

8. Граничные условия

Задание граничных условий для уравнений Навье-Стокса представляет собой отнюдь не тривиальную задачу. Даже более того. С теоретической точки зрения это наиболее сложная часть рассматриваемой в данной главе проблемы.

На первый взгляд, кажется, что с точки зрения пространственных переменных мы имеем дело с типичной краевой задачей, и для ее решения необходимо задавать все газодинамические параметры на всей границе расчетной области.

На самом деле, это не так.

Рассмотрим в качестве примера движение потока сжимаемой жидкости вдоль оси x слева направо со скоростью u .

В параграфе 5 показано, что любая точка потока может распространять свое воздействие на окружающее пространство следующим образом:

- со скоростью u за счет перемещения самого потока - вниз по потоку;
- со скоростью $u+a$ за счет перемещения самого потока и распространения звуковых колебаний - вниз по потоку;
- со скоростью $u-a$ за счет распространения звуковых колебаний; если скорость u превышает скорость звука a , это воздействие сносится вниз и воздействие вверх по потоку отсутствует

Таким образом, в случае сверхзвукового течения правая граница расчетной области никак не может влиять вверх по потоку, и задание на ней граничных условий противоречит физическому смыслу.

Если же скорость на выходе из расчетной области дозвуковая, то распространений воздействия вверх по потоку возможно вследствие

распространения звуковых колебаний, и на этой границе требуется задавать какие-то граничные условия.

Какие же граничные условия необходимо задать на различных типах границ расчетной области?

Ответ на этот вопрос связан с так называемыми *характеристиками*.

8.1. Характеристики. Инварианты Римана.

Предполагается, что на границах расчетной области можно пренебречь влиянием вязкости. (Это предположение справедливо для многих типов границ, за исключением случаев, когда границей является стенка или плоскость (линия) симметрии.)

Уравнения динами невязкой жидкости или уравнения Эйлера относятся к уравнениям гиперболического типа.

В общем случае уравнения гиперболического типа описывают процессы, в которых происходит распространение информации с конечной скоростью.

Простейшим гиперболическим уравнением является уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(0, x) = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (8.1)$$

Характеристиками называются кривые в пространстве $x-t$, определяемые уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(u(t, x(t))) \quad (8.2)$$

Если решение $u(t, x)$ дифференцируемо, то оно постоянно вдоль характеристики. Действительно

$$\frac{du(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8.3)$$

Рассмотрим теперь одномерную нестационарную задачу течения сжимаемой невязкой жидкости вдоль оси x .

Основные уравнения в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u E + up) &= 0
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Это так называемая консервативная форма уравнений. Неконсервативная форма получается вычитанием из второго и третьего уравнений системы уравнения неразрывности, умноженного на u и E соответственно:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\
\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\
\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho u \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(up) &= 0
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Полная внутренняя энергия E может быть выражена через давление и скорость

$$E = e + \frac{1}{2}u^2 = \frac{p}{\beta\rho} + \frac{1}{2}u^2, \tag{8.6}$$

где $\beta = \gamma - 1$

Отсюда:

$$dE = \frac{dp}{\beta\rho} - \frac{pd\rho}{\beta\rho^2} + udu \tag{8.7}$$

Подставляя производные E в 3-е уравнение (8.5), получаем:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\beta\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + u \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{8.8}$$

Отсюда с учетом уравнения неразрывности и количества движения получаем уравнение энергии через давление:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{8.9}$$

Таким образом, рассматриваемую задачу решаем относительно вектора

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

Система уравнений в векторной форме имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (8.11)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Собственные значения этой матрицы равны $\lambda_1 = u$, $\lambda_2 = u - a$, $\lambda_3 = u + a$

Им соответствуют собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\rho/a \\ 1 \\ -\rho a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho/a \\ 1 \\ \rho a \end{pmatrix} \quad (8.13)$$

Таким образом, в преобразовании подобия

$$A = (S_A)^{-1} \Lambda S_A \quad (8.14)$$

матрицы равны

$$(S_A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho/a & \rho/a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\rho a & \rho a \end{pmatrix}, \quad S_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1/2 & -1/(2\rho a) \\ 0 & 1/2 & 1/(2\rho a) \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

(матрица $(S_A)^{-1}$ составлена из собственных векторов, а S_A находится как обратная ей)

С учетом (8.14) векторное уравнение (8.11) преобразуется к виду

$$S_A \frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda S_A \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (8.16)$$

Эта система допускает прямое интегрирование, если существует такой фактор интегрирования μ и такой вектор \mathbf{R} , что выполняется условие

$$\mu_i(W) \sum_{k=1}^3 (S_A)_{ik} dW_k = dR_i(W), \quad (8.17)$$

R_i - компоненты вектора \mathbf{R} , называются *инвариантами Римана*.

Здесь $(S_A)_{ik}$ компоненты матрицы S_A .

В этом случае уравнение (8.16) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} = 0 \quad (8.18)$$

В скалярной форме это векторное уравнение имеет вид простейшего уравнения переноса

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.19)$$

Для него существует 3 характеристических линии в пространственно-временной плоскости $x - t$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda_i \quad (8.20)$$

Инварианты Римана R_i постоянны вдоль характеристических линий.

