Глава 4. Методы расчета турбулентных течений.

1. Общие положения

1.1. Ламинарные и турбулентные режимы течения

Все течения жидкости можно разделить на два совершенно разных класса: ламинарные течения и турбулентные. (Напомню, что термин «жидкость» термин имеет широкое значение: жидкость может быть несжимаемой (это собственно жидкость), сжимаемой (газ), проводящей и т.д.)

Основное отличие турбулентных течений состоит в том, что движение носит неупорядоченный, хаотический характер. Если использовать подход Лагранжа, то, в отличие от ламинарного течения, в которых близлежащие частицы движутся по практически параллельным траекториям, в турбулентном течении траектории частиц могут произвольно пересекаться и вести себя достаточно непредсказуемо.

Турбулентные течения всегда нестационарные, причем характерные времена (масштабы) этих нестационарностей могут иметь весьма широкий диапазон.

В качестве примера перехода от ламинарного течения к турбулентному чаще всего приводят струйку дыма горящей сигареты в неподвижном воздухе. Вначале частицы дыма движутся практически параллельно по неизменяемым во времени траекториям. Дым кажется неподвижным. Потом в каком-то месте *вдруг* возникают крупные вихри, которые движутся совершенно хаотически. Эти вихри распадаются на более мелкие, те - на еще более мелкие и т.д., и, в конце концов, дым практически смешивается с окружающим воздухом.

На этом примере можно сформулировать основные характерные черты турбулентного течения:

1) Переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит не в точно заданном месте, а в достаточно произвольном, случайном месте, и носит вероятностный характер.

2) Само турбулентное движение также носит случайный характер: тот или иной вихрь может оказаться в совершенно произвольном, непредсказуемом месте.

3) Сначала возникаю крупные вихри, размер которых больше, чем размер струйки дыма. Движение становится нестационарным и сильно анизотропным. Крупные вихри теряют устойчивость и распадаются на все более мелкие. Таким образом, возникает целая *иерархия вихрей.* Энергия движения этих вихрей передается от крупных вихрей к более мелким, и в конце этого процесса исчезает – происходит *диссипация* энергии при мелких масштабах.

4) Смешение дыма с окружающим воздухом практически не происходит при ламинарном режиме, а при турбулентном – носит очень интенсивный характер.

5) Несмотря на то, что граничные условия стационарны, само турбулентное течение носит ярко выраженный нестационарный характер - все газодинамические параметры меняются во времени.

6) Есть и еще одно важное свойство турбулентности: оно всегда трехмерно. Даже если мы рассматриваем одномерное течение в трубе или двумерный пограничный слой, все равно движение турбулентных вихрей происходит в направлениях всех трех координатных осей.

Переход от ламинарного течения к турбулентному характеризуется так называемым критическим числом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_{cr} = \left(\frac{\rho u L}{\mu}\right)_{cr} \tag{1.1}$$

где ρ - плотность потока, u - характерная скорость потока; L - характерный размер потока, μ - коэффициент динамической вязкости.

Например, для течения со скоростью u в трубе в качестве L используется диаметр трубы.

Рейнольдс показал, что в этом случае $2300 < \mathrm{Re}_{cr} < 20000$. Разброс весьма велик, практически на порядок величины.

Аналогичный результат получается в пограничном слое на пластине. В качестве характерного размера берется расстояние от передней кромки пластины, и тогда $3 \cdot 10^5 < \mathrm{Re}_{cr} < 4 \cdot 10^4$ [1]. Если же L определяется как толщина пограничного слоя, то $2700 < \mathrm{Re}_{cr} < 9000$

Есть экспериментальные исследования, которые показали, что Re_{cr} может быть еще больше.

В [1] показано, что значение критическое значение числа Рейнольдса зависит от большего числа факторов, например, от градиента давления, от высоты бугорков шероховатости, от интенсивности турбулентности во внешнем потоке, от перепада температур и т.д.

