6. Представление вязких потоков

6.1. Векторно-матричное представление

Векторы вязких потоков $\boldsymbol{F}_V, \boldsymbol{G}_V, \boldsymbol{H}_V$ с учетом формул (1.11)-(1.13) имеют вид:

$$\boldsymbol{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xx} \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{zx} \\ \begin{pmatrix} q_x - u\tau_{xx} \\ -v\tau_{yx} - w\tau_{zx} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xy} \\ -\tau_{yy} \\ -\tau_{zy} \\ \begin{pmatrix} q_y - u\tau_{xy} \\ -v\tau_{yy} - w\tau_{zy} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_{xz} \\ -\tau_{yz} \\ -\tau_{zz} \\ \begin{pmatrix} q_z - u\tau_{xz} \\ -v\tau_{yz} - w\tau_{zz} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \qquad (6.1)$$

Для компонент тензора вязких напряжений и вектора плотности теплового потока используются формулы (1.7), (1.8).

Тогда вектор $\boldsymbol{F}_V$, например, имеет вид

$$\boldsymbol{F}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu\frac{\partial w}{\partial z} \\ -\mu\frac{\partial v}{\partial x} - \mu\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\mu\frac{\partial w}{\partial x} - \mu\frac{\partial u}{\partial z} \\ \left(-\lambda\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{4}{3}u\mu\frac{\partial u}{\partial x} - v\mu\frac{\partial v}{\partial x} - w\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \left(\frac{2}{3}u\mu\frac{\partial v}{\partial y} - v\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{2}{3}u\mu\frac{\partial w}{\partial z} - w\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{bmatrix} \qquad (6.2)$$

Внутренняя энергия идеального газа является функцией только температуры и связана соотношением:

$$C_V = \frac{de}{dT} \qquad (6.3)$$

Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{de}\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{C_V}\frac{\partial e}{\partial x} \qquad (6.4)$$

Если использовать число Прандтля

$$\Pr = \frac{\mu C_P}{\lambda} = \frac{\mu \gamma C_V}{\lambda}, \tag{6.5}$$

то:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\mu \gamma}{\Pr} \frac{\partial e}{\partial x} \tag{6.6}$$

В предыдущем параграфе был введен вектор V :

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ e \end{bmatrix}$$

Используя этот вектор, можно записать вектор вязкого потока F_V в компактной векторно-матричной форме:

$$\boldsymbol{F}_V = \boldsymbol{M}_{FX} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} + \boldsymbol{M}_{FY} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + \boldsymbol{M}_{FZ} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} \tag{6.7}$$

где матрицы $\boldsymbol{M}_{FX}, \boldsymbol{M}_{FY}, \boldsymbol{M}_{FZ}$ определяются соотношениями

$$\boldsymbol{M}_{FX} = -\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}u & v & w & \frac{\gamma}{\Pr} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{FY} = -\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & -\frac{2}{3}u & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_{FZ} = -\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & -\frac{2}{3}u & \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

Для вязких потоков в направлениях y и z несложно получить формулы аналогичные (6.7):

$$\boldsymbol{G}_V = \boldsymbol{M}_{GX} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} + \boldsymbol{M}_{GY} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + \boldsymbol{M}_{GZ} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}, \tag{6.9}$$

$$\boldsymbol{H}_V = \boldsymbol{M}_{HX} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} + \boldsymbol{M}_{HY} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} + \boldsymbol{M}_{HZ} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} \tag{6.10}$$

Упражнение

Определить матрицы $\boldsymbol{M}_{GX}, \boldsymbol{M}_{GY}, \boldsymbol{M}_{GZ}$ и $\boldsymbol{M}_{HX}, \boldsymbol{M}_{HY}, \boldsymbol{M}_{HZ}$, входящие в формулы (6.9) и (6.10).

6.2. Аппроксимация вязких потоков в явной форме

Производные вектора $\boldsymbol{V}$, входящие в вязкие потоки, легко представляются в разностной форме через значения в соседних по отношению к граням узлы сетки. Только это представление будет различным для каждого из потоков.