Заметим, что эти линии не являются прямолинейными, т.к. λ_i является переменной величиной.

Т.к.

$$S_A dW = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/a^2 \\ 0 & 1/2 & -1/(2\rho a) \\ 0 & 1/2 & 1/(2\rho a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\rho - dp/a^2 \\ du/2 - dp/(2\rho a) \\ du/2 + dp/(2\rho a) \end{pmatrix}, \quad (8.21)$$

то для рассматриваемой задачи инварианты Римана можно определить интегрированием соотношений

$$d\rho - dp/a^2, \quad du - dp/(\rho a), \quad du + dp/(\rho a) \quad (8.22)$$

Первый дифференциал легко интегрируется; фактор интегрирования равен $\frac{1}{\rho}$

$$\frac{1}{\rho} \cdot d\rho - \frac{1}{\rho} \cdot dp/a^2 = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dp}{\gamma p} = d(\ln \rho) - d(\ln p^{1/\gamma}) = d\left(\ln\left(\frac{\rho}{p^{1/\gamma}}\right)\right) \quad (8.23)$$

Следовательно, инвариант, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = u$, равен $R_1 = \ln\left(\frac{\rho}{p^{1/\gamma}}\right)$. Это говорит о том, что вдоль траектории частиц

сохраняется постоянным комплекс $\frac{\rho}{p^{1/\gamma}}$ и, следовательно, комплекс $S = p/\rho^\gamma$

Для того, чтобы проинтегрировать следующие соотношения, выразим ρ через константу S и давление p :

$$\begin{aligned}
du \mp \frac{dp}{\rho a} &= du \mp \frac{dp}{\sqrt{\gamma p \rho}} = du \mp p^{-\frac{\gamma+1}{2\gamma}} dp \sqrt{S^{1/\gamma} / \gamma} = \\
&= du \mp \frac{2\gamma}{(\gamma-1)} d \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \sqrt{\frac{S^{1/\gamma}}{\gamma}} \right) = du \mp \frac{2\gamma}{(\gamma-1)} d \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \sqrt{\frac{p^{1/\gamma}}{\gamma p}} \right) = d \left[u \mp \frac{2}{(\gamma-1)} \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \right] = \\
&= d \left[u \mp \frac{2a}{(\gamma-1)} \right]
\end{aligned}$$

Следовательно, инвариантами Римана будут

$$R_{2,3} = u \mp \frac{2a}{(\gamma-1)} \quad (8.24)$$

Рассматриваемая задача легко обобщается на трехмерный случай. Легко показать, что тогда появляются еще 2 характеристики, определяемые уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = u, \quad (8.25)$$

и им соответствуют инварианты Римана

$$R_4 = v, \quad R_5 = w \quad (8.26)$$

8.2. Типы граничных условий

Граничные условия, как правило, делятся на 5 типов.

- 1) ВХОД – граница, на которой вектор скорости направлен *внутрь* расчетной области
- 2) ВЫХОД – граница, на которой вектор скорости направлен *наружу из* расчетной области
- 3) ГРАНИЦА СО СВОБОДНЫМ ПОТОКОМ – граница между расчетной областью и внешним потоком или неподвижным пространством; направление вектора скорости здесь заранее неизвестно
- 4) СТЕНКА – непроницаемая поверхность
- 5) ПЛОСКОСТЬ (ЛИНИЯ) СИММЕТРИИ – граница, относительно которой все параметры течения симметричны.

Рассмотрим подробнее эти случаи.

1) ВХОД

Предположим, что эта граница расположена перпендикулярно оси x , т.е. находится в плоскости Oyz .

Возможны два варианта.

Если составляющая скорости u больше скорости звука, все собственные значения матрицы, определяющей конвективный перенос через границу $\lambda_1 = u, \lambda_2 = u + a, \lambda_3 = u, \lambda_4 = u, \lambda_5 = u - a$, имеют положительный знак. Т.е. все 5 характеристик направлены *внутрь* расчетной области, и распространение воздействия направлено только от границы внутрь.

С этим случае граница называется СВЕРХЗВУКОВОЙ ВХОД, и необходимо задавать на ней все 5 параметров течения. Чаще всего, это 3 компоненты скорости, температура и давление (или плотность)

При сверхзвуковом входе проблем с заданием граничных условий обычно не возникает.

Более сложным представляется вариант, когда $u < a$. В это случае только 4 характеристики направлены *внутрь* расчетной области, а одна – из внутренней части расчетной области на границу.

Такая граница называется ДОЗВУКОВОЙ ВХОД, и на ней задается 4 параметра течения. Пятый параметр определяется экстраполяцией из внутренней части расчетной области.

Тут возможны различные варианты, зависящие от конкретной задачи.

Например, при решении задачи течения в трубе или задачи истечения струи из дозвукового сопла чаще всего на входе задаются 3 компоненты скорости и температура.

Давление на входе определяется из условия постоянства инварианта, связанного с собственным значением $\lambda = u - a$, т.е. из условия:

$$du - dp / (\rho a) = 0 \quad (8.27)$$

Для этого берется внутренняя точка, ближайшая к рассматриваемой граничной точке, в ней определяются полученные в ходе расчета скорость и давление, а далее, в результате решения разностного аналога уравнения (8.27), получается давление в граничной точке.