Вероятно, практически все эти факторы можно свести всего лишь к одному: *возмущению скорости*. И градиент давления, и шероховатость, и интенсивность турбулентности, и неравномерность температур, все это может вызвать некоторое возмущение скорости. Если это возмущение невелико, оно может быть погашено вязкими силами, стремящимися выровнять поле скоростей. При больших возмущениях течение может потерять устойчивость, и возникает турбулентность.

Напомним физический смысл числа Рейнольдса [1]: это соотношение сил инерции и сил вязкости.

Более строго:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{\rho u^2}{\mu \frac{u}{L}} \tag{1.2}$$

В числителе стоит удвоенный скоростной напор, а в знаменателе – величина, имеющая порядок напряжения трения, если в качестве L берется толщина пограничного слоя.

Скоростной напор стремится разрушить равновесие, а силы трения противодействуют этому.

Непонятно тогда, почему силы инерции (или скоростной напор) «побеждают» только тогда, когда они более, чем в 1000 раз, больше сил вязкости.

Вероятно, более удобно было бы использовать в качестве характерной скорости в Re_{cr} не абсолютную скорость потока *u*, а возмущение скорости.

В этом случае критическое число Рейнольдса составит порядка 10, т.е. при превышении возмущения скоростного напора над вязкими напряжениями в 5 раз происходит переход ламинарного режима течения в турбулентное.

Такое определение критического числа Рейнольдса хорошо объясняет такие экспериментально подтвержденные факты:

1) Для идеально равномерного профиля скорости на идеально гладкой поверхности традиционно определяемое число Re_{cr} стремится к бесконечности [1], т.е. перехода к турбулентности фактически не наблюдается. А вот число Рейнольдса, определяемое по величине возмущения скорости меньше критического, которое равно 10.

2) При наличии искусственных турбулизаторов, вызывающих всплеск скорости, сравнимый с основной скоростью, поток становится турбулентным при гораздо более низких значениях числа Рейнольдса, чем Re_{cr}, определенное по абсолютному значению скорости.

Это дает нам право использовать значение Re_{cr}:

$$\mathrm{Re}_{cr} = 10\,, \tag{1.3}$$

где в качестве характерной скорости используется абсолютное значение возмущения скорости, вызываемое указанными выше причинами.

1.2. Осредненное и пульсационное движение

Как уже говорилось, турбулентное движение является нестационарным и ему присущ широкий спектр масштабов турбулентных вихрей – от наиболее крупных до самых мелких.

Нестационарные уравнения динамики вязкой жидкости описывают движение в турбулентном течении вплоть до минимальных масштабов турбулентности. Однако при численном решении этих уравнений для того, чтобы учесть эти масштабы, может потребоваться настолько мелкая сетка, что даже современные компьютерные мощности не позволят решить такую задачу. То же относится и к выбору шага численного интегрирования по времени, так как характерное время мелкомасштабной турбулентности очень мало. С другой стороны, именно мелкомасштабная турбулентность играет важнейшую роль при описании турбулентных течений.

Поэтому прямое численное моделирование (Direct Numeric Simulation, DNS) турбулентных течений применяется для инженерных расчетов достаточно редко.

Более простой моделью является так называемое моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES). В этом подходе крупные вихри рассчитываются, а мельчайшие вихри подсеточного масштаба (Sub-Grid Scale, SGS) моделируются. Основной предпосылкой такого подхода является то, что наибольшие вихри, которые находятся под прямым воздействием граничных условий, несут максимум энергии и должны быть рассчитаны.

Эти подходы имеют хорошую перспективу, но в настоящее время наиболее распространенным способом моделирования турбулентности является использование осреднения Рейнольдса, когда вместо уравнений для мгновенных значений параметров используются уравнения для неких осредненных величин. Эти уравнения называются *уравнениями Рейнольдса*.

