3. Уравнение для турбулентной кинетической энергии. Двухпараметрические модели турбулентности.

Одним из важнейших параметров, характеризующих турбулентное движение, является турбулентная кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2}\widetilde{u_i''^2}$$

Процесс получения дифференциального уравнения переноса этого параметра называется *взятием момента* от уравнения количества движения

3.1. Вывод уравнения.

Очевидно, что

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i'' u_i''\right)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho u_i'' u_i''}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{\bar{\rho}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\widetilde{u_i'' u_i''}\right) = 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}K\right), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i'' u_i''\right)} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho\left(\tilde{u}_j + u_j''\right)u_i'' u_i''}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j\widetilde{u_i'' u_i''}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}\right) = \\ &= 2\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j K\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

То есть,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i'' u_i''\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i'' u_i''\right)} = 2\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}K\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j K\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}\right) \tag{3.3}$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i'' u_i''\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i'' u_i''\right) = u_i'' u_i''\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)\right] + \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i'' u_i''\right) \\ &+\rho u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i'' u_i''\right) = 2\rho u_i''\left[\frac{\partial u_i''}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u_i''}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial t} - u_j\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial t} - \widetilde{u_j}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} - u_j''\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j}, \tag{3.5}$$

откуда

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i'' u_i''\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i'' u_i''\right)}=2\overline{\rho u_i''\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}-\tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}-u_j''\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\right]}=$$

$$=2\overline{u_i''\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]}-2\overline{\rho u_i''}\left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}+\tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\right]-2\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}= \qquad (3.6)$$

$$=2\overline{u_i''\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]}-2\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$$

Приравнивая (3.3) и (3.6), получаем:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j K\right)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho u_j'' u_i'' u_i''}\right)$$
$$=\overline{u_i''\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]}-\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \qquad (3.7)$$

Уравнение количества движения (2.3) записано в консервативной форме. Чтобы получить неконсервативную форму вычтем из уравнения (2.3) уравнение неразрывности (2.1), умноженное на u_i:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j u_i+\delta_{ji}p-\tau_{ij}\right)-u_i\frac{\partial \rho}{\partial t}-u_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right)=0,$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ji}p-\tau_{ij}\right)=0$$

откуда

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\delta_{ji}\frac{\partial p}{\partial x_j}+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \qquad (3.8)$$

Подставляем это выражение в (3.7):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j K\right)=-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\rho u_j''\frac{1}{2}\left(u_i''\right)^2}-\overline{u_j''\frac{\partial p}{\partial x_j}}+\overline{u_i''\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}}-\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \qquad (3.9)$$

Второй член в правой части расписываем как:

$$\overline{u_j''\frac{\partial p}{\partial x_j}}=\overline{u_j''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}+\overline{u_j''\frac{\partial p'}{\partial x_j}}=\overline{u_j''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{p' u_j''}\right)-\overline{p'\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}} \qquad (3.10)$$

А третий как:

$$\overline{u_i''\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{ij}u_i''}\right)-\overline{\tau_{ij}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau_{ij}u_i''}\right)-\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}-\tilde{\tau}_{ij}\frac{\partial\overline{u_i''}}{\partial x_j} \tag{3.11}$$

Подставляем эти выражения в (3.9):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}K\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_jK\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\underbrace{-\overline{\rho u_j''\frac{1}{2}\left(u_i''\right)^2}}_{(I)}\underbrace{-\overline{p'u_j''}}_{(II)}+\underbrace{\overline{\tau_{ij}u_i''}}_{(III)}\right]$$

$$\underbrace{-\overline{\rho u_i''u_j''}\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{(IV)}\underbrace{-\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}}_{(V)}\underbrace{-\overline{u_j''}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j}}_{(VI)}+\underbrace{\overline{p'\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}}}_{(VII)}\underbrace{-\tilde{\tau}_{ij}\frac{\partial\overline{u_i''}}{\partial x_j}}_{(VIII)} \tag{3.12}$$

Физический смысл членов, входящих в правую часть уравнения (3.12), следующий:

(I) - турбулентный диффузионный перенос, обусловленный пульсациями скорости;

(II) - турбулентный диффузионный перенос, обусловленный пульсациями давления;

(III) - молекулярный диффузионный перенос;

(IV) - генерация турбулентной энергии, обусловленная взаимодействием напряжений Рейнольдса и градиента средней скорости;

(V) - вязкая диссипация турбулентной энергии в тепло;

(VI) - работа сил давления;

(VII) - дополнительная диссипация, обусловленная взаимодействием пульсаций давления с дивергенций пульсаций скорости;

$(VIII)$ - дополнительный член, учитывающий вязкое трение.

3.2. Несжимаемая жидкость. Уравнение для скорости диссипации.

Уравнение для турбулентной кинетической энергии наиболее хорошо изучено для несжимаемой жидкости, т.е. для случая, когда $\rho = const$. Обычно при этом полагается постоянным коэффициент динамической вязкости: $\mu = const$.