Более подробно этот процесс выглядит так. Предположим, что на n -ом шаге по времени все параметры течения известны. Требуется определить давление на границе на $(n+1)$ -ом шаге по времени. Обозначим параметры на границе индексом b , а параметры ближайшей внутренней точки – индексом i . Из уравнения (8.27) получаем:

$$p_b^{n+1} = p_i^n + (\rho a)(u_b^{n+1} - u_i^n) \quad (8.28)$$

Коэффициент (ρa) берется средним между двумя точками и может находиться итеративно (достаточно 2-х итераций).

Рассмотрим другой пример. Течение в камере сгорания ракетного двигателя. На входе в камеру, как правило, известны давление и температура.

В этом случае скорость на входе легко находится из условия постоянства

инварианта Римана $R = u - \frac{2a}{(\gamma-1)}$:

$$R_b = R_i \quad (8.29)$$

Значение R_i известно на n -ом шаге по времени, скорость звука определяется по давлению и температуре. Отсюда получаем u_b .

Можно рассмотреть и другие варианты задания параметров на дозвуковом входе. Все они легко решаются с использованием инварианта Римана.

2) ВЫХОД

В этом случае также следует рассмотреть 2 варианта: СВЕРХЗВУКОВОЙ ВЫХОД и ДОЗВУКОВОЙ ВЫХОД.

При сверхзвуковом выходе все 5 характеристик выходят из расчетной области. Граничные условия не задаются, а значения параметров на границе просто получаются экстраполяцией из соседних точек внутри расчетной области. В данном случае даже не требуется использование инвариантов Римана.

В случае дозвукового выхода, на границе необходимо задавать один параметр течения, и это, как правило, давление.

Для струйных течений, для обтекания тел газовым потоком, для течения в трубе это давление полагается равным давлению окружающего пространства.

Если рассматривается правая граница расчетной области, которая расположена перпендикулярно оси x , влияние вверх по потоку определяется характеристикой $\lambda = u - a$ и соответствующим инвариантом Римана.

Остальные параметры течения определяются с помощью инвариантов Римана.

Как и прежде, обозначим параметры на границе индексом b , а параметры ближайшей внутренней точки – индексом i .

Из условия постоянства инвариантов Римана, относящихся к характеристикам, направленным вниз по потоку, получаем:

$$\begin{aligned} (\rho_b^{n+1} - \rho_i^n) - (p_b^{n+1} - p_i^n) / a^2 &= 0 \\ (u_b^{n+1} - u_i^n) + (p_b^{n+1} - p_i^n) / (\rho a) &= 0 \end{aligned} \quad (8.30)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \rho_b^{n+1} &= \rho_i^n + \frac{(p_b^{n+1} - p_i^n)}{a^2} \\ u_b^{n+1} &= u_i^n - \frac{(p_b^{n+1} - p_i^n)}{\rho a} \end{aligned} \quad (8.31)$$

Как и в предыдущем параграфе, на n -ом шаге по времени известны значения ρ_i^n, p_i^n, u_i^n во внутренней части расчетной области; p_b^{n+1} - задано.

Далее по формулам (8.31) определяются значения параметров ρ_b^{n+1}, u_b^{n+1} на границе на $(n+1)$ -ом шаге по времени.

Для остальных компонент скорости из (8.26) следует:

$$\begin{aligned}v_b^{n+1} &= v_i^n \\w_b^{n+1} &= w_i^n\end{aligned}\tag{8.32}$$

3) ГРАНИЦА СО СВОБОДНЫМ ПОТОКОМ

На этой границе, компонента скорости, направленная по нормали к границе, всегда дозвуковая. Направление этой скорости, как уже говорилось, может быть любым. Следовательно, характеристики тоже могут быть направлены как внутрь расчетной области, так и наружу.

Как правило, такая граница отделяет расчетную область от внешнего потока или неподвижного пространства. Казалось бы, в этом случае можно задавать граничные условия, совпадающие с параметрами внешнего потока. В ряде случаев это допустимо, но более корректно использовать характеристические переменные.

В качестве примера рассмотрим границу, находящуюся сверху расчетной области перпендикулярно оси y .

Имеем, как всегда 5 характеристик, которые в данном случае соответствуют собственным значениям $\lambda_1 = v$, $\lambda_2 = v + a$, $\lambda_3 = v$, $\lambda_4 = v$, $\lambda_5 = v - a$

Очевидно, что вторая характеристика приходит на границу изнутри расчетной области, а пятая - из внешней области. Обозначим параметры внешней области индексом e (от английского слова external). Считаем, что влияние внешнего потока обусловлено и другими характеристиками.

