

4. Уравнения переноса напряжений Рейнольдса

В предыдущих разделах моделирование турбулентности было основано на использовании гипотезы Буссинеска, по которой напряжения Рейнольдса пропорциональны коэффициенту турбулентной вязкости и градиенту скорости (точнее, тензору скоростей деформации).

Альтернативным подходом является непосредственное получение дифференциальных уравнений переноса напряжений Рейнольдса.

А 70-80-ые годы 20-го столетия на этот метод возлагались большие надежды. Казалось, что как только вычислительные мощности позволят эффективно решать 6 дополнительных уравнений переноса напряжений Рейнольдса, сразу будут сняты все основные проблемы моделирования турбулентности. Однако, практика показала, что использование полного тензора напряжений Рейнольдса в большинстве случаев не дает существенных преимуществ по сравнению с двухпараметрическими моделями.

Кроме того, численное решение получившейся системы уравнений весьма затруднительно из-за плохой сходимости.

Тем не менее, исследование уравнений переноса напряжений Рейнольдса, анализ характера зависимостей членов, входящих в эти уравнения, позволяет, не решая эти уравнения, использовать их как руководство для построения более простых двухпараметрических моделей, для проверки и уточнения гипотез, которые в них использовались.

4.1. Вывод основного уравнения

Уравнения переноса напряжений Рейнольдса выводятся аналогично выводу уравнения переноса турбулентной кинетической энергии K

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
& \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i'' u_j'')} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k u_i'' u_j'') = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho u_i'' u_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho(\tilde{u}_k + u_k'') u_i'' u_j''}) = \\
& = \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\bar{\rho} u_i'' u_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{\rho} \tilde{u}_k u_i'' u_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u_k'' u_i'' u_j''})
\end{aligned} \tag{4.1}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i'' u_j'') + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k u_i'' u_j'') = \rho \frac{\partial}{\partial t}(u_i'' u_j'') + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i'' u_j'') + u_i'' u_j'' \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) \right] = \\
& = \rho u_i'' \left[\frac{\partial u_j''}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \right] + \rho u_j'' \left[\frac{\partial u_i''}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_i''}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} - \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} - u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \\
& \frac{\partial u_j''}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} = \frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} - \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - u_k'' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Т.е.

$$\begin{aligned}
& \overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i'' u_j'')} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k u_i'' u_j'') = \\
& = u_i'' \left[\overline{\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \right] + u_j'' \left[\overline{\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right] - \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Приравниваем (4.1) и (4.2) и получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\bar{\rho} u_i'' u_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\bar{\rho} \tilde{u}_k u_i'' u_j''}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u_k'' u_i'' u_j''}) = \\
& = u_i'' \left[\overline{\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \right] + u_j'' \left[\overline{\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} \right] - \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Т.к.

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\delta_{ki} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \\
& \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\delta_{kj} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

то

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho u_i'' u_j''} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho \tilde{u}_k u_i'' u_j''} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho u_k'' u_i'' u_j''} \right) = \\ & = \overline{u_i'' \left[-\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \right]} + \overline{u_j'' \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right]} - \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} - \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.5)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \overline{u_i'' \left[-\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \right]} &= \overline{-u_i'' \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_i'' \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k}} = \overline{-u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - u_i'' \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i'' \tau_{jk}} \right) - \tau_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} = \\ &= \overline{-u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{p' u_i''} \right) + p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i'' \tau_{jk}} \right) - \tau_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} - \tau_{jk}' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}}, \\ \overline{u_j'' \left[-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right]} &= \overline{-u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{p' u_j''} \right) + p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_j'' \tau_{ik}} \right) - \tau_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} - \tau_{ik}' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}}, \end{aligned}$$

получаем окончательно:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\overline{\rho u_i'' u_j''} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\rho \tilde{u}_k u_i'' u_j''} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\underbrace{\overline{-\rho u_k'' u_i'' u_j'' + u_i'' \tau_{jk} + u_j'' \tau_{ik}}}_{(I)} \right) \\ & - \underbrace{\left(\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{(II)} - \underbrace{\left(\overline{u_i'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + u_j'' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}} \right)}_{(III)} \\ & - \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{p' u_i''} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{p' u_j''} \right) \right)}_{(IV)} + \underbrace{\left(\overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} \right)}_{(V)} \\ & - \underbrace{\left(\overline{\tau_{jk}' \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} + \tau_{ik}' \frac{\partial u_j''}{\partial x_k}} \right)}_{(VI)} - \underbrace{\left(\overline{\tau_{ik} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k}} \right)}_{(VII)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Физический смысл членов справа:

