7. Разностная форма уравнений Навье-Стокса и способы решения системы

7.1. Разностное уравнение

Разностная форма системы уравнений Навье-Стокса получается из основного уравнения (4.8)

$$\frac{\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{F}_{i+1/2,j,k}-\boldsymbol{F}_{i-1/2,j,k}}{\Delta x}+\frac{\boldsymbol{G}_{i,j+1/2,k}-\boldsymbol{G}_{i,j-1/2,k}}{\Delta y}+\frac{\boldsymbol{H}_{i,j,k+1/2}-\boldsymbol{H}_{i,j,k-1/2}}{\Delta z}=0 \qquad (7.1)$$

путем подстановки полученных в предыдущих параграфах представлений потоков на гранях контрольного объема.

Конвективные потоки (формулы (5.70) и аналогичные ей формулы):

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{F}_C\right)_{i+1/2,j,k} &= \left(\boldsymbol{F}_C\right)_{i+1/2,j,k}^n+\alpha\left[\left(\boldsymbol{A}_+\right)_{i+1/2,j,k}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}+\left(\boldsymbol{A}_-\right)_{i+1/2,j,k}^n \delta \boldsymbol{U}_{i+1,j,k}^{n+1}\right], \\
\left(\boldsymbol{F}_C\right)_{i-1/2,j,k} &= \left(\boldsymbol{F}_C\right)_{i-1/2,j,k}^n+\alpha\left[\left(\boldsymbol{A}_+\right)_{i-1/2,j,k}^n \delta \boldsymbol{U}_{i-1,j,k}^{n+1}+\left(\boldsymbol{A}_-\right)_{i-1/2,j,k}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}\right],
\end{aligned} \qquad (7.2)$$

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{G}_C\right)_{i,j+1/2,k} &= \left(\boldsymbol{G}_C\right)_{i,j+1/2,k}^n+\alpha\left[\left(\boldsymbol{B}_+\right)_{i,j+1/2,k}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}+\left(\boldsymbol{B}_-\right)_{i,j+1/2,k}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j+1,k}^{n+1}\right], \\
\left(\boldsymbol{G}_C\right)_{i,j-1/2,k} &= \left(\boldsymbol{G}_C\right)_{i,j-1/2,k}^n+\alpha\left[\left(\boldsymbol{B}_+\right)_{i,j-1/2,k}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j-1,k}^{n+1}+\left(\boldsymbol{B}_-\right)_{i,j-1/2,k}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}\right],
\end{aligned} \qquad (7.3)$$

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{H}_C\right)_{i,j,k+1/2} &= \left(\boldsymbol{H}_C\right)_{i,j,k+1/2}^n+\alpha\left[\left(\boldsymbol{C}_+\right)_{i,j,k+1/2}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}+\left(\boldsymbol{C}_-\right)_{i,j,k+1/2}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j,k+1}^{n+1}\right], \\
\left(\boldsymbol{H}_C\right)_{i,j,k-1/2} &= \left(\boldsymbol{H}_C\right)_{i,j,k-1/2}^n+\alpha\left[\left(\boldsymbol{C}_+\right)_{i,j,k-1/2}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j,k-1}^{n+1}+\left(\boldsymbol{C}_-\right)_{i,j,k-1/2}^n \delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}\right]
\end{aligned} \qquad (7.4)$$

Вязкие потоки (формулы (6.17), (6.18) и т.п.):

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{F}_V\right)_{i+1/2,j,k} &= \left(\boldsymbol{F}_V\right)_{i+1/2,j,k}^n+\alpha \boldsymbol{L}_{i+1/2,j,k}^n \frac{1}{\Delta x}\left(\delta \boldsymbol{U}_{i+1,j,k}^{n+1}-\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}\right), \\
\left(\boldsymbol{F}_V\right)_{i-1/2,j,k} &= \left(\boldsymbol{F}_V\right)_{i-1/2,j,k}^n+\alpha \boldsymbol{L}_{i-1/2,j,k}^n \frac{1}{\Delta x}\left(\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}-\delta \boldsymbol{U}_{i-1,j,k}^{n+1}\right),
\end{aligned} \qquad (7.5)$$