Средние по Рейнольдсу и по Фавру при этом совпадают

$$\tilde{T} = \overline{T} \tag{3.13}$$

Совпадают и соответствующие пульсации

$$T'' = T' \tag{3.14}$$

Очевидно, что в несжимаемой жидкости справедливо:

$$\overline{u_i''} = -\frac{\overline{\rho' u_i'}}{\overline{\rho}} = 0 \tag{3.15}$$

Легко показать, что дивергенция пульсаций скорости равна нулю. Действительно, из (2.1) и (2.2) следует:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0; \quad \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \tag{3.16}$$

Отсюда

$$\frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(u_j - \overline{u_j} \right)}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0 \tag{3.17}$$

Таким образом, в несжимаемой жидкости три последних члена уравнения (3.12) - $(VI),(VII),(VIII)$ тождественно равны нулю.

Для представления диссипативного члена (V) уравнения (3.12) рассмотрим несколько промежуточных формул.

Прежде всего

$$\tau_{ij}'' = \tau_{ij}' = \left(\tau_{ij} - \overline{\tau_{ij}} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \mu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = \mu \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right) = 2\mu S_{ij}', \tag{3.18}$$

где $S_{ij}' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)$ - тензор пульсаций скоростей деформаций.

Вследствие симметрии тензора τ_{ij}' с помощью перестановки индексов можно получить:

$$\tau_{ij}' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \tau_{ji}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} = \tau_{ij}' \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \tag{3.19}$$

Отсюда получаем:

$$\tau_{ij}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\tau_{ij}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}+\tau_{ij}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)=\frac{1}{2}\tau_{ij}'\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2=2\mu\left(S_{ij}'\right)^2 \qquad (3.20)$$

После осреднения:

$$\begin{aligned}\overline{\tau_{ij}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}&=\frac{1}{2}\mu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2}=\frac{1}{2}\mu\overline{\left[\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}+2\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\right]}\\&=\mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}+\mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}\end{aligned} \qquad (3.21)$$

Докажем, что:

$$\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i'u_j'}\right)\right)-2\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\left(u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}\right)}+\overline{\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}\right)^2} \qquad (3.22)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_iu_j\right)\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=u_j\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=\\&=u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=\\&=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2\end{aligned} \qquad (3.23)$$

При однородной турбулентности первые два члена в правой части формулы (3.22) обращаются в нуль.

Для несжимаемой жидкости третий член в правой части формулы (3.22) также равен нулю.

Таким образом, в случае однородной турбулентности получаем:

$$\mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}=0 \qquad (3.24)$$

В работе [3] показано, что и для неоднородной турбулентности при больших значениях чисел Рейнольдса ассимптотически справедливо это выражение.

Таким образом, член, характеризующий вязкую диссипацию в уравнении (3.12), при больших числах Re может быть записан как:

$$\rho\varepsilon \equiv \overline{\tau_{ij}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = \mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \qquad (3.25)$$

Здесь через ε обозначена так называемая *скорость диссипации* турбулентной кинетической энергии. Ее физический смысл – скорость, с которой турбулентная кинетическая энергия K превращается в тепло вследствие вязкого трения. Размерность ε - $\left[м^2 / c^3 \right]$.

Для несжимаемой жидкости уравнение переноса турбулентной кинетической энергии имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_K} + \mu\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \mathrm{P}_K - \rho\varepsilon, \qquad (3.26)$$

где

$$\mathrm{P}_K = -\overline{\rho u_i' u_j'}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \text{ - генерация } K \qquad (3.27)$$

Здесь использовались допущения о градиентном характере турбулентной и молекулярной диффузии турбулентной кинетической энергии:

$$\begin{aligned} -\overline{\rho u_j' K} - \overline{p' u_j'} &= \frac{\mu_T}{\sigma_K}\frac{\partial K}{\partial x_j}, \\ \overline{\tau_{ij} u_i'} &= \mu\frac{\partial K}{\partial x_j} \end{aligned} \qquad (3.28)$$

Уравнение переноса ε можно строго получить, используя ту же методику, что и для вывода уравнения переноса K, только вместо $u_i'' u_i''$ в формулах (3.1)

-(3.6) необходимо использовать $\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}$. Здесь $\nu = \mu / \rho$ - коэффициент кинематической вязкости.

В результате получается уравнение, содержащее большое количество достаточно сложных корреляций пульсаций, для которых при больших значениях чисел Рейнольдса получаются некоторые асимптотические зависимости.

Автор не будет утомлять читателей этими выкладками, а переадресует интересующихся к книге [4].

Дело в том, что в результате получается уравнение по структуре подобное уравнению переноса K:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} + \mu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon 1}\mathrm{P}_K - C_{\varepsilon 2}\rho\varepsilon\right), \tag{3.29}$$

где $\sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$ - числовые константы.

Представляется очень удачным представление, предложенное в [5]. Смысл этого представления состоит в том, что можно использовать необязательно уравнения именно для K и ε, а для любой их степенной функции:

$$Z = C_Z K^m \varepsilon^n \tag{3.30}$$

Уравнение переноса этой функции и имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Z) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}Z\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_Z} + \mu\right)\frac{\partial Z}{\partial x_j}\right] + \frac{Z}{K}\left(C_{Z1}\mathrm{P}_K - C_{Z2}\rho\varepsilon\right), \tag{3.31}$$

где σ_Z, C_{Z1}, C_{Z2} - числовые коэффициенты.

3.3. Двухпараметрические модели турбулентности для несжимаемой жидкости. *Kε*-модель, *Kω* - модель Уилкокса, модель SST Ментера.