(I) - турбулентная и молекулярная диффузия;

(II) - генерация напряжений Рейнольдса;

(III) - работа сил давления; этот член возникает только в сжимаемых течениях, вероятно, им можно пренебречь;

(IV) - этот член обычно включают в диффузию;

(V) - корреляция пульсаций давления со скоростями деформаций;

(V) - вязкая диссипация.

Членом (VII), как и в уравнении переноса K , можно пренебречь.

Таким образом, источник в уравнении переноса напряжений Рейнольдса выглядит как

$$S_{ij} = P_{ij} - \bar{\rho}\varepsilon_{ij} + K_{ij}, \quad (4.7)$$

где

$$P_{ij} = - \left(\overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u_j'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right), \quad (4.8)$$

$$\bar{\rho}\varepsilon_{ij} = \left(\overline{\tau_{jk}'} \frac{\partial u_i''}{\partial x_k} + \overline{\tau_{ik}'} \frac{\partial u_j''}{\partial x_k} \right), \quad K_{ij} = \left(\overline{p'} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \overline{p'} \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right),$$

Член P_{ij} , учитывающий генерацию, не требует дополнительных соотношений, т.к. в него не входят никакие новые параметры. А вот для остальных членов требуется ввести некоторые гипотезы.

1) Диссипативный член $\bar{\rho}\varepsilon_{ij}$

При больших числах Рейнольдса мелкомасштабные диссипативные турбулентные движения можно считать изотропными (локальная изотропность), так что этот член можно записать следующим образом [4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (4.9)$$

Для пристеночной турбулентности этот тензор считается анизотропным:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\overline{u_i'' u_j''}}{K} \varepsilon \quad (4.10)$$

2) Корреляция пульсаций давления со скоростями деформаций K_{ij}

Для несжимаемой жидкости эта величина моделируется с использованием уравнения Пуассона.

Для сжимаемой жидкости удобно, прежде всего, ввести бездивергентный тензор

$$\Pi_{ij} = \overline{p' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p' \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} = K_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p' d''}, \quad (4.11)$$

Напомним, что корреляция $K = \overline{p' \frac{\partial u_k''}{\partial x_k}} = \overline{p' d''}$ входит уравнение переноса турбулентной кинетической энергии (3.12).

Как указано в работе [4], в величину Π_{ij} вносят вклад отдельные процессы: взаимодействие только пульсаций скорости – определяется $\Pi_{ij}^{(1)}$, взаимодействие пульсаций скорости и средних деформаций - $\Pi_{ij}^{(2)}$:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(1)} + \Pi_{ij}^{(2)} \quad (4.12)$$

Первая часть имеет смысл *тенденции к изотропности* и для несжимаемой жидкости моделируется через диссипацию [4]:

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -C_1 \bar{\rho} \varepsilon \left(\frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{K} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \quad (4.13)$$

где C_1 - числовая константа.

Вторая часть (так называемая «быстрая часть») для несжимаемой жидкости моделируется следующим образом [4]:

$$\Pi_{ij}^{(2)} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_K \delta_{ij} \right) \quad (4.14)$$

где C_2 - числовая константа. Хотя возможны и гораздо более сложные формулы для быстрой части. Вопросу определения этой величины для сжимаемых течений будет посвящен следующий параграф.

4.2. Модель турбулентности для сжимаемых высокоскоростных течений, основанная на представлении корреляции "давление - скорости деформаций"

Модели турбулентности, разработанные для несжимаемой жидкости, плохо описывают сверхзвуковые сжимаемые течения. Известно, что сжимаемость оказывает стабилизирующее воздействие на турбулентность, уменьшая с ростом числа Маха интенсивность турбулентного смешения.

В современных задачах авиационной и ракетно-космической техники этот эффект играет важнейшую роль. Например, в сверхзвуковых прямоточных двигателях из-за влияния сжимаемости замедляется смешение горючего с окислителем, что влияет на процесс горения. Сжимаемость изменяет характер перехода ламинарного режима течения в турбулентный на поверхности спускаемого аппарата при входе в атмосферу.