С точки зрения характеристических переменных это означает, что внешним потоком и границей справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}d\rho - dp / a^2 &= 0, \\dv - dp / (\rho a) &= 0, \\du &= 0, \\dw &= 0\end{aligned}\tag{8.33}$$

а между внутренней областью и границей –

$$dv + dp / (\rho a) = 0\tag{8.34}$$

Разностная форма этих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
(\rho_b^{n+1} - \rho_e^n) - (p_b^{n+1} - p_e^n) / a^2 &= 0, \\
(v_b^{n+1} - v_e^n) - (p_b^{n+1} - p_e^n) / (\rho a) &= 0, \\
(u_b^{n+1} - u_e^n) &= 0, \\
(w_b^{n+1} - w_e^n) &= 0, \\
(v_b^{n+1} - v_i^n) + (p_b^{n+1} - p_i^n) / (\rho a) &= 0
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Решение этой системы:

$$\begin{aligned}
u_b^{n+1} &= u_e^n \\
w_b^{n+1} &= w_e^n \\
v_b^{n+1} &= \frac{1}{2}(v_e^n + v_i^n) + \frac{p_i^n - p_e^n}{2\rho a} \\
p_b^{n+1} &= \frac{1}{2}(p_i^n + p_e^n) + \frac{1}{2}(\rho a)(v_i^n - v_e^n) \\
\rho_b^{n+1} &= \rho_e^n + \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{2}(p_i^n - p_e^n) + \frac{1}{2}(\rho a)(v_i^n - v_e^n) \right]
\end{aligned} \tag{8.36}$$

Анализ этих формул показывает, что даже если внешний поток неподвижен, т.е. $u_e = v_e = w_e = 0$, при приближении положительного возмущения давления к границе появится положительная нормальная составляющая скорости v_b . Изменится и давление на границе. Таким образом, параметры на границе будут отличаться от параметров внешнего потока.

Задавать граничные условия, совпадающие с параметрами внешнего потока, можно только в том случае, когда заранее известно, что никакие возмущения, происходящие во внутренней части расчетной области, не дойдут до границы.

Все уравнения, полученные для границ, расположенных параллельно координатным плоскостям, легко распространяются на произвольно расположенные границы. Только вместо скоростей u, v, w следует использовать нормальные и тангенциальные к границе составляющие скорости.

Например, для рассмотренного случая вместо v используется u_n - нормальная по отношению к границе составляющая скорости, а вместо u, w в качестве берутся тангенциальные составляющие скорости.

4) СТЕНКА

Стенки могут быть *со скольжением потока*. Тогда нормальная составляющая скорости на границе равна нулю, а для тангенциальных составляющих справедливо:

$$\frac{\partial u_t}{\partial n} = 0 \quad (8.37)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по нормали к поверхности.

Если на стенке нет *скольжения потока*, то все компоненты скорости на границе равны нулю.

В обоих случаях для давления принимается:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (8.38)$$

Температура стенки может быть задана

$$T_b = T_w, \quad (8.39)$$

или стенка может быть адиабатной, тогда

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (8.40)$$

Использование характеристических переменных в районе стенки затруднительно, т.к. здесь сильное влияние оказывает вязкость.

Условия (8.37), (8.38), (8.40) следует задавать в неявном виде. Для этого очень удобно использовать, так называемые, *фиктивные ячейки*, которые будут подробно рассмотрены в следующем разделе.

5) ПЛОСКОСТЬ (ЛИНИЯ) СИММЕТРИИ

Этот тип границы с точки зрения математики является частным случаем СТЕНКИ, когда есть скольжение и стенка является адиабатной.

8.3. Фиктивные ячейки

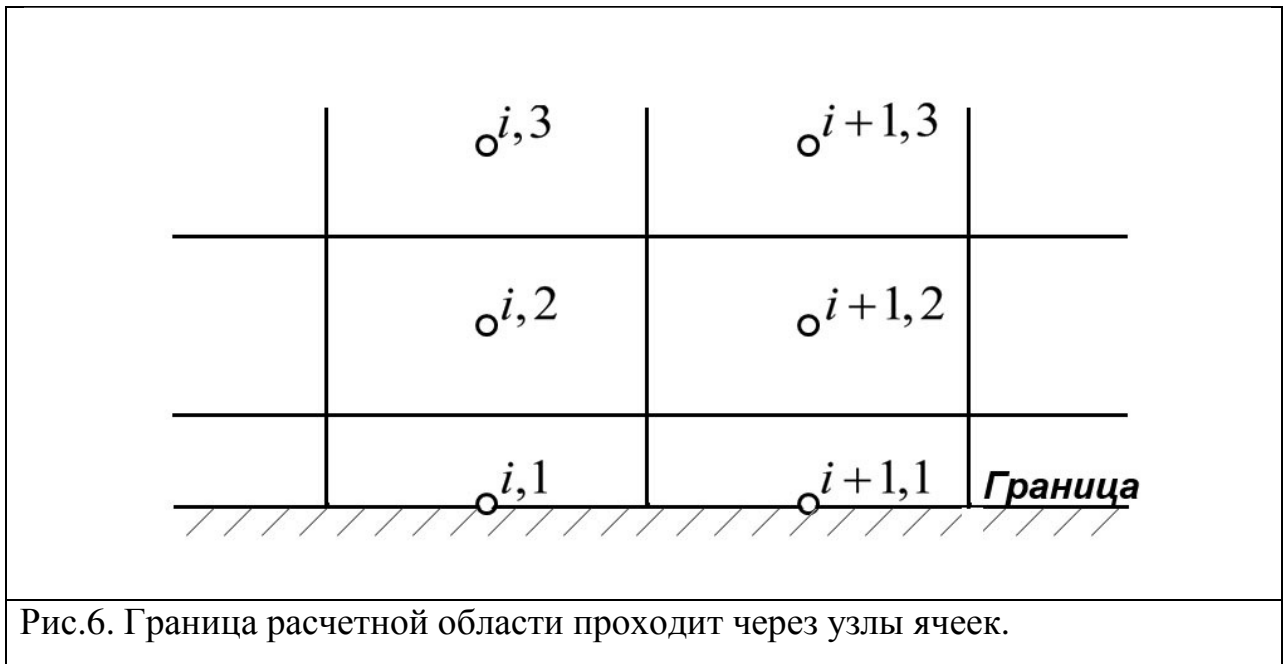
В этом разделе для простоты описания рассматриваются границы в двумерных задачах, однако все полученные результаты легко распространяются на трехмерные задачи.