При турбулентном режиме течения в каждой точке потока все газодинамические параметры течения (скорость, температура, давление и т.д.) постоянно изменяются, притом очень неравномерно (см.рис.1)

На рис.1 мгновенная скорость u пульсирует около некоторого среднего во времени значения $\overline{u}$. Отклонение мгновенной скорости u от средней во времени называют пульсационными скоростями u', при этом в любой момент времени:

$$u = \overline{u} + u' \tag{1.4}$$

Таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осреднёнными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

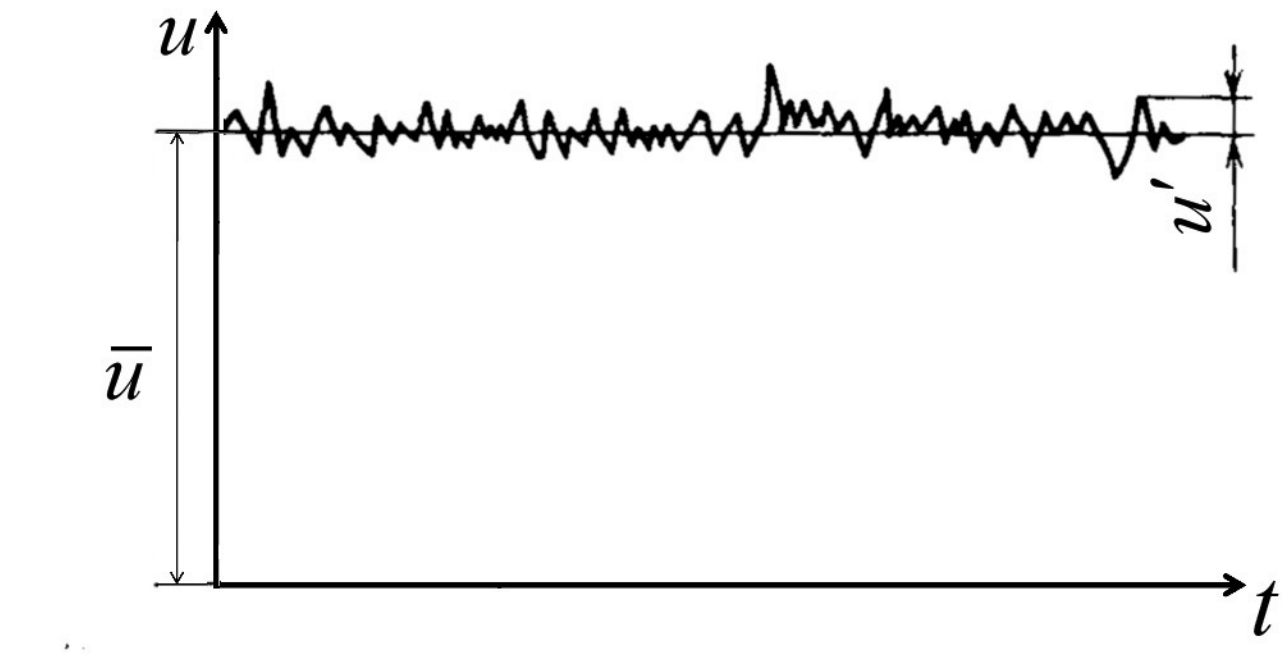

Рис.1. Осциллограмма колебаний скорости в определенной неподвижной точке турбулентного потока, имеющего неизменную среднюю скорость течения.

Можно использовать различные способы осреднения газодинамических параметров течения. Например, с использованием математического ожидания и функции плотности распределения вероятностей:

$$M\left(u\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u \cdot f\left(u\right) du\,, \tag{1.5}$$

где u - любой газодинамический параметр (в данном случае скорость), который рассматривается как случайная величина, $f(u)$ - функция распределения плотности вероятностей (ФРПВ) этой величины.

Для течений, в которых средняя величина не меняется во времени, можно использовать осреднение по времени:

$$\overline{u}(x,y,z)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}u(x,y,z,t)\,dt\,, \tag{1.6}$$

где Δt - период времени, существенно превышающий временной масштаб турбулентности.

Эргодическая гипотеза (др.-греч. ἔργον — работа и ὁδός — путь) в статистической физике — предположение о том, что средние по времени значения физических величин, характеризующих систему, равны их средним статистическим значениям; служит для обоснования статистической физики.

Таким образом, можно считать, что

$$M(u)\cong\overline{u} \tag{1.7}$$

В дальнейшем будем обозначать осредненные параметры верхним подчеркиванием: $\overline{u},\overline{\rho},\overline{T},\overline{p}$ и т.д. Это, так называемые, средние по Рейнольдсу.

