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_j\right)=\omega \tag{5.2}$$

- в консервативной форме,

$$\rho\frac{\partial f}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial f}{\partial x_j}=\omega-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_j\right) \tag{5.3}$$

- в неконсервативной форме.

Уравнение энергии, записанное через энтальпию h, получается из (2.5) и имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j h\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j} \tag{5.4}$$

Таким образом, для уравнения энергии получается:

$$\omega=\frac{\partial p}{\partial t}+u_i\frac{\partial p}{\partial x_i}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{5.5}$$

$$J_j=q_j=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_j}=-\frac{\lambda}{C_P}\frac{\partial h}{\partial x_j} \tag{5.6}$$

Уравнение переноса потока скалярной величины $\widetilde{u_j'' f''}$ выводится аналогично выводу уравнения переноса напряжений Рейнольдса.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}&\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i'' f''\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i'' f''\right)}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho u_i'' f''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho\left(\widetilde{u_j}+u_j''\right)u_i'' f''}\right)=\\&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{u_i'' f''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\widetilde{u}_j\widetilde{u_i'' f''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' u_i'' f''}\right)\end{aligned} \tag{5.7}$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i'' f''\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i'' f''\right)=\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i'' f''\right)+\rho u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i'' f''\right)+u_i'' f''\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)\right]}_{=0}=$$

$$=\rho u_i''\left[\frac{\partial f''}{\partial t}+u_j\frac{\partial f''}{\partial x_j}\right]+\rho f''\left[\frac{\partial u_i''}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\right]$$

$$\frac{\partial u_i''}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t}-\widetilde{u}_j\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}-u_j''\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial f''}{\partial t}+u_j\frac{\partial f''}{\partial x_j}=\frac{\partial f}{\partial t}+u_j\frac{\partial f}{\partial x_j}-\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}-\widetilde{u}_j\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}-u_j''\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i'' f''\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i'' f''\right)}=\overline{\rho u_i''\left(\frac{\partial f}{\partial t}+u_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}-\cancel{\overline{\rho u_i''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}}-\cancel{\overline{\rho u_i''\widetilde{u}_j}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}}-\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}$$
$$+\overline{\rho f''\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}-\cancel{\overline{\rho f''}\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t}}-\cancel{\overline{\rho f''\widetilde{u}_j}\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}}-\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}$$

Т.е.

$$\begin{aligned}&\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i'' f''\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i'' f''\right)}=\overline{\rho u_i''\left(\frac{\partial f}{\partial t}+u_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}-\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}\\&+\overline{\rho f''\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}-\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}\end{aligned} \qquad (5.8)$$

Приравнивая (5.7) и (5.8) и подставляя (5.3) и уравнение количества движения, получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{u_i'' f''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\widetilde{u}_j\widetilde{u_i'' f''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' u_i'' f''}\right)=\\&=\overline{u_i''}\omega-\overline{u_i''\frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_j\right)}-\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}-\delta_{ji}\overline{f''\frac{\partial p}{\partial x_j}}+\overline{f''\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}-\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}\end{aligned} \qquad (5.9)$$

Учитывая что

$$-\delta_{ji}\overline{f''\frac{\partial p}{\partial x_j}}=-\delta_{ji}\overline{f''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}-\delta_{ji}\overline{f''\frac{\partial p'}{\partial x_j}}=-\delta_{ji}\overline{f''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ji}\overline{p'f''}\right)+\overline{p'\frac{\partial f''}{\partial x_i}}, \qquad (5.10)$$

получаем уравнение переноса потока скалярной величины в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{u_i'' f''}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\widetilde{u}_j\widetilde{u_i'' f''}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' u_i'' f''}+\delta_{ji}\overline{p'f''}\right)\\&\underbrace{-\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}-\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j}}_{(I)}+\underbrace{\left(\overline{f''\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}-\overline{u_i''\frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_j\right)}\right)}_{(II)}+\underbrace{\overline{p'\frac{\partial f''}{\partial x_i}}}_{(III)}+\underbrace{\overline{u_i''}\omega}_{(IV)}-\underbrace{\overline{f''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}}_{(V)}\end{aligned} \qquad (5.11)$$

В левой части этого уравнения стоит производная по времени и конвективный член, первый член правой части – диффузионный член.