Как уже указывалось в предыдущих параграфах, в работах Саркара [9,11], Земана [10], автора [12,17,18] и других исследователей предполагается, что эффект замедления турбулентного смешения с ростом скорости связан с появлением в уравнении турбулентной кинетической энергии дополнительной сжимаемой диссипации, которая зависит от турбулентного числа Маха и происходит на мелкомасштабном уровне.

Однако последние исследования (например, Гиримаджи [19]) показали, что основное воздействие сжимаемости на турбулентность осуществляется уже на уровне крупных масштабов и связано с тем, что пульсации давления воздействуют на турбулентность совершенно иначе, чем в несжимаемой жидкости.

В данной работе предложена модель турбулентности, основанная на моделировании корреляции "давление - скорости деформаций" в зависимости от скорости потока и на гипотезе о том, что основную роль в механизме турбулентного переноса играют пульсации скорости, направленные по нормали к линиям тока.

Считаем, что для "медленной" части $\Pi_{ij}^{(1)}$, которая имеет физический смысл тенденции к изотропности и связана с мелкомасштабной турбулентностью, справедлива та же формула, что и для несжимаемой жидкости (формула (4.13)):

$$\Pi_{ij}^{(1)} = -C_1 \bar{\rho} \varepsilon \left(\frac{\overline{u_i'' u_j''}}{K} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) \quad (4.15)$$

где $C_1 = 1.8$ - числовая константа [4].

«Быстрая» часть $\Pi_{ij}^{(2)}$ связана с крупномасштабной турбулентностью. Поэтому в данной работе сделано предположение, что именно через нее осуществляется влияние пульсаций давления на развитие турбулентности.

Результаты прямого численного моделирования (DNS), полученные Гиримаджи Ш.С. [19], показывают, что для $\Pi_{ij}^{(2)}$ можно использовать формулу

$$\Pi_{ij}^{(2)} = C_{\Pi 1} \Pi_{ij}^{(P)} - C_{\Pi 2} P_{ij}, \quad (4.16)$$

и что характер влияния пульсаций давления в зависимости от скорости потока можно разбить на 3 области:

1) При малых скоростях потока пульсации давления ведут себя так же, как и в несжимаемой жидкости, и «быстрая» часть Π_{ij} рассчитывается через уравнение Пуассона (обозначена как $\Pi_{ij}^{(P)}$). В этой области $C_{\Pi 1} = 1$, $C_{\Pi 2} = 0$.

2) При дальнейшем росте скорости величина $\Pi_{ij}^{(2)}$ становится меньше, чем рассчитываемая через уравнение Пуассона, кроме того, на нее оказывает подавляющее воздействие тензор скоростей деформаций через генерацию. Именно этот эффект и приводит к стабилизирующему воздействию на турбулентность. В этой области $C_{\Pi 1} \rightarrow 0$, $C_{\Pi 2} \rightarrow 1$.

3) Наконец при очень больших скоростях «быстрая» часть становится пренебрежимо малой по сравнению с генерацией. Пантано и Саркар [20] показали, что это связано с тем, что при больших значениях числа Маха скорость распространения воздействия пульсаций давления (скорость звука) слишком мала, чтобы влиять на турбулентность. В этой области $C_{\Pi 1} = 0$, $C_{\Pi 2} = 0$.

В качестве основного критерия в данной работе используется турбулентное число Маха $M_T = \sqrt{2K} / a$, а для функциональных зависимостей $C_{\Pi 1}, C_{\Pi 2}$ предлагается следующая аппроксимация кубическими парабололами:

$$C_{\Pi 1}(M_T) = \begin{cases} 1, & M_T \leq \alpha_1 \\ 1 - 3x^2 + 2x^3, & x = \frac{M_T - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1}, \quad \alpha_1 < M_T < \beta_1 \\ 0, & M_T \geq \beta_1 \end{cases}$$

$$C_{\Pi 2}(M_T) = \begin{cases} 0, & M_T \leq \alpha_2 \\ C_{\Pi 2, \max} (3x^2 + 2x^3), & x = \frac{M_T - \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2}, \quad \alpha_2 < M_T \leq \beta_2 \\ C_{\Pi 2, \max} (1 - 3x^2 + 2x^3), & x = \frac{M_T - \beta_2}{\gamma_2 - \beta_2}, \quad \beta_2 < M_T < \gamma_2 \\ 0, & M_T \geq \gamma_2 \end{cases} \quad (4.17)$$