Прежде всего, отметим, что контрольные объемы, расположенные в непосредственной близости от границы расчетной области можно конструировать различными способами.

Рассмотрим это на примере нижней границы двумерной сетки.

На рис.6 показан способ *I*, когда граница расчетной области проходит через узлы сетки. Приграничные контрольные объемы вдвое меньше соседних объемов. Такой способ удобен, когда значения всех параметров течения известны – либо они непосредственно заданы граничными условиями, либо определяются с помощью характеристик. В этом случае для приграничных контрольных объемов нет необходимости записывать уравнения балансов, т.к. значения параметров в узлах этих ячеек уже известны. В нашем примере это узлы $(i,1)$, $i=1,2,\dots,N_x$

Значения параметров течения в этих узлах используются для определения потоков через грани соседних ячеек - $(i,2)$, $i=1,2,\dots,N_x$.



Способ II, представленный на рис.7, основан на том, что граница расчетной области проходит через нижние грани приграничных контрольных объемов. В этом случае значения параметров течения в приграничных узлах заранее неизвестны, и для них записываются такие же балансные уравнения, как и для остальных ячеек.

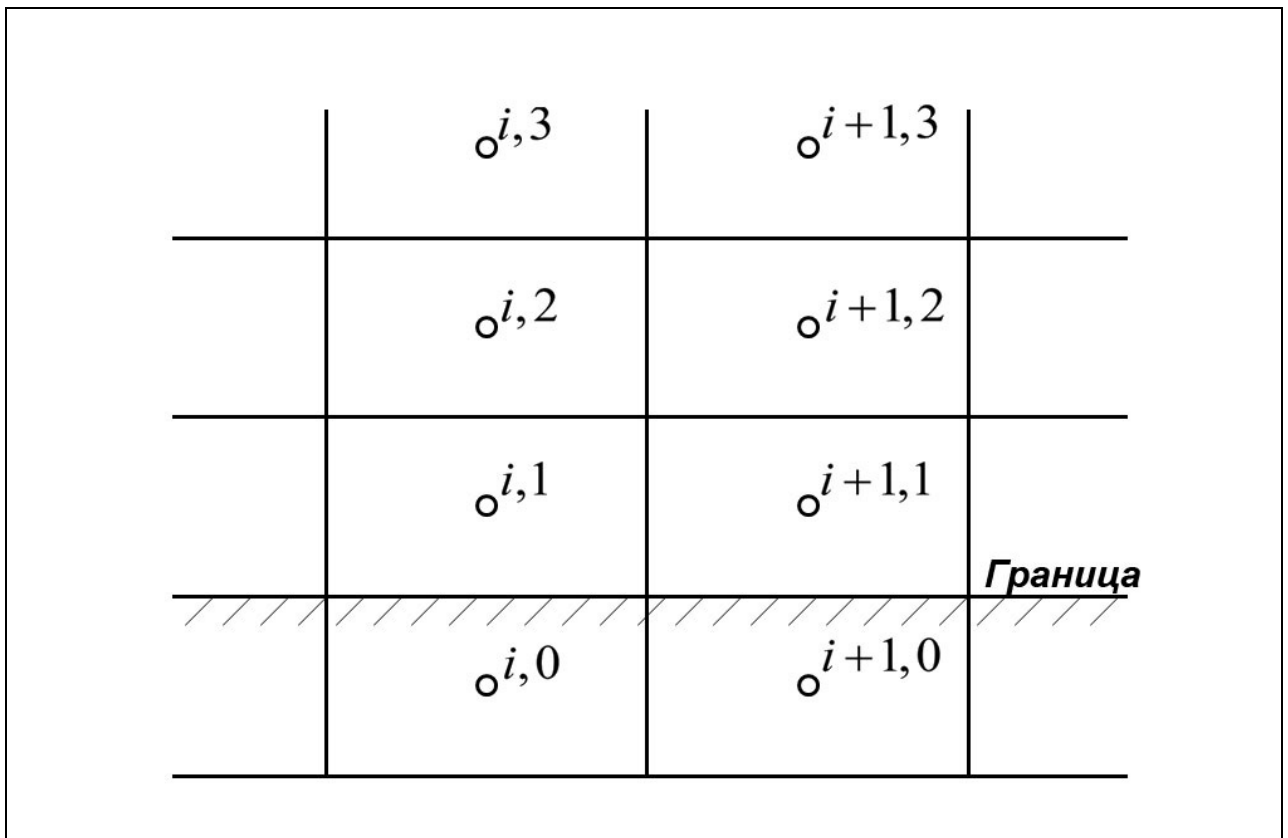


Рис.7. Граница расчетной области совпадает с нижними границами ячеек. Создание фиктивных ячеек на нижней границе расчетной области.