В этом разделе приводятся некоторые наиболее часто используемые модели турбулентности для несжимаемой жидкости.

Как уже говорилось, в системе уравнений Рейнольдса, описывающих осредненное течение жидкости при турбулентном режиме течения, появляются дополнительные неизвестные параметры, имеющие физический смысл тензора турбулентных напряжений трения. Для его моделирования можно использовать формулу (2.19), которая для несжимаемых течений имеет вид:

$$-\rho\overline{u_j'u_i'} = \mu_T\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho K \tag{3.32}$$

При таком подходе для замыкания системы необходимо получить формулу для коэффициента турбулентной вязкости μ_T. В настоящее время для этой цели чаще всего используются так называемые *двухпараметрические модели*. Так они называются потому, что в них μ_T определяется через два параметра, для которых решаются дополнительные дифференциальные уравнения в частных производных.

Целый ряд моделей турбулентности строится на основе уравнения для турбулентной кинетической энергии.

Предполагается, что среднеквадратичная пульсация $\widetilde{V_n''^2}$ пропорциональна всей турбулентной кинетической энергии K (а это совершенно справедливо для больших значений чисел Рейнольдса). Тогда из формулы (2.22) следует, что

$$\mu_T = C\rho K\tau \tag{3.33}$$

1) $K\varepsilon$ *-модель турбулентности*

С точки зрения теории размерностей можно предположить, что отношение K/ε и есть то время, за которое энергия движения крупных вихрей, полученная от осредненного движения, проходит весь спектр масштабов размеров - от наиболее крупных до самых мелких, при которых происходит диссипация турбулентной энергии. Т.е. τ, входящее в формулу (2.22), определяется как

$$\tau = \frac{K}{\varepsilon} \qquad (3.34)$$

Отсюда следует, что коэффициент турбулентной вязкости определяется по формуле:

$$\mu_T = C_\mu \rho \frac{K^2}{\varepsilon}, \qquad (3.35)$$

Кроме того, в модель входят следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_j} K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_K} + \mu\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \mathrm{P}_K - \rho\varepsilon, \qquad (3.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho \overline{u_j} \varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} + \mu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon 1}\mathrm{P}_K - C_{\varepsilon 2}\rho\varepsilon\right) \qquad (3.37)$$

В классической $K\varepsilon$-модели используются следующие числовые константы:

$$C_\mu = 0.09; \quad \sigma_K = 1; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3; \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \qquad (3.38)$$

Эта модель широко используется для свободных течений (струи, слой смешения и т.п.), но плохо описывает пристеночные течения. Дело в том, что при выводе основных уравнений, относящихся к скорости диссипации ε, использовалось допущение о больших значениях локального числа Рейнольдса. Возле стенки это допущение нарушается – локальное число Рейнольдса стремится к нулю.

2) Этого недостатка лишена $K\omega$ **-** модель Уилкокса [6].

В ней также используются два параметра: турбулентная кинетическая энергия K и величина ω, которая обратно пропорциональна характерному масштабу времени τ и имеет, следовательно, размерность частоты $[1/c]$.

Коэффициент турбулентной вязкости рассчитываются по формуле:

$$\mu_T = \rho \frac{K}{\omega} \qquad (3.39)$$

Уравнения переноса K и ω имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}K\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{K1}}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right]+\mathrm{P}_K-\beta_0^*\rho K\omega, \qquad (3.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\omega\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 1}}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right]+\alpha\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K-\beta_0\rho\omega^2 \qquad (3.41)$$

Числовые константы, входящие в эту модель, равны:

$\beta_0^*=0.09,\quad \alpha=5/9,\quad \beta_0=0.075,\quad \sigma_{K1}=2,\quad \sigma_{\omega 1}=2$

Если использовать подход, описанный формулами (3.30),(3.31), то очевидно, что связь между параметрами ω и ε имеет вид:

$$\omega=\frac{\varepsilon}{\beta_0^* K} \qquad (3.42)$$

$K\omega$-модель хорошо описывает пристеночные течения, но крайне неудобна для свободных течений: В зависимости от задания параметра частоты турбулентных пульсаций ω, принимаемого на границе расчетной области, может быть получен значительный разброс в результатах расчета. Кроме того, рассматриваемый метод имеет низкую точность решения в области свободного течения.

3) SST модель

SST модель Ментера [7,8] является некой комбинированной моделью турбулентности, основанной на использовании K-ω модели в пристеночных областях и K-ε модели в областях, находящихся на достаточном удалении от стенки. Этот комбинированный метод заключается в преобразовании уравнений K-ε модели к K-ω формулировке. Уравнения видоизмененной K-ε модели, дополняются стыковочной функцией $1-F_1$. Функция F_1 принимает значение $F_1=1$ вблизи поверхности и обращается в ноль за пределами пограничного слоя, т.е. на линии границы пограничного слоя и за его пределами K-ε модель возвращается к первоначальной, стандартной формулировке.

Эта модель показала хорошие результаты при расчете течений в зоне отрыва и при сильном продольном градиенте давления. Она учитывает перенос касательных напряжений.