где $\alpha_1 = \alpha_1 = 0.1$; $\beta_1 = 0.27$; $\beta_2 = 0.315$; $\gamma_2 = 10$; $C_{\Pi 2, \max} = 0.65$

Для моделирования $\Pi_{ij}^{(P)}$ используется формула (4.14):

$$\Pi_{ij}^{(P)} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right), \quad (4.18)$$

где $C_2 = 0.6$ - числовая константа [4].

Подставляя полученные соотношения в формулу (4.7), получаем выражение для источника в уравнении переноса напряжений Рейнольдса

$$\begin{aligned} S_{ij} &= P_{ij} - \bar{\rho} \varepsilon_{ij} + K_{ij} = P_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \varepsilon \delta_{ij} + \Pi_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p'd''} = \\ &= P_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\rho} \varepsilon \delta_{ij} - C_1 \bar{\rho} \varepsilon \left(\frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{K} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) + C_{\Pi 1} \Pi_{ij}^{(P)} - C_{\Pi 2} P_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{p'd''} = \quad , \quad (4.19) \\ &= (1 - C_{\Pi 1} C_2 - C_{\Pi 2}) P_{ij} + \frac{2}{3} C_2 C_{\Pi 1} P \delta_{ij} - \left[C_1 \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{K} + \left(1 - C_1 + \frac{\overline{p'd''}}{\bar{\rho} \varepsilon} \right) \frac{2}{3} \delta_{ij} \right] \bar{\rho} \varepsilon \end{aligned}$$

Уравнение переноса турбулентной кинетической энергии K получается сворачиванием уравнения (4.6) по индексам:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} K) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k K) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right] + P(1 - C_{\Pi 2}) + \overline{p'd''} - \bar{\rho} \varepsilon, \quad (4.20)$$

где $P = \frac{1}{2} P_{ii} = \overline{\rho u_i'' u_k''} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}$ - генерация турбулентной кинетической энергии, $\overline{p'd''} \approx 0$.

Здесь используется градиентное представление диффузионного потока K .

Делаем предположение, что уравнение переноса скорости диссипации ε имеет стандартную форму, за исключением того, что в ней также учитывается подавляющее воздействие сжимаемости на генерацию:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\bar{\rho}\tilde{u}_k\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + \frac{\varepsilon}{K} [C_{\varepsilon 1} P (1 - C_{\Pi 2}) - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon] \quad (4.21)$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений, позволяющих определять напряжения Рейнольдса в высокоскоростных потоках, решая соответствующие уравнения в частных производных.

В эту систему входит 6 уравнений для компонент тензора напряжений Рейнольдса и уравнение для скорости диссипации (4.21). Решение этой системы представляет довольно большую математическую сложность, однако, ее можно существенно упростить. Практика показывает, что очень близкие результаты получаются, если вместо решения системы дифференциальных уравнений в частных производных для напряжений использовать так называемые *алгебраические модели для напряжений*.

Для построения такой модели делаем допущение, что конвекция и диффузия в уравнениях переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса $\widetilde{u_i'' u_j''}$ находятся в балансе. В этом случае из уравнения (4.6) получаются следующие формулы для недиагональных компонент тензора:

$$i \neq j: \quad \frac{\widetilde{u_i'' u_j''}}{K} = \frac{(1 - C_{\Pi 1} C_2 - C_{\Pi 2})}{C_1} \frac{P_{ij}}{\bar{\rho} \varepsilon}, \quad (4.22)$$

Кроме того, используем тот факт, что, как было показано в начале главы, при турбулентном смешении потоков основную роль играют пульсации скорости V_n'' , направленные по нормали к линиям тока.