Если параметры течения на границе известны, то при составлении балансов потоки через нижние грани приграничных ячеек легко определяются.

Дело обстоит хуже для границ типа СТЕНКА или СИММЕТРИЯ, на которых задаются не сами параметры, а их производные. Для использования таких граничных условий необходимо вводить соотношения между параметрами в нескольких слоях приграничных ячеек, причем в неявной форме.

В этом случае очень удобно использовать так называемые фиктивные или «призрачные» ячейки (“ghost cells”).

Фиктивные или «призрачные ячейки» не существуют после генерации сетки, а создаются в процессе расчета. Они тесно привязаны к границе. На плоской границе фиктивные ячейки симметричны относительно границы приграничным ячейкам (см. рис.7).

В узлах этих ячеек параметры течения задаются таким образом, чтобы обеспечить правильные значения потоков на границе. Например, на стенке невязкий конвективный поток массы и энергии равен нулю, а конвективный поток момента количества движения обусловлен только давлением. Вязкие потоки должны соответствовать заданным на границе вязким силам и тепловому потоку. Совместное выполнение требований для конвективных и вязких потоков не всегда возможно, поэтому при расчете конвективных потоков используется один набор параметров в узлах фиктивных ячеек, а при расчете диффузионных – другой.

8.3.1. Граничные условия для конвективных потоков

СТЕНКА и СИММЕТРИЯ

С точки зрения невязких конвективных потоков эти типы границ идентичны. Основное условие: конвективные потоки массы и энергии равны нулю, а конвективный поток момента количества движения обусловлен только давлением, т.е. нормальная к границе составляющая скорости равна нулю.

Например, для нижней границы (рис.7) это условие обеспечивается тем, что в фиктивной ячейке нормальная составляющая скорости берется с противоположным знаком по отношению к пристеночной ячейке:

$$v_{i,0} = -v_{i,1} \quad (8.41)$$

В этом случае на границе получается: $v_{i,0+1/2} = \frac{1}{2}(v_{i,0} + v_{i,1}) = 0$

В векторной форме это условие записывается как:

$$U_{i,0} = WU_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (8.42)$$

где

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.43)$$

Если граница расположена слева от расчетной области, то для нее в фиктивной ячейке полагаем

$$u_{0,j} = -u_{1,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N_y, \quad (8.44)$$

а матрица W содержит отрицательную единицу на второй позиции.

Неявное представление граничных условий

Основное разностное уравнение (7.8) для двумерной задачи выглядит как

$$\mathbf{A}_{i,j} \delta U_{i,j}^{n+1} + \mathbf{D}_{i,j} \delta U_{i+1,j}^n + \mathbf{E}_{i,j} \delta U_{i-1,j}^n + \mathbf{B}_{i,j} \delta U_{i,j+1}^n + \mathbf{C}_{i,j} \delta U_{i,j-1}^n = \Delta U_{i,j}^n \quad (8.45)$$

Для приращений δU на стенке справедливы такие же соотношения, как для основного вектора U .

Например, для нижней границы

$$\delta U_{i,0}^{n+1} = W \delta U_{i,1}^{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad (8.46)$$

откуда получаем, что при $j=1$ конвективные потоки через нижнюю грань вычисляются не формуле (7.3), а по формуле

$$\begin{aligned} (G_C)_{i,j+1/2} &= (G_C)_{i,j+1/2}^n + \alpha \left[(B_+)_{i,j+1/2}^n \delta U_{i,j}^{n+1} + (B_-)_{i,j+1/2}^n \delta U_{i,j+1}^{n+1} \right], \\ (G_C)_{i,j-1/2} &= (G_C)_{i,j-1/2}^n + \alpha \left[(B_+)_{i,j-1/2}^n W + (B_-)_{i,j-1/2}^n \right] \delta U_{i,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (8.47)$$

Явное выражение для потока определяется формулой (5.74):

$$(G_C)_{i,j-1/2}^n = (B_+)_{i,j-1/2}^n U_L + (B_-)_{i,j-1/2}^n U_R = \left((B_+)_{i,j-1/2}^n W + (B_-)_{i,j-1/2}^n \right) v_R \quad (8.48)$$

Основное разностное уравнение для $j=1$ имеет вид

$$A_{i,j} \delta U_{i,j}^{n+1} + D_{i,j} \delta U_{i+1,j}^n + E_{i,j,k} \delta U_{i-1,j}^n + B_{i,j,k} \delta U_{i,j+1}^n = \Delta U_{i,j}^n, \quad (8.49)$$

при этом коэффициенты $D_{i,j}, E_{i,j}, B_{i,j}$ рассчитываются по тем же формулам, что и для не приграничных узлов, а вклад конвекции G_C в коэффициент $A_{i,j}$ определяется формулой

$$A_{i,j} \rightarrow A_{i,j} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y} \left[(B_+)_{i,j+1/2}^n - (B_-)_{i,j-1/2}^n - (B_+)_{i,j-1/2}^n W \right] \quad (8.50)$$

вместо

$$A_{i,j} \rightarrow A_{i,j} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y} \left[(B_+)_{i,j+1/2}^n - (B_-)_{i,j-1/2}^n \right]$$

ВЫХОД СВЕРХЗВУКОВОЙ

Для такого типа границы тоже удобно использовать фиктивные ячейки.