Например, на грани $(i+1/2, j, k)$ рассматриваемого контрольного объема эта аппроксимация имеет вид

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x}\right)_{i+1/2,j,k} &= \frac{\boldsymbol{V}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{V}_{i,j,k}}{\Delta x} \\
\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}\right)_{i+1/2,j,k} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}\right)_{i,j,k} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y}\right)_{i+1,j,k}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{V}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{V}_{i,j-1,k}}{2\Delta y} + \frac{\boldsymbol{V}_{i+1,j+1,k} - \boldsymbol{V}_{i+1,j-1,k}}{2\Delta y}\right] \\
\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z}\right)_{i+1/2,j,k} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\boldsymbol{V}_{i,j,k+1} - \boldsymbol{V}_{i,j,k-1}}{2\Delta z} + \frac{\boldsymbol{V}_{i+1,j,k+1} - \boldsymbol{V}_{i+1,j,k-1}}{2\Delta z}\right]
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Параметры газа, входящие в матрицы $\boldsymbol{M}_{..}$, определяются как средние между значениями в соседних узлах. Например,

$$(\boldsymbol{M}_{GX})_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{M}_{GX})_{i,j,k} + (\boldsymbol{M}_{GX})_{i+1,j,k}\right] \tag{6.12}$$

Аналогично этим примерам строятся производные вектора $\boldsymbol{V}$ и соответствующие матрицы на других гранях контрольного объема.

Упражнение

Получить формулы для аппроксимации производных вектора $\boldsymbol{V}$ на гранях $(i, j+1/2, k)$, $(i, j, k-1/2)$

6.3. Неявное представление вязких потоков. Предположение о «тонком слое»

Вектор $\boldsymbol{V}$ является взаимно-однозначной функцией вектора $\boldsymbol{U}$. Следовательно, формулы (6.7), (6.9), (6.10) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_V &= \boldsymbol{M}_{FX}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{M}_{FY}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} + \boldsymbol{M}_{FZ}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z} \\
\boldsymbol{G}_V &= \boldsymbol{M}_{GX}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{M}_{GY}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} + \boldsymbol{M}_{GZ}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z} \\
\boldsymbol{H}_V &= \boldsymbol{M}_{HX}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x} + \boldsymbol{M}_{HY}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y} + \boldsymbol{M}_{HZ}\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Вязкие потоки, таким образом, зависят, в основном, не от самого вектора $\boldsymbol{U}$, а от его пространственных производных $\boldsymbol{U}_x = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x}$, $\boldsymbol{U}_y = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}$, $\boldsymbol{U}_z = \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}$.

Поэтому при выражении вязких потоков на $(n+1)$-м шаге по времени через потоки на n-м шаге с помощью разложения в ряд Тейлора (по формуле (4.11)) следует использовать не приращение относительно $\delta\boldsymbol{U}^{n+1}$, а приращения относительно $\delta(\boldsymbol{U}_x)^{n+1}, \delta(\boldsymbol{U}_y)^{n+1}, \delta(\boldsymbol{U}_z)^{n+1}$. Например,

$$\boldsymbol{F}_V^{\,n+1} = \boldsymbol{F}_V^{\,n} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}_x}\right)^n \delta(\boldsymbol{U})_x^{\,n+1} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}_y}\right)^n \delta(\boldsymbol{U})_y^{\,n+1} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}_z}\right)^n \delta(\boldsymbol{U})_z^{\,n+1} \tag{6.14}$$

Такое представление не очень удобно для численного решения системы алгебраических уравнений. Дело в том, что появление смешанных производных в неявной аппроксимации основного уравнения приведет к тому, что ленточная матрица этой системы будет иметь значительно бóльшую ширину ленты, чем было бы без учета смешанных производных. В частности, для двухмерных задач ширина лента становится равной 9, вместо 5. Это существенно усложнит решение системы.

Поэтому используется так называемое *предположение о «тонком слое»,* введенное Tysinger, T., Caughey, D. [4]. Оно состоит в том, что смешанными производными в неявном представлении вязких потоков можно пренебречь.

Исходя из этого предположения, в формуле (6.14) можно пренебречь членами, содержащими $\delta(\boldsymbol{U})_y^{\,n+1}, \delta(\boldsymbol{U})_z^{\,n+1}$. Действительно, поток $\boldsymbol{F}_V$ входит в производную по координате x, следовательно, именно $\delta(\boldsymbol{U})_y^{n+1}, \delta(\boldsymbol{U})_z^{n+1}$ приводят к появлению смешанных производных в неявном представлении вязких потоков.