Рассмотрим сначала двумерное течение - тонкий сдвиговой слой, в котором качестве координаты с индексом «1» используется направление вдоль основного движения потока, а индексом «2» обозначаем координату, направленную перпендикулярно основному движению. Очевидно, что в этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\widetilde{u}_2 \ll \widetilde{u}_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} \ll \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad f = \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \quad \widetilde{u}_3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad (4.23)$$

Тогда из (4.8) следует:

$$P_{12} \approx -\overline{\rho u_2'' u_2''} \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2}, \quad P_{22} \approx 0, \quad P_{11} \approx -2\overline{\rho u_1'' u_2''} \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2}, \quad P \approx -\overline{\rho u_1'' u_2''} \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2} \quad (4.24)$$

Для единственного недиагонального элемента по формуле (4.22) получаем:

$$\overline{u_1'' u_2''} = -\frac{(1 - C_{\text{П1}} C_2 - C_{\text{П2}}) K^2}{C_1} \frac{\overline{u_2'' u_2''}}{\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2} \quad (4.25)$$

Кроме того:

$$P \approx -\overline{\rho u_1'' u_2''} \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2} = \overline{\rho} \frac{(1 - C_{\text{П1}} C_2 - C_{\text{П2}}) K^2}{C_1} \frac{\overline{u_2'' u_2''}}{\varepsilon} \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2} \right)^2 \quad (4.26)$$

Формула (4.19) для источника S_{22} с учетом (4.24) и того, что $\overline{p'd''} \approx 0$, упрощается до следующего вида

$$S_{22} = \frac{2}{3} C_2 C_{\text{П1}} P - \left[C_1 \frac{\overline{u_2'' u_2''}}{K} + \frac{2}{3} (1 - C_1) \right] \overline{\rho} \varepsilon \quad (4.27)$$

Перейдем к общему случаю и обозначим индексом «1» координату, направление вдоль линии тока, а индексом «2» - координату, направленную по нормали к линии тока. Соответствующие скорости обозначим, как V_t и V_n . Очевидно, что в этом случае справедливы соотношения (4.23)-(4.27).

Из (4.25) (4.25) получаем формулу для касательного напряжения в традиционной форме:

$$\overline{\rho u_1'' u_2''} = -\mu_T \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial x_2}, \quad (4.28)$$

где вводится коэффициент турбулентной вязкости

$$\mu_T = \frac{(1 - C_{PI} C_2 - C_{PI2}) \widetilde{V_n}{}^2}{C_1} \bar{\rho} \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad (4.29)$$

Предполагается, что в общем случае коэффициент турбулентной вязкости, полученный по формуле (4.29), характеризует все напряжения турбулентного трения, т.е.

$$-\bar{\rho} \widetilde{u_i'' u_j''} = \mu_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu_T \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} K, \quad (4.30)$$

Таким образом, получена замкнутая система для определения компонент тензора напряжений Рейнольдса, состоящая из 3-х дифференциальных уравнений (3-х параметрическая модель турбулентности). Эта система включает в себя уравнения переноса K и ε (4.20), (4.21), а также уравнение переноса $\widetilde{V_n}{}^2$, которое получается из (4.6) с учетом (4.27):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\rho} \widetilde{V_n}{}^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\bar{\rho} \tilde{u}_k \widetilde{V_n}{}^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \widetilde{V_n}{}^2}{\partial x_k} \right] \\ + \frac{2}{3} C_2 C_{PI} P - \left[C_1 \frac{\widetilde{V_n}{}^2}{K} + \frac{2}{3} (1 - C_1) \right] \bar{\rho} \varepsilon \end{aligned} \quad (4.31)$$

Кроме дифференциальных уравнений в модель входят формулы (4.29), (4.30), (4.17) и константы

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_K = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_1 = 1.8, \quad C_2 = 0.6$$

4.3. Некоторые результаты тестирования модели

Для апробации модели проведено сравнение результатов расчета с использованием этой модели с экспериментальными данными. Для расчета использовалась программа UNIVERSE-CFD, разработанная в МАИ [18].

Использовались экспериментальные данные Гобела и Даттона [21] и данные из работы [19]. В этих экспериментах исследовалось плоское смешение 2-х параллельных потоков газа, имеющих различные скорости и

плотности (обозначены индексами 1 и 2). В таблице представлены основные параметры этих потоков для 7 режимов.