Физический смысл и моделирование членов, входящих в источниковую часть уравнения (5.11):

(I) - генерация осредненным течением;

(II) - вязкая диссипация; согласно книге [4] в случае локальной изотропности этот член равен нулю.

(III) - корреляция пульсаций давлений с градиентом скалярной величины.

(IV) - корреляция пульсаций скорости и источника ω; как правило, этой величиной можно пренебречь

(V) - член, включающий градиент давления; этим членом с достаточной точностью можно пренебречь.

Как и в случае корреляции скоростей деформаций с пульсациями давления корреляция пульсаций давлений с градиентом скалярной величины разбивается на сумму двух физически разнородных частей: турбулентной части $\Pi_{if,1}$ и средних деформаций $\Pi_{if,2}$.

Первая часть имеет смысл тенденции к изотропности и моделируется как

$$\Pi_{if,1} = -C_{1\varphi}\bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i'' f''}}{\tau} \tag{5.12}$$

где τ - характерное время пульсаций. Обычно в качестве этого времени используется отношение K/ε, которое на самом деле характеризует только пульсацию скорости. Более правильно было бы учесть временной масштаб пульсаций скалярной величины - отношение $\frac{\widetilde{f''^2}}{\varepsilon_f}$.

Предлагается использование среднего геометрического между этими двумя временными масштабами

$$\tau_f = \sqrt{\frac{K}{\varepsilon}\frac{\widetilde{f''^2}}{\varepsilon_f}}, \tag{5.13}$$

где ε_f - диссипация скалярной величины $\widetilde{f''^2}$.

Для части $\Pi_{if,2}$ при малых скоростях потока предполагается, что она пропорциональна генерации за счет средней деформации [4]:

$$\Pi_{if,2} = C_{2\varphi}\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} \tag{5.14}$$

Учитывая результаты, полученные в параграфе 4 настоящей главы, резонно предположить по аналогии с формулой (4.16) следующую формулу для $\Pi_{if,2}$ при больших скоростях:

$$\Pi_{if,2} = C_{\Pi 1}C_{2\varphi}\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} - C_{\Pi 2}\mathrm{P}_{if} \tag{5.15}$$

где

$$\mathrm{P}_{if} = -\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} - \overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} \text{ -} \tag{5.16}$$

генерация.

Таким образом, член (III) уравнения (5.11) моделируется как

$$\overline{p'\frac{\partial f''}{\partial x_i}} = -C_{1\varphi}\bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i'' f''}}{\tau_f} + C_{\Pi 2}\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} + \left(C_{\Pi 2} + C_{\Pi 1}C_{2\varphi}\right)\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} \tag{5.17}$$

В результате источниковый член в правой части уравнения (5.11) моделируется как:

$$S_i = -\left(1 - C_{\Pi 2}\right)\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} + \left(C_{\Pi 2} + C_{\Pi 1}C_{2\varphi} - 1\right)\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} - C_{1\varphi}\bar{\rho}\frac{\widetilde{u_i'' f''}}{\tau_f} \tag{5.18}$$

Для турбулентного потока концентраций компонентов можно также применить алгебраическую модель. Простейшая модель получается, если положить $S_i \simeq 0$:

$$\widetilde{u_i'' f''} = \left[-\left(1 - C_{\Pi 2}\right)\widetilde{u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} + \left(C_{\Pi 2} + C_{\Pi 1}C_{2\varphi} - 1\right)\widetilde{f'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j}\right]\frac{\tau_f}{C_{1\varphi}} \tag{5.19}$$

Рассмотрим, как и в предыдущем разделе, случай тонкого сдвигового слоя. Полагаем, что индекс «1» относится к координате, направленной вдоль основного движения жидкости (например, вдоль струи), а индекс «2» - к координате, направленной перпендикулярно к этому направлению. Справедливы следующие соотношения:

$$\widetilde{u_2} \ll \widetilde{u_1}, \quad \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1} \ll \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_1} \ll \frac{\partial \widetilde{u_1}}{\partial x_2}$$

В этом случае поперечный поток скалярной величины равен:

$$\widetilde{u_2'' f''} = -\left(1 - C_{\text{П}2}\right) \frac{\widetilde{u_2'' u_2''}}{K} \frac{\tau_f}{C_{1\varphi}} K \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2}, \tag{5.20}$$