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{G}_V\right)_{i,j+1/2,k} &= \left(\boldsymbol{G}_V\right)_{i,j+1/2,k}^n+\alpha \boldsymbol{N}_{i,j+1/2,k}^n \frac{1}{\Delta y}\left(\delta \boldsymbol{U}_{i,j+1,k}^{n+1}-\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}\right), \\
\left(\boldsymbol{G}_V\right)_{i,j-1/2,k} &= \left(\boldsymbol{G}_V\right)_{i,j-1/2,k}^n+\alpha \boldsymbol{N}_{i,j-1/2,k}^n \frac{1}{\Delta y}\left(\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}-\delta \boldsymbol{U}_{i,j-1,k}^{n+1}\right),
\end{aligned} \qquad (7.6)$$

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{H}_V\right)_{i,j,k+1/2} &= \left(\boldsymbol{H}_V\right)_{i,j,k+1/2}^n+\alpha \boldsymbol{K}_{i,j,k+1/2}^n \frac{1}{\Delta z}\left(\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k+1}^{n+1}-\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}\right), \\
\left(\boldsymbol{H}_V\right)_{i,j,k-1/2} &= \left(\boldsymbol{H}_V\right)_{i,j,k-1/2}^n+\alpha \boldsymbol{K}_{i,j,k-1/2}^n \frac{1}{\Delta z}\left(\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}-\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k-1}^{n+1}\right)
\end{aligned} \qquad (7.7)$$

В результате подстановки получаем основное разностное уравнение:

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_{i,j,k}\delta\boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}+\mathbf{D}_{i,j,k}\delta\boldsymbol{U}_{i+1,j,k}^{n+1}+\mathbf{E}_{i,j,k}\delta\boldsymbol{U}_{i-1,j,k}^{n+1}+\mathbf{B}_{i,j,k}\delta\boldsymbol{U}_{i,j+1,k}^{n+1}+\mathbf{C}_{i,j,k}\delta\boldsymbol{U}_{i,j-1,k}^{n+1}\\+\mathbf{F}_{i,j,k}\delta\boldsymbol{U}_{i,j,k+1}^{n+1}+\mathbf{G}_{i,j,k}\delta\boldsymbol{U}_{i,j,k-1}^{n+1}=\Delta\boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n}\end{gathered}\tag{7.8}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta\boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n}=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\left(\boldsymbol{F}_C\right)_{i+1/2,j,k}^{n}-\left(\boldsymbol{F}_C\right)_{i-1/2,j,k}^{n}\right]-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left[\left(\boldsymbol{G}_C\right)_{i,j+1/2,k}^{n}-\left(\boldsymbol{G}_C\right)_{i,j-1/2,k}^{n}\right]\\-\frac{\Delta t}{\Delta z}\left[\left(\boldsymbol{H}_C\right)_{i,j,k+1/2}^{n}-\left(\boldsymbol{H}_C\right)_{i,j,k-1/2}^{n}\right]-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\left(\boldsymbol{F}_V\right)_{i+1/2,j,k}^{n}-\left(\boldsymbol{F}_V\right)_{i-1/2,j,k}^{n}\right]\\-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left[\left(\boldsymbol{G}_V\right)_{i,j+1/2,k}^{n}-\left(\boldsymbol{G}_V\right)_{i,j-1/2,k}^{n}\right]-\frac{\Delta t}{\Delta z}\left[\left(\boldsymbol{H}_V\right)_{i,j,k+1/2}^{n}-\left(\boldsymbol{H}_V\right)_{i,j,k-1/2}^{n}\right],\end{gathered}\tag{7.9}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_{i,j,k}=I+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\left[\left(\boldsymbol{A}_+\right)_{i+1/2,j,k}^{n}-\left(\boldsymbol{A}_-\right)_{i-1/2,j,k}^{n}\right]-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(\boldsymbol{L}_{i+1/2,j,k}^{n}+\boldsymbol{L}_{i-1/2,j,k}^{n}\right)\\+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y}\left[\left(\boldsymbol{B}_+\right)_{i,j+1/2,k}^{n}-\left(\boldsymbol{B}_-\right)_{i,j-1/2,k}^{n}\right]-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}\left(\boldsymbol{N}_{i,j+1/2,k}^{n}+\boldsymbol{N}_{i,j-1/2,k}^{n}\right)\\+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta z}\left[\left(\boldsymbol{C}_+\right)_{i,j,k+1/2}^{n}-\left(\boldsymbol{C}_-\right)_{i,j,k-1/2}^{n}\right]-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta z^2}\left(\boldsymbol{K}_{i,j,k+1/2}^{n}+\boldsymbol{K}_{i,j,k-1/2}^{n}\right),\end{gathered}\tag{7.10}$$