	1	1d	2	3	3r	4	5
$r=U_2/U_1$	0.78	0.79	0.57	0.18	0.25	0.16	0.16
$s = \rho_2 / \rho_1$	0.76	0.76	1.55	0.57	0.58	0.6	1.14
M_1, M_2	2.01, 1.38	2.02, 1.39	1.91, 1.36	1.96, 0.27	2.22, 0.43	2.35, 0.3	2.27, 0.38
$T_1, T_2 [K]$	163, 214	151, 198	334, 215	161, 281	159, 275	171, 285	332, 292
$U_1, U_2 [m/c]$	515, 404	498, 392	700, 399	499, 92	561, 142	616, 100	830, 131
$P [Па]$	46e3	55e3	49e3	53e3	53e3	36e3	32e3

На рисунках 3,4,5 представлены безразмерные поперечные профили напряжений трения $\overline{u_1'' u_2''} / (\Delta U)^2$ (рис.3), поперечных $\sigma_v / \Delta U$ (рис.4) и продольных $\sigma_u / \Delta U$ (рис.5) пульсаций скорости в слоях смешения для режимов 4 и 5. Здесь: $\Delta U = U_1 - U_2$, b - толщина слоя смешения, y_0 - поперечная координата, соответствующая средней скорости $0.5(U_1 + U_2)$, $\sigma_u = \sqrt{\overline{u_1'' u_1''}}$, $\sigma_v = \sqrt{\overline{u_2'' u_2''}}$.

Сравнивались расчеты с использованием 3-х моделей турбулентности:

- 1) стандартной $K-\varepsilon$ модели,
- 2) $K-\varepsilon$ cc - модели с поправками на сжимаемость Саркара и др. [9],
- 3) $K-\varepsilon-V_n$ - модели, представленной в данной работе (п. 4.2)

Наилучшее совпадение получается при использовании предложенной в данной работе модели.

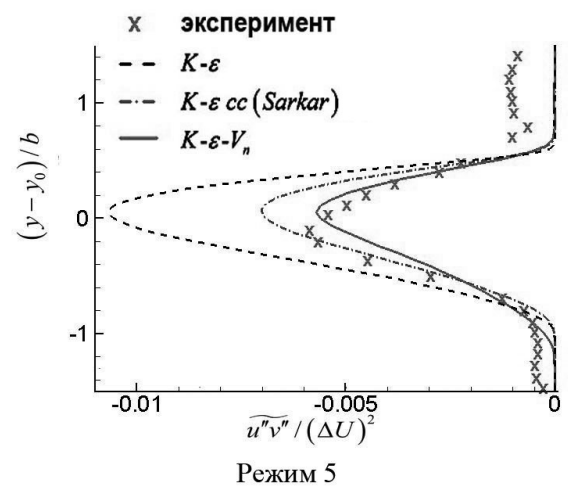
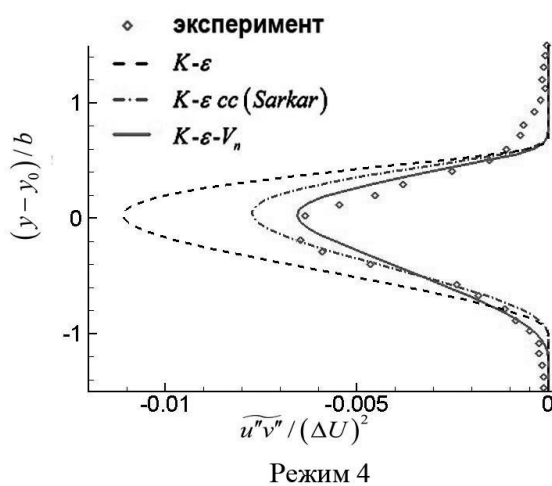


Рис.3. Поперечные безразмерные профили напряжения трения.