Для преобразования уравнений стандартной K-ε-модели к уравнениям в формулировке K-ω воспользуемся формулой (3.42)

$$\varepsilon = \beta_0^* K\omega \tag{3.43}$$

Откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{K\beta_0^*}\left(\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\varepsilon}{K}\frac{dK}{dt}\right) \tag{3.44}$$

Подставляем эти формулы в уравнения (3.36), (3.37) и получаем, что в преобразованном виде стандартная K-ε модель имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \mathrm{P}_K - \beta_0^*\rho K\omega, \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\omega\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 2}}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \alpha_2\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K - \beta_2\rho\omega^2 + \frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \tag{3.46}$$

где числовые константы равны:

$\beta_0^* = C_\mu = 0.09;\quad \alpha_2 = \left(C_{\varepsilon 1} - 1\right) = 0.44;\quad \beta_2 = \left(C_{\varepsilon 2} - 1\right)C_\mu = 0.0828$

Следует отметить, что уравнение (3.45) является строгим следствием уравнения (3.36), а при выводе уравнения (3.46) Ментер пренебрег некоторыми диффузионными членами. В работе [8], показано, что эти члены не влияют на результаты расчетов.

Основная идея SST модели турбулентности состоит в том, что с помощью стыковочной функции F_1 получается линейная комбинация уравнений (3.40), (3.41) из K-ω модели и уравнений (3.45), (3.46) из преобразованной стандартной модели турбулентности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{K3}}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \mathrm{P}_K - \beta_0^*\rho K\omega, \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_j}\omega\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu+\frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 3}}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}\right]+\alpha_3\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K-\beta_3\rho\omega^2+\left(1-F_1\right)\frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial\omega}{\partial x_j} \quad (3.48)$$

где коэффициенты новой модели – линейная комбинация соответствующих коэффициентов моделей, лежащих в основе метода:

$$\begin{gathered}\alpha_3=F_1\alpha+\alpha_2\left(1-F_1\right),\quad \beta_3=F_1\beta_0+\beta_2\left(1-F_1\right)\\ \frac{1}{\sigma_{K3}}=F_1\frac{1}{\sigma_{K1}}+\left(1-F_1\right)\frac{1}{\sigma_K},\quad \frac{1}{\sigma_{\omega 3}}=F_1\frac{1}{\sigma_{\omega 1}}+\left(1-F_1\right)\frac{1}{\sigma_{\omega 2}}\end{gathered} \quad (3.49)$$

Стыковочная функция в модели Ментера строится таким образом, чтобы наиболее адекватно учитывать перенос напряжения трения в пограничном слое.

Напомним, что $F_1=1$ вблизи поверхности и $F_1=0$ за пределами пограничного слоя

В модели Ментера для несжимаемой жидкости коэффициент турбулентной вязкости определяется по формуле:

$$\mu_T=\rho\frac{a_1K}{\max\left(a_1\omega,\Omega F_2\right)}=\rho\frac{K}{\max\left(\omega,SF_2/a_1\right)}, \quad (3.50)$$

где $a_1=0.31$,

$$S=\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}\ - \quad (3.51)$$

- инвариант тензора скоростей деформации,

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.52)$$

Стыковочные функции в SST – модели определяются по следующим формулам.

$$
\begin{aligned}
&F_1 = \tanh\left(\arg_1{}^4\right)\\
&\arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{K}}{\beta_0^*\omega y},\frac{500\nu}{y^2\omega}\right),\frac{4\rho K}{CD_{K\omega}\sigma_{\omega 2}y^2}\right]\\
&CD_{K\omega} = \max\left(\frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j},1.0\times 10^{-10}\right)\\
&F_2 = \tanh\left(\arg_2{}^2\right)\\
&\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{K}}{\beta_0^*\omega y},\frac{500\nu}{y^2\omega}\right)
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Здесь y - расстояние до ближайшей стенки.

Расстояние от стенки можно определять чисто геометрически, но лучше использовать следующий алгоритм.

Для всей расчетной области решается уравнение Пуассона

$$\nabla^2\phi = -1 \tag{3.54}$$

с граничными условиями Дирихле $\phi = 0$ на стенке и Неймана $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ на всех остальных границах.

После нахождения функции ϕ расстояние от стенки определяется через градиент ϕ:

$$y = -\left|\nabla\phi\right| + \sqrt{\left|\nabla\phi\right|^2 + 2\phi} \tag{3.55}$$

3.4. Дополнительные члены в уравнении переноса турбулентной энергии в случае сжимаемой жидкости.

В случае сжимаемой жидкости, когда плотность жидкости является переменной, в уравнении переноса турбулентной кинетической энергии (3.12) появляются дополнительные члены, которых нет в несжимаемой жидкости.

Это:

$\Pi = -\overline{u_j''}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \equiv \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j}$ - работа сил давления;

$K = \overline{p' \frac{\partial u_j''}{\partial x_j}}$ - дополнительная диссипация, обусловленная взаимодействием пульсаций давления с дивергенций пульсаций скорости;

$\tilde{\tau}_{ij} \frac{\partial \overline{u_i''}}{\partial x_j}$ - дополнительный член, учитывающий вязкое трение.

Последним членом можно пренебречь, т.к. при больших значениях числа Рейнольдса первый сомножитель, входящий в него, очень мал, а при малых значениях числа Рейнольдса - пренебрежимо мал второй сомножитель.