Для осредненных и пульсационных величин справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\overline{A\pm B}=\overline{A}\pm\overline{B},\\
&\overline{AB}=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A'B'},\quad \overline{A'B'}\neq 0,\\
&\overline{\overline{A}B}=\overline{A}\cdot\overline{B},\\
&\overline{\frac{\partial A}{\partial x_i}}=\frac{\partial\overline{A}}{\partial x_i},\quad \overline{\frac{\partial A}{\partial t}}=\frac{\partial\overline{A}}{\partial t},\\
&\overline{A'}=0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Величину $\overline{A'B'}$ называют корреляцией пульсаций случайных величин A и B. В общем случае она не равна нулю, и это порождает очень интересные следствия. Об этом будет рассказано далее.

Осредненные уравнения движения вязкой жидкости называются *уравнениями Рейнольдса*.

1.3. Двумерный слой смешения несжимаемых жидкостей.

Рассмотрим смешение двух потоков несжимаемой жидкости, которые движутся параллельно оси *x*, но с разной скоростью. При этом плотность и динамическая вязкость являются константами.

Для несжимаемого течения:

$$div(\boldsymbol{v}) \equiv \frac{\partial u_m}{\partial x_m} = 0 \tag{1.9}$$

Тензор вязких напряжений равен

$$\tau_{ij} \equiv \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m}{\partial x_m} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.10}$$

Таким образом, входящая в уравнение количества движения величина

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ji}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) = \mu\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right] = \mu\left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right] = \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$$

А уравнение количества движения в проекции на ось x для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.11}$$

Очевидно, что каждый из двух параллельных потоков за счет вязкости вызывает возмущение скорости в соседнем потоке, и это возмущение равно разности скоростей Δu. Число Рейнольдса, выраженное через это возмущение и толщину слоя смешения δ, равно

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho\,\Delta u\,\delta}{\nu} \qquad (1.12)$$

Если оно превышает критическое значение ~ 10, происходит переход к турбулентному режиму течения.

Для математического описания этого течения используем подход Рейнольдса, т.е. проведем осреднение уравнения (1.11), используя правила (1.8),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{u})+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\overline{u}^2+\rho\overline{u'^2}+\overline{p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\overline{u}\,\overline{v}+\rho\overline{u'v'}\right)=\mu\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2} \qquad (1.13)$$

Действительно, например,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\rho uv}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\overline{(\overline{u}+u')(\overline{v}+v')}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(\overline{\overline{u}\,\overline{v}+u'\overline{v}+\overline{u}v'+u'v'}\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(\overline{\overline{u}\,\overline{v}}+\overline{u'\overline{v}}+\overline{\overline{u}v'}+\overline{u'v'}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial y}(\rho\overline{u}\,\overline{v})+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\overline{u'v'}\right)$$

Плотность не надо осреднять, т.к. она не пульсирует.

По форме записи уравнение (1.13) очень похоже на исходное уравнение (1.11), но в нем появились два дополнительных члена: $\rho\overline{u'^2}$, $\rho\overline{u'v'}$. Это связано с тем, что корреляции пульсаций случайных величин не равны нулю.

Попробуем понять физический смысл этих дополнительных членов.

Прежде всего, введем понятие *турбулентной кинетической энергии*:

$$K=\frac{1}{2}\overline{u_i'^2}=\frac{1}{2}\left(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2}\right) \qquad (1.14)$$

Эту энергию несут турбулентные вихри, и она отнюдь не равна нулю. Как уже указывалось, турбулентность носит существенно трехмерный характер, и поэтому не один из трех членов, входящих в (1.14), не равен нулю.

Дополнительный член $\overline{u'^2}$ является одной из составляющих турбулентной кинетической энергии.

Для того, что понять смысл величины $\rho\overline{u'v'}$, представим следующую умозрительную картину. Пусть в каком-то поперечном сечении слоя смешения профиль скорости имеет вид как на рисунке 2.