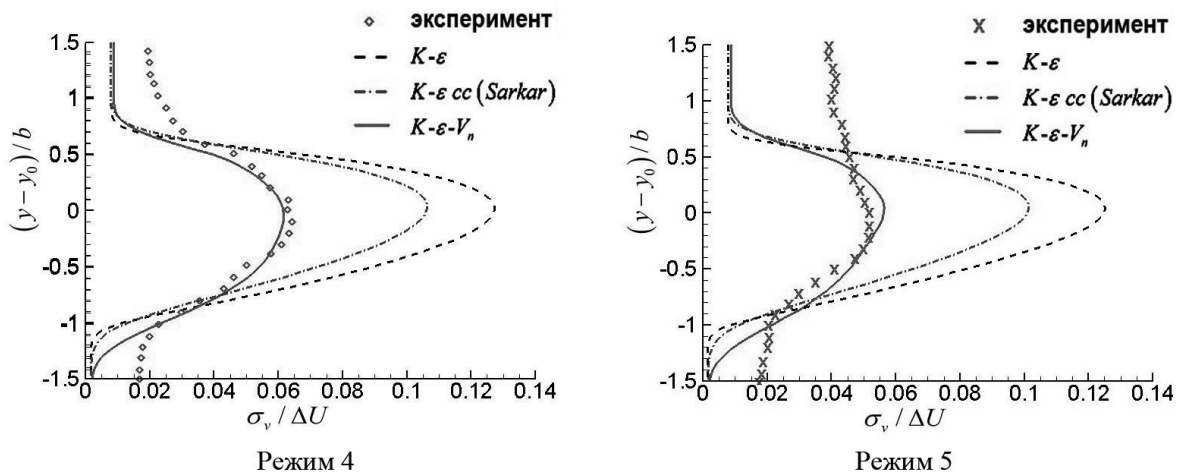


Рис.4. Поперечные безразмерные профили продольных поперечных пульсаций скорости.

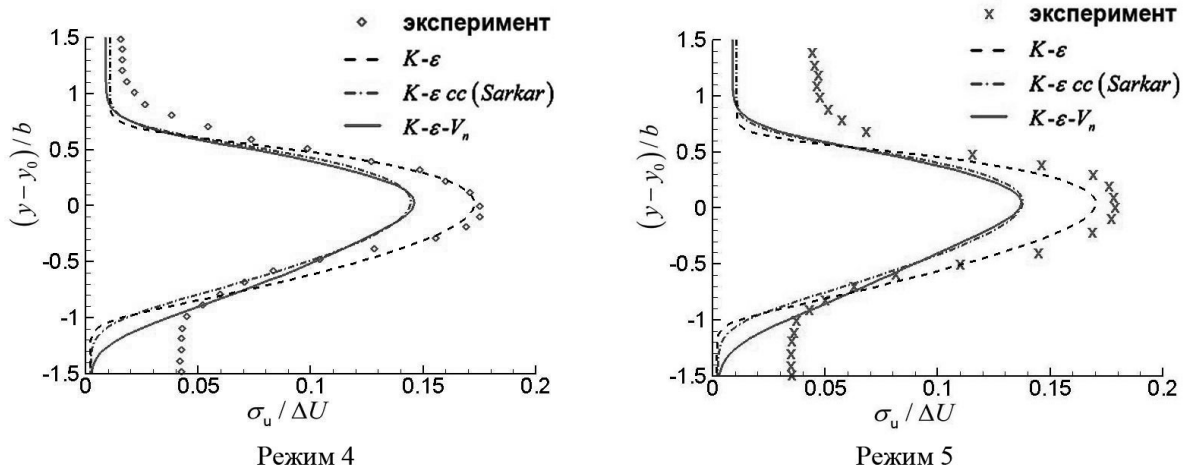


Рис.5. Поперечные безразмерные профили продольных пульсаций скорости.

На рисунке 6 показано влияние относительной скорости потоков $M_r = (U_1 - U_2) / \bar{a}$ на основные параметры турбулентного смешения. Рассчитанные параметры нормированы на свои аналоги, полученные без учета влияния сжимаемости в модели в турбулентности при таких же значениях спутности $r = U_2 / U_1$ и отношении плотностей $s = \rho_2 / \rho_1$.