Например, если выход расположен справа, то

$$U_{N_x+1,j} = U_{N_x,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (8.51)$$

Неявное представление граничных условий

Для неявного представления граничных условий при $i = N_x$ получаем из (7.2):

$$\begin{aligned} (F_C)_{i+1/2,j,k} &= (F_C)_{i+1/2,j,k}^n + \alpha \left[(A_+)_{i+1/2,j,k}^n + (A_-)_{i+1/2,j,k}^n \right] \delta U_{i,j,k}^{n+1}, \\ (F_C)_{i-1/2,j,k} &= (F_C)_{i-1/2,j,k}^n + \alpha \left[(A_+)_{i-1/2,j,k}^n \delta U_{i-1,j,k}^{n+1} + (A_-)_{i-1/2,j,k}^n \delta U_{i,j,k}^{n+1} \right], \end{aligned} \quad (8.52)$$

Разностное уравнение:

$$\mathbf{A}_{i,j} \delta U_{i,j}^{n+1} + \mathbf{E}_{i,j} \delta U_{i-1,j}^n + \mathbf{B}_{i,j} \delta U_{i,j+1}^n + \mathbf{C}_{i,j} \delta U_{i,j-1}^n = \Delta U_{i,j}^n \quad (8.53)$$

А вклад конвекции F_C в коэффициент $\mathbf{A}_{i,j}$ определяется формулой

$$\mathbf{A}_{i,j} \rightarrow \mathbf{A}_{i,j} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} \left[(A_+)_{i+1/2,j,k}^n - (A_-)_{i-1/2,j,k}^n + (A_-)_{i+1/2,j,k}^n \right] \quad (8.54)$$

вместо

$$\mathbf{A}_{i,j} \rightarrow \mathbf{A}_{i,j} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} \left[(A_+)_{i+1/2,j,k}^n - (A_-)_{i-1/2,j,k}^n \right]$$

ГРАНИЦА СО СВОБОДНЫМ ПОТОКОМ

И здесь фиктивные ячейки удобны для применения. В этом случае параметры в этих ячейках полагаются равными параметрам внешнего потока.

Фиктивные ячейки могут применяться и для других типов границ: ВХОД, ВЫХОД ДОЗВУКОВОЙ. Но больших преимуществ по сравнению с заданием потоков непосредственно на границе этот метод не дает.

8.3.2. Граничные условия для вязких потоков

СТЕНКА

Стенку со скольжением рассматривать нет смысла, т.е. там нет вязкости.

На стенке без скольжения задаются следующие параметры:

$$\begin{aligned} u_w = v_w = w_w = 0 \\ p_w = p_{in} \end{aligned} \quad (8.55)$$

Здесь индексом W обозначены параметры на стенке, индексом in - параметры в ближайшем внутреннем узле расчетной области.

Для уравнения энергии возможны разные варианты граничных условий:

- 1) На стенке может быть задана температура - T_w
- 2) Стенка может быть адиабатной, тогда

$$T_w = T_{in} \quad (8.56)$$

- 3) Возможен вариант, когда тепловой поток, идущий в стенку q_w , сбрасывает за счет излучения. Баланс тепла имеет вид

$$\varepsilon \sigma_0 T_w^4 = \lambda_w \frac{T_{in} - T_w}{\Delta n}, \quad (8.57)$$

где Δn - расстояние от узла приграничной ячейки до стенки по нормали, ε - коэффициент черноты стенки, σ_0 - константа Стефана-Больцмана, λ_w - коэффициент теплопроводности газа у стенки.

Уравнение (8.57) решается итеративно относительно T_w в каждый момент времени в каждой приграничной ячейке.

Зная значения всех параметров на стенке, можно определить их и в узлах фиктивных ячеек. Например, для нижней границы (см.рис.7) эти значения определяются по формуле

$$f_{i,0} = 2f_w - f_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad (8.58)$$

где $f = (u, v, w, p, T)$ - любой параметр течения.

Неявное представление граничных условий

Для получения неявного представления граничных условий на нижней стенке поступаем следующим образом.

Вязкие потоки на верхней и нижней границе приграничной ячейки $j=1$ определяются формулой (7.6):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{G}_V)_{i,j+1/2} &= (\mathbf{G}_V)_{i,j+1/2}^n + \alpha N_{i,j+1/2}^n \frac{1}{\Delta y} (\delta U_{i,j+1}^n - \delta U_{i,j}^n), \\
(\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2} &= (\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2}^n + \alpha N_{i,j-1/2}^n \frac{1}{\Delta y} (\delta U_{i,j}^n - \delta U_{i,j-1}^n)
\end{aligned} \tag{8.59}$$

где $\delta U_{i,j-1}^n$ - приращение в фиктивной ячейке. Необходимо как-то выразить его через приращения в основных ячейках.