В какой-то момент времени возникает крупный турбулентный вихрь и пусть в результате появляется положительная пульсация поперечной скорости v'. За счет этого происходит перенос вещества вверх: из слоя с координатой y_1 (рис. 2) в слой с координатой y_2. Расстояние между слоями L примерно равно размеру возникшего вихря.

В результате количество движения в слое y_2 составит $\rho u_1 = \rho u(y_1)$ вместо количества движения $\rho u_2 = \rho u(y_2)$, которое было до возникновения вихря. Таким образом, произойдет изменение скорости, т.е. возникнет пульсация продольной скорости

$$u' = u_1 - u_2 \tag{1.15}$$

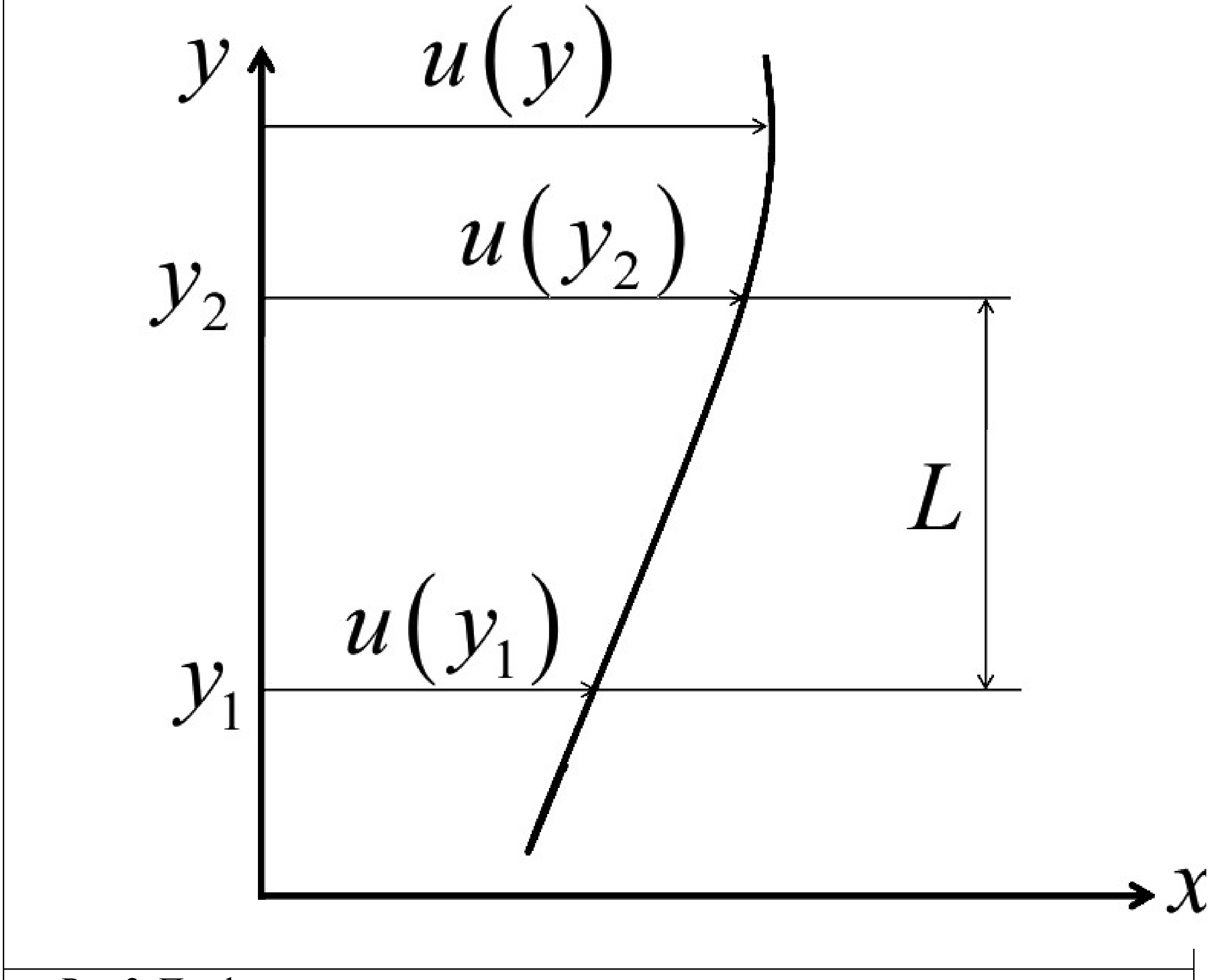

Рис.2. Профиль скорости в поперечном сечении слоя смешения.