Кроме появления дополнительных членов, есть и еще одна особенность. Дело в том, что вязкая диссипация $\overline{\tau_{ij}'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$ в случае сжимаемой жидкости больше не определяется формулой

$$\rho\varepsilon = \mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}, \tag{3.56}$$

для которой выводится уравнение (3.29).

Проанализируем формулу для вязкой диссипации $\overline{\tau_{ij}'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}}$.

Прежде всего, отметим, что вследствие симметричности тензора вязких напряжений справедливо:

$$\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

$$a = b \Rightarrow a = \frac{1}{2}(a + b)$$

$$\Rightarrow \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \tau_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Введем обозначение для пульсаций скорости деформации:

$$s_{ij}'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i} \right) \tag{3.57}$$

Тогда для сжимаемых течений с учетом того, что

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m}{\partial x_m}, \qquad (3.58)$$

получаем, пренебрегая пульсациями вязкости,

$$\tau_{ij}'' \simeq \mu\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m} = 2\mu s_{ij}'' - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m} \qquad (3.59)$$

Откуда:

$$\begin{aligned}
\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} &= \frac{1}{2}\overline{\tau_{ij}''\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right)} = \overline{\left(2\mu s_{ij}'' - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m}\right)s_{ij}''} = \\
&= 2\overline{\mu s_{ij}'' s_{ij}''} - \frac{2}{3}\overline{\left(\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m}\right)s_{ii}''} = 2\overline{\mu s_{ij}'' s_{ij}''} - \frac{2}{3}\overline{\mu\frac{\partial u_m''}{\partial x_m}\frac{\partial u_i''}{\partial x_i}} = \\
&= 2\overline{\mu s_{ij}'' s_{ij}''} - \frac{2}{3}\overline{\mu d''^2}
\end{aligned} \qquad (3.60)$$

где $d'' = \dfrac{\partial u_j''}{\partial x_j}$ - дивергенция пульсаций скорости

Квадрат пульсаций скорости деформации можно представить как:

$$s_{ij}'' s_{ij}'' = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i} + 2\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}\right) \qquad (3.61)$$

Можно показать, что:

$$\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i'' u_j''}\right)\right) - 2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{u_i''\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}}\right) + \overline{\left(\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}\right)^2} \qquad (3.62)$$

Доказательство аналогично доказательству формулы (3.22) для несжимаемой жидкости.

Для однородной турбулентности первые два члена в уравнении (3.62) равны нулю, т.е. справедливо:

$$\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_j''}{\partial x_i}} = \overline{\left(\frac{\partial u_j''}{\partial x_j}\right)^2} = \overline{d''^2} \qquad (3.63)$$

В работе [9] показано, что и для неоднородной турбулентности при больших значениях чисел Рейнольдса ассимптотически справедливо это выражение.

Таким образом, получаем:

$$\overline{\tau_{ij}''\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} = \bar{\mu}\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \bar{\mu}\overline{d''^2} - \frac{2}{3}\bar{\mu}\overline{d''^2} = \bar{\mu}\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} + \frac{4}{3}\bar{\mu}\overline{d''^2} \tag{3.64}$$

В формуле (3.64) первая часть диссипации практически совпадает с выражением для случая несжимаемой жидкости – формула (3.56). Обозначим ее, как и прежде

$$\bar{\rho}\varepsilon = \bar{\mu}\overline{\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}\frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \tag{3.65}$$

Вторая часть зависит от пульсаций дивергенции скорости и называется сжимаемой диссипацией:

$$\bar{\rho}\varepsilon_C = \frac{4}{3}\bar{\mu}\overline{d''^2} \tag{3.66}$$

Саркар и др. [9], а также Земан [10] показали, что скорость диссипации, заданная формулой (3.65), практически не зависит от влияния сжимаемости и для нее можно использовать такое же уравнение переноса, как для случая несжимаемой жидкости.

Таким образом, полный источник в уравнении турбулентной кинетической энергии в рассматриваемом случае имеет вид:

$$S_K = \mathrm{P}_K - \bar{\rho}\left(\varepsilon + \varepsilon_C\right) + \mathrm{K} + \Pi \tag{3.67}$$

Моделирование членов, включающих пульсации дивергенции скорости

Наиболее часто используется модель Саркара и др. [9]:

$$\varepsilon_C \sim M_T{}^2\varepsilon\,, \tag{3.68}$$

где M_T - турбулентное число Маха

$$M_T = \frac{\sqrt{2K}}{a} \tag{3.69}$$

a - локальная скорость звука.

В эту же формулу включена и добавка $\mathrm{K} = \overline{p'd''}$

т.е. полагается, что

$$\overline{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \alpha_1 M_T{}^2 \overline{\rho}\varepsilon \qquad (3.70)$$

где $\alpha_1 = 1$ - числовая константа.