Введем обозначения:

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{F}_V}{\partial \boldsymbol{U}_x} \equiv \boldsymbol{M}_{FX} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}; \quad \boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{G}_V}{\partial \boldsymbol{U}_y} \equiv \boldsymbol{M}_{GY} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}; \quad \boldsymbol{K} = \frac{\partial \boldsymbol{H}_V}{\partial \boldsymbol{U}_z} \equiv \boldsymbol{M}_{HZ} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}} \tag{6.15}$$

Тогда формулы для неявного представления вязких потоков представляются в виде:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_V{}^{n+1} &= \boldsymbol{F}_V{}^n + \boldsymbol{L}^n \delta(\boldsymbol{U})_x^{n+1} = \boldsymbol{F}_V{}^n + \boldsymbol{L}^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta \boldsymbol{U}^{n+1}\right) \\
\boldsymbol{G}_V{}^{n+1} &= \boldsymbol{G}_V{}^n + \boldsymbol{N}^n \delta(\boldsymbol{U})_y^{n+1} = \boldsymbol{G}_V{}^n + \boldsymbol{N}^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta \boldsymbol{U}^{n+1}\right) \\
\boldsymbol{H}_V{}^{n+1} &= \boldsymbol{H}_V{}^n + \boldsymbol{K}^n \delta(\boldsymbol{U})_x^{n+1} = \boldsymbol{H}_V{}^n + \boldsymbol{K}^n \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta \boldsymbol{U}^{n+1}\right)
\end{aligned} \tag{6.16}$$

При этом вязкие потоки на n-ом шаге рассчитываются по полным формулам (6.7), (6.9), (6.10), в которых учитываются смешанные производные. Т.к. эти потоки представлены в явной форме, никаких проблем со смешанными производными не возникает.

Матрица $\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}$ определяется по формуле (5.40), рассмотренной в предыдущем параграфе.

Конкретные значения потоков на гранях контрольного объема определяются, исходя из формул (6.16). Например, на грани $(i+1/2, j, k)$:

$$(\boldsymbol{F}_V)_{i+1/2,j,k} = (\boldsymbol{F}_V)^n_{i+1/2,j,k} + \alpha \boldsymbol{L}^n_{i+1/2,j,k} \frac{1}{\Delta x}\left(\delta \boldsymbol{U}^n_{i+1,j,k} - \delta \boldsymbol{U}^n_{i,j,k}\right), \tag{6.17}$$

на грани $(i, j-1/2, k)$:

$$(\boldsymbol{G}_V)_{i,j-1/2,k} = (\boldsymbol{G}_V)^n_{i,j-1/2,k} + \alpha \boldsymbol{N}^n_{i,j-1/2,k} \frac{1}{\Delta y}\left(\delta \boldsymbol{U}^n_{i,j,k} - \delta \boldsymbol{U}^n_{i,j-1,k}\right) \tag{6.18}$$

и т.д.

6.4. Неявное представление вязких потоков. Предположение о «малости дивергенции скорости»

Предположение о «тонком слое» позволяет получить достаточно быстро сходящий процесс итераций при численном решении основной системы уравнений.

Однако входящие в него гипотезы никак не обоснованы с физической точки зрения.

Рассмотрим, например, течение в пограничном слое или в слое смешения, когда основной поток движется по направлению оси x, а ось y направлена перпендикулярно этому движению. В этом случае:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y} \tag{6.19}$$

Тем не менее, при использовании предположения о «тонком слое» во второй компоненте вектора $\boldsymbol{F}$

$$\tau_{xx} = \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

отбрасывается член $\frac{\partial v}{\partial y}$, который имеет такой же порядок, как и $\frac{\partial u}{\partial x}$.

В третье компоненте вектора $\boldsymbol{F}$

$$\tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

отбрасывается член $\frac{\partial u}{\partial y}$, который на самом деле значительно больше чем $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Примеры можно продолжить.

Такие нестыковки могут приводить к замедлению процесса сходимости итерационного процесса и даже к потере устойчивости.