В данном примере эта пульсация имеет отрицательный знак, т.к. на рис.2 скорость u_1 меньше скорости u_2. Т.е. происходит торможение потока в слое y_2.

Исходя из профиля скорости, представленного на рисунке, эту разницу скоростей можно приблизительно выразить через производную скорости:

$$u_1 - u_2 \cong -L\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1.16)$$

В результате получается, что положительная пульсация случайной величин v' вызвала пульсацию случайной величины u', определяемую формулой (1.16), т.е.

$$u'v' \cong -v'L\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1.17)$$

Аналогично, в случае отрицательной пульсации v' вызывает положительную пульсацию u', и в общем случае получается формула

$$u'v' \cong -|v'|L\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1.18)$$

В качестве оценки интенсивности пульсации поперечной скорости можно использовать среднеквадратичную величину $\sqrt{v'^2}$, и в результате после осреднения имеем:

$$\rho\overline{u'v'} \cong -\rho\sqrt{v'^2}L\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \qquad (1.19)$$

Влияние пульсаций проявляется в том, что более медленный слой жидкости тормозит более быстрый, и, наоборот, более быстрый слой увлекает за собой более медленный. Такой физический процесс похож на обычное трение и называется *турбулентным трением*.

При ламинарном режиме течения молекулярное трение в слое смешения определяется формулой

$$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1.20)$$

По аналогии строится турбулентное трение

$$\tau_T \equiv -\rho\overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}, \tag{1.21}$$

где

$$\mu_T = C_1 \rho \sqrt{\overline{v'^2}} L \ - \tag{1.22}$$

так называемый *коэффициент турбулентной вязкости*.

В этой формуле C_1 - константа порядка единицы.

Вводим определения: величина $\sqrt{\overline{v'^2}}$ - *масштаб пульсаций поперечной скорости*, L - *масштаб турбулентности*. Таким образом, коэффициент турбулентной вязкости пропорционален произведению масштаба пульсаций скорости на масштаб турбулентности, который имеет порядок линейного размера крупных турбулентных вихрей.

Стоит отметить, что вывод формулы для обыкновенной молекулярной вязкости дает аналогичный результат, только в ней используется среднеквадратичная скорость теплового движения молекул и длина свободного пробега молекул.

Оценка величин, входящих в уравнение (1.13), показывает, что в слое смешения справедливо:

$$\overline{u'^2} \ll \overline{u}^2, \quad \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \tag{1.23}$$

При использовании всех описанных допущений уравнение (1.13) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{u}) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\overline{u}^2 + \overline{p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\overline{u}\,\overline{v}) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\mu + \mu_T)\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right] \tag{1.24}$$

1.4. Алгебраические модели турбулентности

Формула (1.22), полученная для двумерного слоя смешения, лежит в основе большинства используемых на практике способов моделирования турбулентных течений - *моделей турбулентности*.

Простейшими из них являются модели, основанные на алгебраических формулах для масштаба пульсаций скорости $\sqrt{v'^2}$ и масштаба турбулентности L.

Для течения в пограничном слое успешно использовалась модель *пути смешения (перемешивания) Прандтля*.

Она основана на двух предположениях.

1) Турбулентный вихрь (комок жидкости) при перемещении из одного слоя пограничного слоя в другой сохраняет свою индивидуальность (свои свойства) на некотором расстоянии, называемом путем перемешивания. Это расстояние ассоциируется с масштабом турбулентности L.

2) Средние пульсации поперечной скорости $\sqrt{v'^2}$ пропорциональны пульсациям продольной скорости, т.е. для них можно использовать формулу (1.16)

В результате получается следующая формула для коэффициента турбулентной вязкости

$$\mu_T = C_2 \rho L^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \tag{1.25}$$

Чаще всего полагают, что длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию от стенки.