В другой работе Саркара и др. [11] предлагаются отдельные формулы для для K и $\overline{\rho}\varepsilon_C$:

$$\overline{\rho}\varepsilon_C = \alpha_1 M_T{}^2 \overline{\rho}\varepsilon \,, \qquad (3.71)$$

$$\mathrm{K} = -\alpha_2 \mathrm{P}_K M_T + \alpha_3 \overline{\rho}\varepsilon M_T{}^2 \qquad (3.72)$$

где константы равны:

$$\alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 0.15, \quad \alpha_3 = 0.2, \qquad (3.73)$$

Отсюда:

$$\overline{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \alpha_2 \mathrm{P}_K M_T + (\alpha_1 - \alpha_3)\,\overline{\rho}\varepsilon M_T{}^2 \qquad (3.74)$$

В работе [10] оба параметра, содержащие пульсации дивергенции, выражаются одной формулой:

$$\overline{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = c_D F(M_T)\,\overline{\rho}\varepsilon \qquad (3.75)$$

где $c_D = 0.75$,

$$F(M_T) = \left\{1 - \exp\left[-\frac{(\gamma+1)}{2}\left(\frac{M_T - M_{T0}}{\sigma_0}\right)^2\right]\right\} H(M_T - M_{T0})\,, \qquad (3.76)$$

$M_{T0} = 0.1\sqrt{\dfrac{\gamma+1}{2}}$, $\sigma_0 = 0.6$,

$H(x)$ - функция Хевисайда.

В работе [12] предполагается, что дополнительные члены, которые содержат пульсации дивергенции скорости, имеют акустическое происхождение.

Плотность потока энергии, связанного с распространяющимися звуковыми волнами, в волновой зоне равна [13]:

$$J_E = \frac{a^3\overline{\rho'^2}}{\overline{\rho}} = \frac{\overline{p'^2}}{\overline{\rho}a} \quad \left[\frac{Вт}{м^2}\right] \tag{3.77}$$

Т.к.

$$\frac{p'}{a^2} = \rho', \quad \frac{\overline{p'^2}}{a^4} = \overline{\rho'^2} \tag{3.78}$$

Тогда полная акустическая энергия, излучаемая за единицу времени в единице объема турбулентной среды, может быть оценена как:

$$\overline{\rho}\varepsilon_A = \frac{1}{V}\iint_S J_E dS \cong \frac{\overline{p'^2}}{\overline{\rho}aL} \tag{3.79}$$

где L - масштаб турбулентности.

Для пульсации давления используется простейшее предположение:

$$\left(p'\right)^2 \sim \left(\overline{\rho}K\right)^2 \tag{3.80}$$

Масштаб турбулентности может быть выражен через кинетическую энергию турбулентности и скорость диссипации:

$$L \sim \frac{K^{3/2}}{\varepsilon} \tag{3.81}$$

При подстановке оценочных формул (3.80) и (3.80) в (3.79) получаем:

$$\overline{\rho}\varepsilon_A \sim \overline{\rho}\frac{K^{1/2}}{a}\varepsilon \tag{3.82}$$

Таким образом, получается, что:

$$\overline{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = c_A\overline{\rho}M_T\varepsilon\,, \tag{3.83}$$

где $C_A = 0.29$ - константа.

В работе [14] предложена формула:

$$\overline{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \alpha_1\tilde{M}_T{}^2\mathrm{P}_K + \alpha_2\tilde{M}_T{}^2\overline{\rho}\varepsilon\,, \tag{3.84}$$

где

$$\tilde{M}_T = \max\left(M_T - \lambda, 0\right),$$
$$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 2.0, \lambda = 0.2 \qquad (3.85)$$

Уилкокс [15] предлагает свою поправку на сжимаемость:

$$\xi^* = 1.5, \quad M_{T0} = 0.25$$
$$\bar{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \xi^*\left({M_T}^2 - {M_{T0}}^2\right) H\left(M_T - M_{T0}\right)\bar{\rho}\varepsilon \qquad (3.86)$$

Формулы (3.70), (3.75), (3.83) и (3.86) имеют общую структуру:

$$\bar{\rho}\varepsilon_C - \mathrm{K} = \varphi\left(M_T\right)\bar{\rho}\varepsilon \qquad (3.87)$$

В таблице 4.1. собраны функции $\varphi(M_T)$ для различных моделей

Таблица 4.1.

Работа	$\varphi(M_T)$	Числовые константы
[9]	$\alpha_1 {M_T}^2$	$\alpha_1 = 1$
[11]	$\alpha_2 \dfrac{\mathrm{P}_K}{\bar{\rho}\varepsilon} M_T + \left(\alpha_1 - \alpha_3\right){M_T}^2$	$\alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 0.15,$ $\alpha_3 = 0.2$
[10]	$c_D\left\{1 - \exp\left[-\dfrac{(\gamma+1)}{2}\left(\dfrac{M_T - M_{T0}}{\sigma_0}\right)^2\right]\right\} H\left(M_T - M_{T0}\right)$	$c_D = 0.75$ $M_{T0} = 0.1\sqrt{\dfrac{\gamma+1}{2}}, \quad \sigma_0 = 0.6$
[12]	$c_A M_T$	$C_A = 0.29$
[14]	$\alpha_1 {\tilde{M}_T}^2 \dfrac{\mathrm{P}_K}{\bar{\rho}\varepsilon} + \alpha_2 {\tilde{M}_T}^2$	$\tilde{M}_T = \max\left(M_T - \lambda, 0\right),$ $\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 2.0, \lambda = 0.2$
[15]	$\xi^*\left({M_T}^2 - {M_{T0}}^2\right) H\left(M_T - M_{T0}\right)$	$\xi^* = 1.5, \quad M_{T0} = 0.25$

В формуле турбулентной вязкости (2.22)

$$\mu_T = C_1 \bar{\rho}\widetilde{V_n''^2}\tau$$

При определении характерного времени τ можно использовать в качестве скорости диссипации как ε, определяемую формулой (3.65), так и полную диссипацию, учитывающую и сжимаемую часть

$$\varepsilon + \varepsilon_C - \frac{\mathrm{K}}{\bar{\rho}} = \left[1 + \varphi\left(M_T\right)\right]\varepsilon \qquad (3.88)$$

Моделирование члена, содержащего градиент давления

Как уже говорилось, член

$$\Pi = -\overline{u_j''}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} = \frac{\overline{\rho' u_j''}}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j}$$

характеризует работу сил давления.