Сравнение этого выражения с формулой (5.1)

$$\bar{\rho} \widetilde{u_2'' f''} = -\frac{\mu_T}{\sigma_f} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2} \tag{5.21}$$

Позволяет получить следующее соотношение

$$\bar{\rho}\left(1 - C_{\text{П}2}\right) \frac{\widetilde{u_2'' u_2''}}{K} \frac{\tau_f}{C_{1\varphi}} K = \frac{\mu_T}{\sigma_f} \tag{5.22}$$

Если использовать, как и в разделе 4, в качестве u_2'' пульсацию скорости, направленную по нормали n к линии тока V_n'', то

(5.23)

В качестве формулы для коэффициента турбулентной вязкости используем (4.29) и с учетом (5.13) получаем формулу для турбулентного числа Прандтля-Шмидта σ_f

$$\sigma_f = \frac{\left(1 - C_{\text{П}1} C_2 - C_{\text{П}2}\right) C_{1\varphi}}{C_1 \left(1 - C_{\text{П}2}\right)} \sqrt{\frac{K}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}} \tag{5.24}$$

Константа $C_{1\varphi} = 3.0$ [4].

При малых скоростях ($C_{\text{П}1} = 1, \quad C_{\text{П}2} = 0$) получаем:

$$\sigma_f = \frac{\left(1 - C_2\right) C_{1\varphi}}{C_1} \sqrt{\frac{K}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}} \tag{5.25}$$

Если положить, что характерные масштабы пульсаций скорости $\frac{K}{\varepsilon}$ и скалярной величины $\frac{\widetilde{f''^2}}{\varepsilon_f}$ равны, то для малых скоростей получаем:

$$\sigma_f = \frac{\left(1 - C_2\right) C_{1\varphi}}{C_1} = \frac{\left(1 - 0.6\right) 3.0}{1.8} = 0.67 \tag{5.26}$$

Это значение хорошо согласуется с обычно используемым для свободных течений значением $\Pr_T = 0.7$.

Однако для более правильного описания турбулентного переноса следует учесть возможность того, что характерные масштабы пульсаций скорости и скалярной величины могут сильно отличаться. Для этого необходимо решать дополнительные уравнения: для $\widetilde{f''^2}$ и ε_f.

5.2. Уравнение для квадрата пульсаций скалярной величины (дисперсии) $\widetilde{f''^2}$

Очевидно, что

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho f'' f''\right)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho f'' f''}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{f'' f''}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{f''^2}\right)$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j f''^2\right)} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho\left(\tilde{u}_j + u_j''\right) f''^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j \widetilde{f''^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' f''^2}\right)$$

То есть,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho f''^2\right)} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j f''^2\right)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{f''^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j \widetilde{f''^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' f''^2}\right) \qquad (5.27)$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho f''^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j f''^2\right) = \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(f''^2\right) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f''^2\right) + f''^2\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)\right] =$$

$$= 2\rho f''\left[\frac{\partial f''}{\partial t} + u_j\frac{\partial f''}{\partial x_j}\right],$$

$$\frac{\partial f''}{\partial t} + u_j\frac{\partial f''}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + u_j\frac{\partial f}{\partial x_j} - \tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} - u_j''\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho f''^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j f''^2\right)} = \overline{2\rho f''\left[\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + u_j\frac{\partial f}{\partial x_j} - \tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} - u_j''\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}\right]} =$$

$$= 2\overline{\rho f''\left(\frac{\partial f}{\partial t} + u_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)} - \cancel{2\overline{\rho f''}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}} - \cancel{2\overline{\rho f''}\tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}} - 2\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}$$

Т.е.