Вероятно, более правильно было бы при упрощении вязких потоков в неявном представлении использовать реалистичные физические предпосылки.

Предлагаемое здесь допущение основано на том, что даже в сжимаемых течениях дивергенция скорости невелика. Во всяком случае, величина дивергенции существенно меньше отдельных членов, входящих в ее выражение.

В этом случае выражение для сил вязкости в уравнении количества можно упростить:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)= \\ &=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.20}$$

т.к. предполагается, что дивергенция скорости $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ мала.

Таким образом,

$$j=1:\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$j=2:\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]$$

$$j=3:\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

Аналогичным образом можно приблизительно оценить вязкие члены в уравнении энергии:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}u_j\tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu u_j\right)+u_j\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]=$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu u_j\right)+u_j\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \approx \frac{\partial}{\partial x_i}\left[u_j\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]$$

Или

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_j \tau_{ji} \approx \frac{\partial}{\partial x}\left[u\mu\frac{\partial u}{\partial x} + v\mu\frac{\partial v}{\partial x} + w\mu\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[u\mu\frac{\partial u}{\partial y} + v\mu\frac{\partial v}{\partial y} + w\mu\frac{\partial w}{\partial y}\right] \quad (6.21)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[u\mu\frac{\partial u}{\partial z} + v\mu\frac{\partial v}{\partial z} + w\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

Т.е. для приблизительной оценки вязких потоков можно использовать формулы:

$$\boldsymbol{F}_V \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \begin{pmatrix} -u\mu\frac{\partial u}{\partial x} - v\mu\frac{\partial v}{\partial x} \\ -w\mu\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\mu\gamma}{\Pr}\frac{\partial e}{\partial x} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_V \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \begin{pmatrix} -u\mu\frac{\partial u}{\partial y} - v\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ -w\mu\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\mu\gamma}{\Pr}\frac{\partial e}{\partial y} \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_V \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \begin{pmatrix} -u\mu\frac{\partial u}{\partial z} - v\mu\frac{\partial v}{\partial z} \\ -w\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\mu\gamma}{\Pr}\frac{\partial e}{\partial z} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Таким образом, на основе физически обоснованных допущений получены вязкие потоки, в которых отсутствуют смешанные производные.

Векторно-матричная форма потоков имеет вид:

$$\boldsymbol{F}_V \approx \boldsymbol{M}_V \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} = \boldsymbol{M}_V \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial x},$$
$$\boldsymbol{G}_V \approx \boldsymbol{M}_V \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} = \boldsymbol{M}_V \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial y}, \quad (6.23)$$
$$\boldsymbol{H}_V \approx \boldsymbol{M}_V \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} = \boldsymbol{M}_V \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}}\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial z}$$

где

$$\boldsymbol{M}_V = -\mu\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & v & w & \frac{\gamma}{\Pr} \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

Матрица $\boldsymbol{M}_V$ отличается от матриц $\boldsymbol{M}_{FX}, \boldsymbol{M}_{HY}, \boldsymbol{M}_{HZ}$, входящих в формулы (6.7), (6.9), (6.10), в основном, одним числовым коэффициентом (1 вместо 4/3).

Для неявного представления вязких потоков используются точно такие же формулы, как в случае предположения о «тонком слое» - формулы (6.16):

$$\boldsymbol{F}_V{}^{n+1} = \boldsymbol{F}_V{}^{n} + \boldsymbol{L}^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\delta \boldsymbol{U}^{n+1}\right)$$

$$\boldsymbol{G}_V{}^{n+1} = \boldsymbol{G}_V{}^{n} + \boldsymbol{N}^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta \boldsymbol{U}^{n+1}\right)$$

$$\boldsymbol{H}_V{}^{n+1} = \boldsymbol{H}_V{}^{n} + \boldsymbol{K}^n \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta \boldsymbol{U}^{n+1}\right)$$

Только матрицы определяются как

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}_V \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{U}} \tag{6.25}$$

Важно еще раз напомнить, что упрощенная матрица M_V используется только для неявного представления потоков, а для явного представления используются точные формулы. Так как в результате итераций $\delta U^{n+1} \to 0$, то полученное в результате итераций решение разносной системы соответствует именно точным формулам для вязких потоков.