$$\mathbf{D}_{i,j,k}=+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{A}_-\right)_{i+1/2,j,k}^{n}+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{L}_{i+1/2,j,k}^{n},\tag{7.11}$$

$$\mathbf{E}_{i,j,k}=-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{A}_+\right)_{i-1/2,j,k}^{n}+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{L}_{i-1/2,j,k}^{n},\tag{7.12}$$

$$\mathbf{B}_{i,j,k}=+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y}\left(\boldsymbol{B}_-\right)_{i,j+1/2,k}^{n}+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}\boldsymbol{N}_{i,j+1/2,k}^{n},\tag{7.13}$$

$$\mathbf{C}_{i,j,k}=-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y}\left(\boldsymbol{B}_+\right)_{i,j-1/2,k}^{n}+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta y^2}\boldsymbol{N}_{i,j-1/2,k}^{n},\tag{7.14}$$

$$\mathbf{F}_{i,j,k}=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta z}\left(\boldsymbol{C}_-\right)_{i,j,k+1/2}^{n}+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta z^2}\boldsymbol{K}_{i,j,k+1/2}^{n},\tag{7.15}$$

$$\mathbf{G}_{i,j,k}=-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta z}\left(\boldsymbol{C}_+\right)_{i,j,k-1/2}^{n}+\frac{\alpha\Delta t}{\Delta z^2}\boldsymbol{K}_{i,j,k-1/2}^{n}\tag{7.16}$$

Здесь:

$\Delta\boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n}$ - приращения вектора $\boldsymbol{U}$ при переходе от n - го шага по времени к $(n+1)$-му шагу, вычисленное явным методом;

$\mathbf{A}_{i,j,k},\mathbf{D}_{i,j,k},\mathbf{E}_{i,j,k},\mathbf{B}_{i,j,k},\mathbf{C}_{i,j,k},\mathbf{F}_{i,j,k}\mathbf{G}_{i,j,k}$ - блочные матрицы коэффициентов, каждый из них является матрицей размера (5×5);

Матрицы $\boldsymbol{A}_+, \boldsymbol{A}_-, \boldsymbol{B}_+, \boldsymbol{B}_-, \boldsymbol{C}_+, \boldsymbol{C}_-$ вычисляются по формулам (5.21),(5.75) и им подобной.

Матрицы $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{K}$ вычисляются по формулам (6.15) при использовании предположения о «тонком слое», либо по формуле (6.25) при использовании предположения о «малости дивергенции скорости».

Разностное уравнение (7.8) имеет точно такую же форму, как рассмотренные в главе 2 уравнения. Оно содержит 7 неизвестных векторов δU. Вся система линейных алгебраических уравнений описывается *семидиагональной матрицей блочных* коэффициентов.

Для его решения можно использовать методы, описанные в главе 2: итерационный метод Гаусса-Зейделя с переменой направлений, метод приближенной факторизации, модифицированный метод приближенной факторизации Маккормака и т.п.

Только надо иметь в виду, что коэффициенты в системе линейных уравнений теперь являются не числами, а матрицами размера (5×5). Поэтому при решении системы уравнений с трехдиагональной матрицей следует использовать не скалярную, а *векторную прогонку*.

7.2. Векторная прогонка

Метод векторной прогонки аналогичен методу скалярной прогонки. Единственное существенное отличие состоит в том, что вместо деления на число используется умножение на обращенную матрицу.

Пусть в результате факторизации уравнения (7.8) возникла необходимость решения системы уравнений с блочной трехдиагональной матрицей

$$\boldsymbol{a}_m \boldsymbol{\Phi}_m = \boldsymbol{b}_m \boldsymbol{\Phi}_{m+1} + \boldsymbol{c}_m \boldsymbol{\Phi}_{m-1} + \boldsymbol{d}_m \tag{7.17}$$

где $m = 1, 2, ..., N-1, N$.

Здесь неизвестная величина $\mathbf{\Phi}$ и коэффициент $\boldsymbol{d}$ являются векторами, размер которых равен 5. Коэффициенты $\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{c}_m$ являются матрицами (5×5).

Для $m=1, \quad m=N$ коэффициенты

$$\boldsymbol{c}_1 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{b}_N = \mathbf{0} \tag{7.18}$$

где $\mathbf{0}$ - матрица, состоящая из нулевых элементов.