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho f''^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j f''^2\right)}=2\overline{\rho f''\left(\frac{\partial f}{\partial t}+u_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}-2\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \qquad (5.28)$$

Приравниваем (5.27) и (5.28) и получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{f''^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\widetilde{f''^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' f''^2}\right)=2\overline{f''\left(\rho\frac{\partial f}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}-2\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \qquad (5.29)$$

Подставляем в это выражение уравнение (5.3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{f''^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\widetilde{f''^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' f''^2}\right)=2\overline{f''\omega}-2\overline{f''\frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_j\right)}-2\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \qquad (5.30)$$

Преобразуем некоторые члены этого уравнения

$$f''\frac{\partial}{\partial x_j}\left(J_j\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f''J_j\right)-J_j\frac{\partial f''}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(f''J_j\right)-\tilde{J}_j\frac{\partial f''}{\partial x_j}-J_j''\frac{\partial f''}{\partial x_j}$$

В результате уравнение (5.30) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{f''^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\widetilde{f''^2}\right)=$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{\rho u_j'' f''^2}-2\overline{f''J_j}\right)}_{(I)}\underbrace{-2\overline{\rho f'' u_j''}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}}_{(II)}+\underbrace{2\overline{J_j\frac{\partial f''}{\partial x_j}}}_{(III)}+\underbrace{2\overline{f''\omega}}_{(IV)} \qquad (5.31)$$

Физический смысл членов, входящих в правую часть этого уравнения:

I - диффузия пульсаций скалярной величины,

II - генерация,

III - диссипация,

IV - член, учитывающий влияние источника ω

Диффузионный поток скалярной величины представляется в виде

$$J_j=-\rho D_f\frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (5.32)$$

Тогда диссипация в уравнении (5.31) представляется как

$$\bar{\rho}\varepsilon_f\equiv-\overline{J_j\frac{\partial f''}{\partial x_j}}=\overline{\rho D_f\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f''}{\partial x_j}}=\overline{\rho D_f\frac{\partial f''}{\partial x_j}}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}+\overline{\rho D_f\frac{\partial f''}{\partial x_j}\frac{\partial f''}{\partial x_j}}\cong\bar{\rho}D_f\widetilde{\frac{\partial f''}{\partial x_j}\frac{\partial f''}{\partial x_j}} \qquad (5.33)$$

Диффузионные члены моделируются как

$$-\overline{\rho u_j'' f''^2} = \frac{\mu_T}{\sigma_{T,f}} \frac{\partial \widetilde{f''^2}}{\partial x_j}, \tag{5.34}$$

$$-2\overline{f'' J_j} = 2\overline{f'' \rho D_f \frac{\partial f}{\partial x_j}} = 2\overline{f'' \rho D_f} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} + \overline{\rho D_f \frac{\partial f''^2}{\partial x_j}} \cong \tilde{\rho} D_f \frac{\partial \widetilde{f''^2}}{\partial x_j} = \frac{\mu}{\sigma_f} \frac{\partial \widetilde{f''^2}}{\partial x_j} \tag{5.35}$$

Турбулентная диффузия моделируется по градиентному закону (5.1):

$$\overline{\rho f'' u_j''} = -\frac{\mu_T}{\sigma_f} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \tag{5.36}$$

Окончательно уравнение переноса квадрата пульсаций скалярной величины имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho} \widetilde{f''^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho} \tilde{u}_j \widetilde{f''^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_{T,f}} + \frac{\mu}{\sigma_f}\right) \frac{\partial \widetilde{f''^2}}{\partial x_j}\right]$$
$$+2\frac{\mu_T}{\sigma_{f,T}}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}\right)^2 - 2\bar{\rho}\varepsilon_f + 2\overline{f'' \omega} \tag{5.37}$$

Имеет смысл ввести обозначение генерации:

$$\mathrm{P}_f = \frac{\mu_T}{\sigma_{f,T}}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j}\right)^2 \tag{5.38}$$

Здесь $\sigma_{f,T}$ - турбулентное число Шмидта-Прандтля, σ_f - число Шмидта-Прандтля

5.3. Уравнение для скорости диссипации пульсаций скалярной величины

Скорость диссипация пульсаций скалярной величины вместе с величиной   определяет временной масштаб пульсаций скалярной величины . Многие исследователи полагают, что отношение временных масштабов пульсаций скоростей и скалярных величин постоянно. Однако эксперименты с течениями даже довольно близких типов показали, что отношение

$$R = \left(\frac{\widetilde{f''^2}}{\varepsilon_f} \right) / \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \tag{5.39}$$

может меняться в широких пределах.

По этой причине большинство исследователей выступают за использование уравнения переноса ε_f .