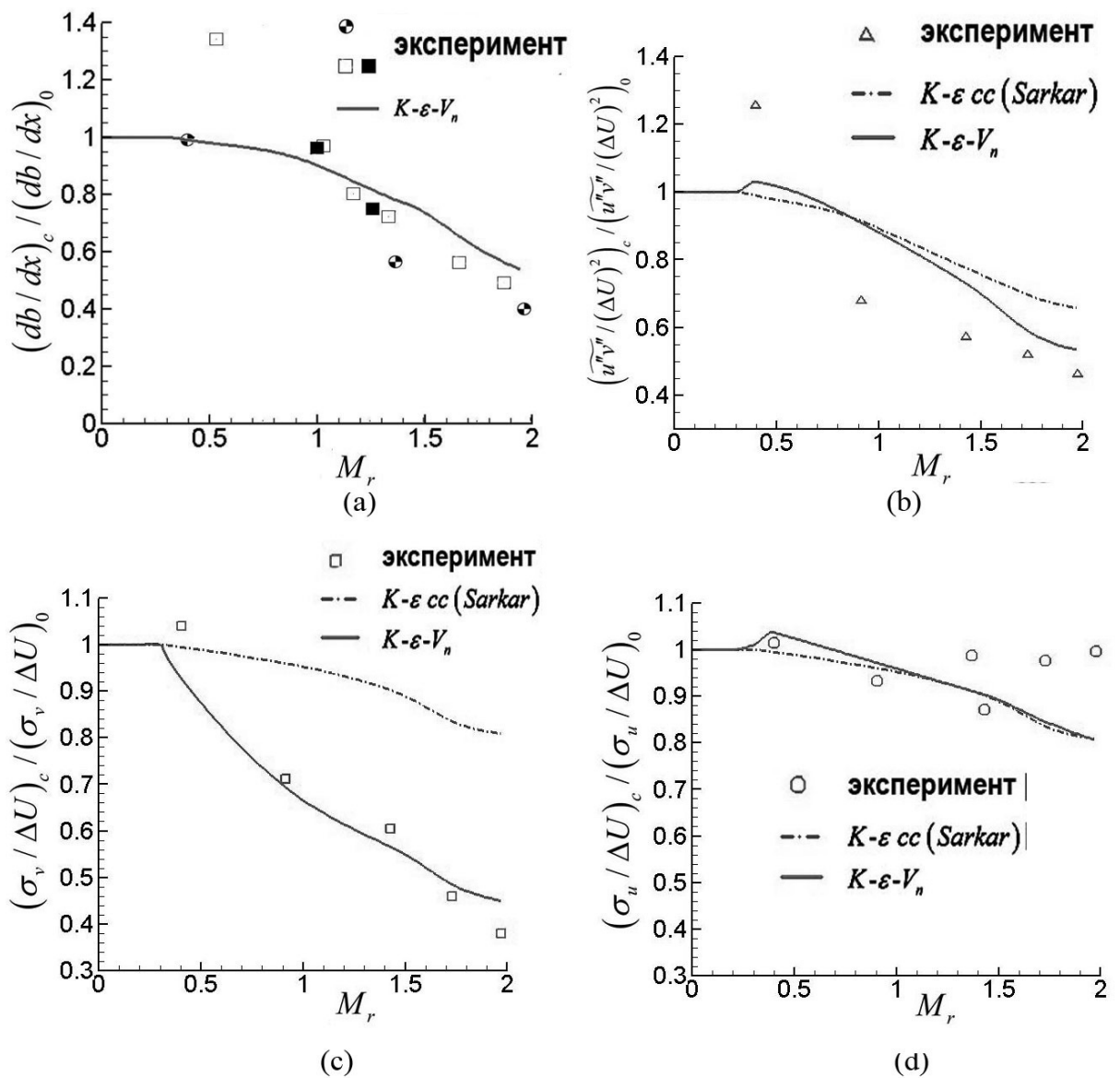


Рис.6. Нормализованные параметры турбулентного смешения: (a) - скорость расширения слоя смешения, (b) - сдвиговое напряжение, (c) - пульсации скорости, направленные по нормали к линиям тока, (d) - пульсации скорости, направленные вдоль линий тока.

Анализ полученных результатов показывает следующее.

1) С ростом M_r наблюдается замедление смешения (уменьшается db/dx); это явление наблюдается, как в эксперименте, так и в расчетах с использованием предложенной модели и модели Саркара [9];

2) Увеличение относительной скорости M_r приводит к уменьшению сдвигового напряжения, к существенному уменьшению поперечных

пульсаций скорости, и очень слабому изменению продольных пульсаций. Это означает, что сжимаемость, в первую очередь, воздействует на пульсации скорости, направленные по нормали к линиям тока, а через эту величину $\widetilde{V}_n^{m^2}$ в соответствии с формулой (4.25) - на сдвиговое напряжение; воздействие на пульсации скорости вдоль линий тока невелико. Предложенная модель турбулентности хорошо отражает эти факты, а модель Саркара и др. [9] - нет.