Остальные коэффициенты в этих точках определяются из граничных условий

Записанные условия (7.17), (7.18) означают, что $\mathbf{\Phi}_1$ известна в зависимости от $\mathbf{\Phi}_2$. Уравнение для $m=2$ представляет собой соотношение между $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \mathbf{\Phi}_3$. Но поскольку $\mathbf{\Phi}_1$ может быть выражена через $\mathbf{\Phi}_2$, это соотношение приводится к соотношению между $\mathbf{\Phi}_2$ и $\mathbf{\Phi}_3$. Другими словами, $\mathbf{\Phi}_2$ можно выразить через $\mathbf{\Phi}_3$. Процесс подстановки можно продолжать до тех пор, пока значение $\mathbf{\Phi}_N$ не будет выражено через $\mathbf{\Phi}_{N+1}$. Но поскольку $\mathbf{\Phi}_{N+1}$ не существует, мы в действительности на данном этапе получим численное значение $\mathbf{\Phi}_N$. Это позволит нам начать процесс обратной подстановки, в котором $\mathbf{\Phi}_{N-1}$ получится из $\mathbf{\Phi}_N$, $\mathbf{\Phi}_{N-2}$ — из $\mathbf{\Phi}_{N-1}$, ..., $\mathbf{\Phi}_2$ — из $\mathbf{\Phi}_3$ и $\mathbf{\Phi}_1$ — из $\mathbf{\Phi}_2$.

Предположим, что при прямой подстановке имеем зависимость

$$\mathbf{\Phi}_m = \boldsymbol{P}_m \mathbf{\Phi}_{m+1} + \boldsymbol{Q}_m \tag{7.19}$$

после того, как получено

$$\mathbf{\Phi}_{m-1} = \boldsymbol{P}_{m-1} \mathbf{\Phi}_m + \boldsymbol{Q}_{m-1} \tag{7.20}$$

Подставляя (7.20) в (7.17), получаем следующее соотношение:

$$\mathbf{\Phi}_m = \left(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{c}_m \boldsymbol{P}_{m-1}\right)^{-1} \boldsymbol{b}_m \mathbf{\Phi}_{m+1} + \left(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{c}_m \boldsymbol{P}_{m-1}\right)\left(\boldsymbol{c}_m \boldsymbol{Q}_{m-1} + \boldsymbol{d}_m\right) \tag{7.21}$$

Сравниваем это выражение с (7.19) и получаем формулы для прогоночных коэффициентов $\boldsymbol{P}_m, \boldsymbol{Q}_m$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_m &= \left(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{c}_m \boldsymbol{P}_{m-1}\right)^{-1} \boldsymbol{b}_m, \\ \boldsymbol{Q}_m &= \left(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{c}_m \boldsymbol{P}_{m-1}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{c}_m \boldsymbol{Q}_{m-1} + \boldsymbol{d}_m\right) \end{aligned} \tag{7.22}$$

Эти рекуррентные соотношения определяют $\boldsymbol{P}_m, \boldsymbol{Q}_m$ через $\boldsymbol{P}_{m-1}, \boldsymbol{Q}_{m-1}$. Заметим, что в начале рекуррентного процесса уравнение (7.17) для $m = 1$ по форме почти совпадает с (7.19). Таким образом, $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Q}_1$ определяются в следующем виде:

$$\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{a}_1^{-1}\boldsymbol{b}_1, \quad \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{a}_1^{-1}\boldsymbol{d}_1 \tag{7.23}$$

На другом конце последовательности $\boldsymbol{P}_m, \boldsymbol{Q}_m$ имеем $b_N = 0$. Это дает $\boldsymbol{P}_N = 0$, и из (7.19) получаем

$$\boldsymbol{Q}_N = \boldsymbol{\Phi}_N \tag{7.24}$$

С этого момента осуществляется обратная подстановка с помощью уравнения (7.19).

Краткое описание алгоритма

1. Рассчитываем $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{Q}_1$ из уравнения (7.23).

2. Используя рекуррентные соотношения (7.22), получаем $\boldsymbol{P}_m, \boldsymbol{Q}_m$ для $m = 2, 3, ..., N$

3. Полагаем $\boldsymbol{Q}_N = \boldsymbol{\Phi}_N$

4. Используя уравнение (7.19) для $m = N-1, N-2, ..., 3, 2, 1$, получаем $\boldsymbol{\Phi}_{N-1}, \boldsymbol{\Phi}_{N-2}, ..., \boldsymbol{\Phi}_3, \boldsymbol{\Phi}_2, \boldsymbol{\Phi}_1$.