Точное уравнение переноса ε_f имеет вид [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\varepsilon_f\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\varepsilon_f\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\rho D_f}\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial x_j}\right] + 2\overline{\rho\left(D_f \frac{\partial^2 f''}{\partial x_k \partial x_j}\right)^2} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \tag{5.40}$$

где

$$T_1 \equiv -\frac{\partial \overline{\rho u_j'' \varepsilon_f}}{\partial x_j} - 2\overline{\rho D_f}\left(\widetilde{u_j'' \frac{\partial f''}{\partial x_k}}\right)\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x_j \partial x_k} = T_{11} + T_{12}, \tag{5.41}$$

$$T_2 \equiv 2\bar{\rho}\varepsilon_f \frac{\partial \widetilde{u_m}}{\partial x_m} + 2\overline{\rho D_f \left(f''^2 \frac{\partial u_m''}{\partial x_m}\right)} = 2\overline{\rho\varepsilon_f \frac{\partial u_m}{\partial x_m}}, \tag{5.42}$$

$$T_3 \equiv -2\overline{\rho D_f}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}\left(\widetilde{\frac{\partial f''}{\partial x_k}\frac{\partial u_j''}{\partial x_k}}\right) - 2\overline{\rho D_f}\left(\widetilde{\frac{\partial f''}{\partial x_j} e_{jk}'' \frac{\partial f''}{\partial x_k}}\right) - 2\overline{\rho D_f}\left(\widetilde{\frac{\partial f''}{\partial x_j}\frac{\partial f''}{\partial x_k}}\right)\widetilde{e_{jk}} = \tag{5.43}$$

$$= T_{31} + T_{32} + T_{33}$$

$$T_4 \equiv 2\left(\overline{D_f \frac{\partial f''}{\partial x_k}\frac{\partial \omega''}{\partial x_k}}\right) \tag{5.44}$$

Здесь e_{jk} - тензор скоростей деформации

$$e_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \tag{5.45}$$

Основная проблема заключается в моделировании правой части (5.40).

В [23] для высоких значений чисел Re получено уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\varepsilon_f\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\varepsilon_f\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_{\varepsilon f}\bar{\rho}\frac{K}{\varepsilon}\widetilde{u_k''u_j''}\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial x_j}\right)\\+\left(C_{d1}\frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}+C_{d2}\frac{\varepsilon}{K}\right)\mathrm{P}_f+C_{d3}\frac{\varepsilon_f}{K}\mathrm{P}-\left(C_{d4}\frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}+C_{d5}\frac{\varepsilon}{K}\right)\bar{\rho}\varepsilon_f\end{gathered} \tag{5.46}$$

Авторы рекомендуют:

$$C_{d1}=2.0;\quad C_{d2}=0.0;\quad C_{d3}=0.72;\quad C_{d4}=2.2;\quad C_{d5}=0.8 \tag{5.47}$$

Это уравнение мы и возьмем за основу. При этом учитывается подавляющее воздействие сжимаемости на генерацию P и предполагается, что диффузия подчиняется градиентному закону.

В результате получается следующее уравнение для скорости диссипации пульсаций пассивной скалярной величины:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\varepsilon_f\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\varepsilon_f\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu}{\sigma_f}+\frac{\mu_T}{\sigma_{f,T}}\right)\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial x_j}\right]\\+\left(C_{d1}\frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}+C_{d2}\frac{\varepsilon}{K}\right)\mathrm{P}_f+C_{d3}\frac{\varepsilon_f}{K}\mathrm{P}\left(1-C_{\Pi 2}\right)-\left(C_{d4}\frac{\varepsilon_f}{\widetilde{f''^2}}+C_{d5}\frac{\varepsilon}{K}\right)\bar{\rho}\varepsilon_f\end{gathered} \tag{5.48}$$

где константы определяются по (5.47) и

$$\mathrm{P}_f=-\bar{\rho}\widetilde{u_j''f''}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}=\frac{\mu_T}{\sigma_{f,T}}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_j}\right)^2$$

$$\mathrm{P}=-\bar{\rho}\widetilde{u_i''u_j''}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}$$

$\sigma_{f,T}$ - турбулентное число Шмидта-Прандтля, σ_f - число Шмидта-Прандтля

Таким образом, получена замкнутая система уравнений, позволяющих определять турбулентные потоки энергии, концентраций и любых других скалярных величин.