Для этого, как и ранее вводим вектор

$$\mathbf{V} = [\rho, u, v, e]^T \tag{8.60}$$

Пусть

$$\delta \mathbf{V}_{i,j-1} = \mathbf{\Omega} \delta \mathbf{V}_{i,j} \tag{8.61}$$

Тогда

$$\delta U_{i,j-1} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} \delta \mathbf{V}_{i,j-1} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{V}} \mathbf{\Omega} \delta \mathbf{V}_{i,j} \tag{8.62}$$

Вспоминаем, что с учетом (6.23)

$$\mathbf{G}_V = \mathbf{M}_V \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} = \mathbf{M}_V \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial y} \tag{8.63}$$

Используя это, можно аппроксимировать вязкий поток на границе как

$$\mathbf{G}_V = \mathbf{M}_V \frac{\mathbf{V}_{i,j} - \mathbf{V}_{i,j-1}}{\Delta y} \tag{8.64}$$

При неявном представлении это дает:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2}^{n+1} &= (\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2}^n + \frac{\partial \mathbf{G}_V}{\partial \mathbf{V}_{i,j}} \delta \mathbf{V}_{i,j}^{n+1} + \frac{\partial \mathbf{G}_V}{\partial \mathbf{V}_{i,j-1}} \delta \mathbf{V}_{i,j-1}^{n+1} = (\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2}^n + \frac{\mathbf{M}_V}{\Delta y} \delta \mathbf{V}_{i,j}^{n+1} - \frac{\mathbf{M}_V}{\Delta y} \delta \mathbf{V}_{i,j-1}^{n+1} \\
(\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2} &= (\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2}^n + \alpha \frac{\mathbf{M}_V}{\Delta y} \delta \mathbf{V}_{i,j}^{n+1} - \alpha \frac{\mathbf{M}_V}{\Delta y} \delta \mathbf{V}_{i,j-1}^{n+1}
\end{aligned} \tag{8.65}$$

Отсюда с учетом (8.61)

$$(\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2} = (\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2}^n + \alpha \frac{\mathbf{M}_V}{\Delta y} (\mathbf{I} - \mathbf{\Omega}) \delta \mathbf{V}_{i,j}^{n+1} \tag{8.66}$$

Окончательно получаем:

$$(\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2} = (\mathbf{G}_V)_{i,j-1/2}^n + \alpha \frac{1}{\Delta y} \tilde{\mathbf{N}}_{i,j-1/2}^n \delta \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} \tag{8.67}$$

где

$$\widetilde{N}_{i,j-1/2}^n = M_V (I - \Omega) \frac{\partial V}{\partial U} \quad (8.68)$$

Таким образом, разностное уравнение для узла $j=1$ имеет вид

$$\mathbf{A}_{i,j} \delta U_{i,j}^{n+1} + \mathbf{D}_{i,j} \delta U_{i+1,j}^n + \mathbf{E}_{i,j,k} \delta U_{i-1,j}^n + \mathbf{B}_{i,j,k} \delta U_{i,j+1}^n = \Delta U_{i,j}^n \quad (8.69)$$

А вклад вязкого потока G_V в коэффициент $\mathbf{A}_{i,j}$ определяется формулой

$$\mathbf{A}_{i,j} \rightarrow \mathbf{A}_{i,j} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} (N_{i,j+1/2}^n + \widetilde{N}_{i,j-1/2}^n) \quad (8.70)$$

вместо

$$\mathbf{A}_{i,j} \rightarrow \mathbf{A}_{i,j} - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} (N_{i,j+1/2,k}^n + N_{i,j-1/2,k}^n)$$

Напомним, что $N = M_V \frac{\partial V}{\partial U}$, а M_V определяется по формуле (6.24).

Открытым еще остается вопрос определения матрицы Ω , входящей в формулу (8.61). Она строится с использованием соотношений (8.58) и зависит от граничных условий для уравнения энергии.

1) На стенке задана температура - T_w

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.71)$$

2) Стенка может быть адиабатной, тогда

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.72)$$

3) Вариант с излучением по формуле (8.57). Дифференцируя эту формулу, получаем

$$4\varepsilon\sigma_0 T_w^3 \delta T_w - \lambda_w \frac{\delta T_{in} - \delta T_w}{\Delta n} = 0 \quad (8.73)$$

Можно показать, что при малых значениях Δn первый член в этом уравнении значительно меньше второго и им можно пренебречь. Поэтому:

$$\delta T_w = \delta T_{in} = \delta T_{i,j} \quad (8.74)$$

С учетом формулы (8.58) получаем

$$\delta T_{i,0} = 2\delta T_W - \delta T_{i,1} = \delta T_{i,j} \quad (8.75)$$

Следовательно, формула для Ω совпадает с (8.72)

Для всех остальных типов границ предполагается отсутствие градиентов параметров на границе, т.е. принимается, что вектор U в фиктивной ячейке равен значения в приграничной ячейке. Например, если граница расположена справа, то

$$U_{Nx+1,j} = U_{Nx,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (8.76)$$

При неявном представлении получаются такие же формулы как для стенки с матрицей Ω равной единичной:

$$\Omega = I \quad (8.77)$$