Вопрос моделирования $\overline{\rho' u_j''}$

Самый простейший вариант, градиентное представление, предложен в работе [16]:

$$\overline{\rho' u_j''} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\mu_T}{\sigma_\rho}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_j} \tag{3.89}$$

Таким образом,

$$\Pi = -\frac{1}{\overline{\rho}^2}\frac{\mu_T}{\sigma_\rho}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \tag{3.90}$$

Следует отметить, что многие исследователи считают, что этим членом можно пренебречь.

3.5. Двухпараметрические модели турбулентности для сжимаемой жидкости. *Kε*-модель, *Kω* - модель Уилкокса, модель SST Ментера.

В этом разделе рассматриваются те же двухпараметрические модели турбулентности, что и в разделе 3.3., только сжимаемой жидкости.

Для моделирования тензора турбулентных напряжений трения здесь используется формула (2.19)

$$-\overline{\rho}\widetilde{u_j'' u_i''} = \mu_T\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu_T\frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{\rho}K \tag{3.91}$$

Как и в случае несжимаемой жидкости, предполагается, что среднеквадратичная пульсация $\widetilde{V_n''^2}$ пропорциональна всей турбулентной кинетической энергии K. Тогда из формулы (2.22) следует, что

$$\mu_T = C\overline{\rho}K\tau \tag{3.92}$$

1) *K-ε модель турбулентности*

Как указано ранее, при определении τ может быть использовано разное понятие скорости диссипации. Соответственно, коэффициент турбулентной вязкости может определяться по формуле

$$\mu_T = C_\mu \bar{\rho} \frac{K^2}{\varepsilon} \tag{3.93}$$

либо

$$\mu_T = C_\mu \bar{\rho} \frac{K^2}{\left[1+\varphi\left(M_T\right)\right]\varepsilon} \tag{3.94}$$

Уравнение переноса турбулентной кинетической энергии следует из (3.12):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_K} + \mu\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \mathrm{P}_K - \left[1+\varphi\left(M_T\right)\right]\bar{\rho}\varepsilon + \Pi \tag{3.95}$$

где

$$\mathrm{P}_K = -\overline{\rho u_i'' u_j''}\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} \text{ - генерация } K \tag{3.96}$$

Здесь использовались допущения о градиентном характере турбулентной и молекулярной диффузии турбулентной кинетической энергии:

$$-\overline{\rho u_j'' K} - \overline{p' u_j''} + \overline{\tau_{ij} u_i''} = \frac{\mu_T}{\sigma_K}\frac{\partial K}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial K}{\partial x_j} \tag{3.97}$$

Как уже указывалось, доказано, что уравнение переноса скорости диссипации ε по форме совпадает со случаем несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j \varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} + \mu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{\varepsilon}{K}\left(C_{\varepsilon 1}\mathrm{P}_K - C_{\varepsilon 2}\bar{\rho}\varepsilon\right) \tag{3.98}$$

Следует еще раз подчеркнуть, что это уравнение справедливо только для больших значений чисел Рейнольдса.

Числовые константы берутся такими же, как в случае несжимаемой жидкости:

$$C_\mu = 0.09; \quad \sigma_K = 1; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3; \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44; \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \tag{3.99}$$

Функция $\varphi\left(M_T\right)$, учитывающая влияние сжимаемости, вычисляется по одной из моделей, представленных в таблице 4.1.

2) K-ω модель Уилкокса.

В этой модели коэффициент турбулентной вязкости рассчитываются по формуле:

$$\mu_T = \bar{\rho}\frac{K}{\omega} \tag{3.100}$$

Уилкокс вносит в свою модель поправки на сжимаемость в работе [15].

Членом, учитывающим градиент давления $\Pi = -\overline{u_j''}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}$, пренебрегают.

Дополнительная диссипация в уравнении переноса K обозначается:

$$S_{K,add} = -\varphi(M_T)\bar{\rho}\varepsilon \tag{3.101}$$

Сравнивая формулы (3.93) и (3.100), получаем:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu K} = \frac{\varepsilon}{\beta_0^* K} \tag{3.102}$$

В модели Уилкокса константа C_μ обозначена как $C_\mu = \beta_0^*$.