Для слоя смешения большее распространение получила формула, основанная на предположении, что $\sqrt{v'^2}$ пропорциональна разности скоростей смешивающихся потоков жидкости Δu, а масштаб турбулентности пропорционален ширине слоя смешения Δy. В этом случае

$$\mu_T = C_3 \rho \left| \Delta u \right| \Delta y \tag{1.26}$$

Разумеется, числовые коэффициенты пропорциональности C_1, C_2, C_3 имеют совершенно разные значения в рассматриваемых формулах (1.22), (1.25) и (1.26).

Основным достоинством алгебраических моделей турбулентности является их простота. Основная система уравнений, описывающих движение жидкости и называемых уравнениями Рейнольдса, по форме практически совпадает с системой уравнений Навье-Стокса. Только вместо коэффициента динамической вязкости μ используется некая эффективная вязкость

$$\mu_{ef} = \mu + \mu_T , \tag{1.27}$$

а вместо мгновенных значений параметров (например, u) используется их осредненные аналоги ($\overline{u}$ и т.п.)

1.5. Турбулентность в потоках переменной плотности. Осреднение по Фавру.

Правила осреднения Рейнольдса можно применить к основным уравнениям динамики жидкости и в случае сжимаемых течений, т.е. в случае, когда плотность не является константой. Однако для сжимаемых течений в полученных уравнениях содержится большое количество членов, содержащих пульсации плотности.

Для устранения этой проблемы используется метод, предложенный Фавром [2], в котором используются так называемые среднемассовые значения параметров или средние по Фавру:

$$\widetilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\overline{\rho}} \tag{1.28}$$

Мгновенные значения величин в этом случае представляются в виде:

$$T = \widetilde{T} + T'' , \tag{1.29}$$

где T''- пульсационная составляющая по Фавру, т.е. мгновенное отклонение параметра от среднего по Фавру.

Для средних по Фавру и соответствующих пульсаций справедливы следующие соотношения:

$$\widetilde{A \pm B} = \frac{\overline{\rho\left(A \pm B\right)}}{\bar{\rho}} = \tilde{A} \pm \tilde{B}, \tag{1.30}$$

$$\overline{A\tilde{B}} = A\frac{\overline{\rho\overline{B}}}{\bar{\rho}} = \bar{A}\tilde{B}, \tag{1.31}$$

$$\overline{\rho A''} = \overline{\rho\left(A - \tilde{A}\right)} = \overline{\rho A} - \overline{\rho\tilde{A}} = \bar{\rho}\tilde{A} - \bar{\rho}\tilde{A} = 0, \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned} &\overline{\rho AB} = \overline{\rho\left(\tilde{A} + A''\right)\left(\tilde{B} + B''\right)} = \overline{\rho\left(\tilde{A}\tilde{B} + A''\tilde{B} + \tilde{A}B'' + A''B''\right)} = \\ &= \overline{\rho\tilde{A}\tilde{B}} + \overline{\rho A''\tilde{B}} + \overline{\rho\tilde{A}B''} + \overline{\rho A''B''} = \bar{\rho}\tilde{A}\tilde{B} + \overline{\rho A''B''} = \bar{\rho}\tilde{A}\tilde{B} + \bar{\rho}\widetilde{A''B''}, \end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned} &\overline{A''} = \overline{\left(A - \tilde{A}\right)} = \bar{A} - \tilde{A} = \bar{A} - \frac{\overline{\rho A}}{\bar{\rho}} = \bar{A} - \frac{\overline{\left(\bar{\rho} + \rho'\right)\left(\bar{A} + A'\right)}}{\bar{\rho}} = \\ &= \bar{A} - \frac{\overline{\left(\bar{\rho}\bar{A} + \rho'\bar{A} + \bar{\rho}A' + \rho'A'\right)}}{\bar{\rho}} = -\frac{\overline{\rho'A'}}{\bar{\rho}} \neq 0 \end{aligned} \tag{1.34}$$