Из (3.102) следует, что

$$\bar{\rho}\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\beta_0^* K}\left(\bar{\rho}\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\varepsilon}{K}\bar{\rho}\frac{dK}{dt}\right), \tag{3.103}$$

т.е. дополнительный член, появляющийся в уравнении переноса ω, равен

$$S_{\omega,add} = \frac{1}{\beta_0^* K}\left(0 - \frac{\varepsilon}{K}S_{K,add}\right) = \frac{\bar{\rho}\varepsilon^2}{\beta_0^* K^2}\varphi(M_T) = \bar{\rho}\omega^2\beta_0^*\varphi(M_T) \tag{3.104}$$

Дополнительный член (3.101) через ω выражается как

$$S_{K,add} = -\bar{\rho}\omega\beta_0^* K\varphi(M_T) \tag{3.105}$$

В результате K-ω модель, учитывающая сжимаемость, примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j K) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{K1}}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \mathrm{P}_K - \beta_0^*\left[1 + \varphi(M_T)\right]\bar{\rho}K\omega, \tag{3.106}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\tilde{u}_j\omega) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 1}}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \alpha\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K - \left[\beta_0 - \beta_0^*\varphi(M_T)\right]\bar{\rho}\omega^2 \tag{3.107}$$

Числовые константы, входящие в эту модель, равны, как и раньше:

$$\beta_0^* = 0.09, \quad \alpha = 5/9, \quad \beta_0 = 0.075, \quad \sigma_{K1} = 2, \quad \sigma_{\omega 1} = 2 \tag{3.108}$$

3) SST модель, учитывающая влияние сжимаемости на турбулентность.

Автор не встречал в литературе модель Ментора, в которую внесены поправки на сжимаемость, но ее несложно получить, используя те же принципы, что и для несжимаемой жидкости.

Напомним, что SST модель Ментера является комбинацией преобразованной K-ε модели турбулентности и K-ω модели Уилкокса.

Предполагается, что связь между ε и ω остается такой, как и прежде:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\beta_0^* K} \tag{3.109}$$

Тогда преобразованное уравнение переноса K (3.95) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\mu_T}{\sigma_K} + \mu\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \mathrm{P}_K - \beta_0^*\left[1 + \varphi\left(M_T\right)\right]\bar{\rho}K\omega, \tag{3.110}$$

Для преобразования второго уравнения воспользуемся формулой (3.103), следующей из формулы (3.109), и получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\widetilde{\bar{\rho}u_j}\omega\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 2}}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \alpha_2\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K \\ -\left[\beta_2 - \beta_0^*\varphi\left(M_T\right)\right]\bar{\rho}\omega^2 + \frac{2\bar{\rho}}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\end{gathered}, \tag{3.111}$$

где:

$$\beta_0^* = C_\mu = 0.09; \quad \alpha_2 = \left(C_{\varepsilon 1} - 1\right) = 0.44; \quad \beta_2 = \left(C_{\varepsilon 2} - 1\right)C_\mu = 0.0828 \tag{3.112}$$

С помощью стыковочной функции F_1 получаем линейную комбинацию уравнений (3.106), (3.107) из K-ω модели и уравнений (3.110), (3.111) из преобразованной K-ε модели турбулентности:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}K) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\tilde{u}_j K\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{K3}}\right)\frac{\partial K}{\partial x_j}\right] + \mathrm{P}_K \\ -\beta_0^*\left[1 + \varphi\left(M_T\right)\right]\bar{\rho}K\omega\end{gathered}, \tag{3.113}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\widetilde{\bar{\rho}u_j}\omega\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_{\omega 3}}\right)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + \alpha_3\frac{\omega}{K}\mathrm{P}_K \\ -\left[\beta_3 - \beta_0^*\varphi\left(M_T\right)\right]\bar{\rho}\omega^2 + \left(1 - F_1\right)\frac{2\bar{\rho}}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\end{gathered} \tag{3.114}$$

где коэффициенты новой модели – линейная комбинация соответствующих коэффициентов моделей, лежащих в основе метода:

$$\alpha_3 = F_1\alpha + \alpha_2\left(1 - F_1\right), \quad \beta_3 = F_1\beta_0 + \beta_2\left(1 - F_1\right)$$
$$\frac{1}{\sigma_{K3}} = F_1\frac{1}{\sigma_{K1}} + \left(1 - F_1\right)\frac{1}{\sigma_K}, \quad \frac{1}{\sigma_{\omega 3}} = F_1\frac{1}{\sigma_{\omega 1}} + \left(1 - F_1\right)\frac{1}{\sigma_{\omega 2}} \qquad (3.115)$$

Стыковочная функция в модели Ментера строится таким образом, чтобы наиболее адекватно учитывать перенос напряжения трения в пограничном слое.

Коэффициент турбулентной вязкости определяется, как и в случае несжимаемой жидкости, по формуле:

$$\mu_T = \rho\frac{a_1 K}{\max\left(a_1\omega, \Omega F_2\right)} = \rho\frac{K}{\max\left(\omega, SF_2 / a_1\right)}, \qquad (3.116)$$

где $a_1 = 0.31$,

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \text{ -} \qquad (3.117)$$

- инвариант скорости деформации,

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3.118)$$

Стыковочные функции в SST – модели определяются по следующим формулам.

$$F_1 = \tanh\left(\arg_1{}^4\right)$$
$$\arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{K}}{\beta_0^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right), \frac{4\rho K}{CD_{K\omega}\sigma_{\omega 2}y^2}\right]$$
$$CD_{K\omega} = \max\left(\frac{2\rho}{\sigma_{\omega 2}\omega}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 1.0\times10^{-10}\right) \qquad (3.119)$$
$$F_2 = \tanh\left(\arg_2{}^2\right)$$
$$\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{K}}{\beta_0^*\omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right)$$