

5. Расщепление потоков

Для того, чтобы лучше понять разностное представление членов, учитывающих конвективный перенос, рассмотрим упрощенную задачу:

- 1) вязкие члены не учитываются
- 2) течение является одномерным по пространственной координате

В этом случае основное уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_c}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

Напомним, что здесь под U, F здесь подразумеваются векторные величины, заданные формулами (1.10) и (1.11). При этом в F_c входят только конвективные члены, а члены, содержащие вязкие напряжения и тепловой поток, не учитываются.

5.1. Модельное уравнение

Рассмотрим скалярный аналог этого уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (5.2)$$

где u, f - обычные функции, причем $f = f(u)$. Таким образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \frac{df}{du} \quad (5.3)$$

В главе 2 было показано, что для такого типа уравнений устойчивыми могут быть только следующие разностные схемы

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_i}{\Delta t} + c \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} &= 0, \quad c > 0 \\ \frac{\delta u_i}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} &= 0, \quad c < 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

(Более строго будет сказать, что при значениях $c > 0$ использование разности вперед для аппроксимации производной по x приводит к заведомо неустойчивой разностной схеме, и, наоборот, при $c < 0$ неустойчивой будет схема с использованием разности назад.)

Эти условия имеют глубокий физический смысл. Дело в том, что параметр c , входящий в уравнение (5.3), имеет смысл скорости. Если $c > 0$, то

скорость потока направлена слева направо, т.е. точка $(i+1)$ находится ниже по потоку, чем точка (i) . Исходя из этого, можно предположить, что параметры в точке $(i+1)$ вряд ли влияют на изменения параметров в точке (i) . Использование второй формулы из (5.4) (разность вперед), таким образом, в этом случае противоречит физическому смыслу задачи.

Аналогичные рассуждения показывают, что при $c < 0$ (поток движется справа налево) первая формула из (5.4) противоречит физическому смыслу.

Разностные аппроксимации пространственных производных, в которых входят только параметры узлов, находящихся выше по потоку, или параметры самой рассматриваемой точки, называются *разностями против потока*, а схемы, их использующие, называются *схемами с разностями против потока (течения)*.

В книге [1] представлена наглядная физическая иллюстрация схемы против потока. Схема основывается на модели бак-труба. Как показано на рис. 4., контрольные объемы можно представить как серию отдельных баков с перемешивающейся в них жидкостью, которые соединяются с помощью коротеньких трубок. Течение через трубки представляет собой конвекцию. Так как жидкость в баках перемешивается, то каждый бак имеет однородное температурное поле. Предположим, что жидкость, текущая в каждой соединительной трубке, имеет температуру, равную температуре в баке со стороны против потока. Обычно жидкость в трубке ничего не должна знать о баке, по направлению к которому она течет, но должна нести полную информацию о баке, из которого она поступает. Это является сутью схемы против потока.

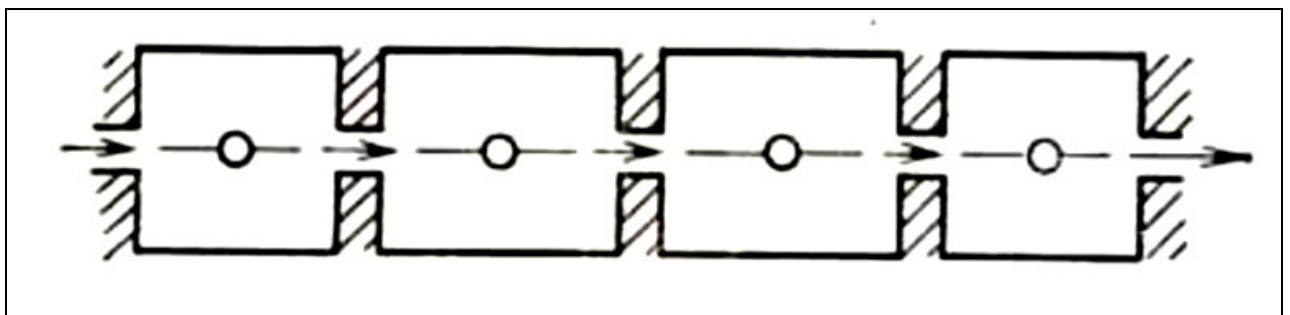


Рис. 4. Модель бак-труба

Исходя из изложенных соображений, разностный аналог уравнения (5.2) должен иметь следующий вид:

$$\frac{\delta u_i}{\Delta t} + \frac{cu_{i+1/2} - cu_{i-1/2}}{\Delta x} = 0 \quad (5.5)$$

где

$$cu_{i+1/2} = c_+ u_i + c_- u_{i+1}, \quad (5.6)$$

$$cu_{i-1/2} = c_+ u_{i-1} + c_- u_i$$

$$c_+ = \max(c, 0) \quad (5.7)$$

$$c_- = \min(c, 0)$$

В этом случае при любом знаке c получается схема с разностями против потока. Действительно, подставив (5.6) в (5.5), получим

$$\frac{\delta u_i}{\Delta t} + \frac{c_+(u_i - u_{i-1})}{\Delta x} + \frac{c_-(u_{i+1} - u_i)}{\Delta x} = 0 \quad (5.8)$$

5.2. Одномерное уравнение динамики жидкости

Попробуем распространить полученный результат на векторное уравнение (5.1).

Матрица Якоби $A = \frac{\partial F_c}{\partial U}$ может быть диагонализирована с помощью преобразований подобия

$$A = (S_A)^{-1} \Lambda_A S_A, \quad (5.9)$$

где S_A - матрица перехода, $(S_A)^{-1}$ - обратная ей матрица, Λ_A - диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы A . Конкретный вид всех этих матриц, а также необходимые сведения из линейной алгебры, будут приведены в следующем параграфе.

Из (5.1) получаем с учетом (5.9)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_c}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (S_A)^{-1} \Lambda_A S_A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (5.11)$$

При переходе от n -го к $(n+1)$ -му шагу по времени матрицы S_A и $(S_A)^{-1}$ выражаются через значения параметров на n -м шаге в рассматриваемом узле, и могут считаться постоянными на этом переходе в этом узле. Поэтому домножая (5.11) на S_A , получаем

$$\frac{\partial (S_A U)}{\partial t} + \Lambda_A \frac{\partial (S_A U)}{\partial x} = 0 \quad (5.12)$$

или

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \Lambda_A \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0, \quad (5.13)$$

где

$$\tilde{U} = S_A U \quad (5.14)$$

Поскольку Λ_A является диагональной матрицей с элементами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$, то векторное дифференциальное уравнение можно разбить на 5 отдельных независимых обычных уравнений:

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} + \lambda_l \frac{\partial u_l}{\partial x} = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (5.15)$$

Каждое из этих уравнений по форме и по сути совпадает с модельным уравнением (5.3), и поэтому для его решения используется такое разностное уравнение, как и (5.8):

$$\frac{\delta u_i}{\Delta t} + \frac{\lambda_+ (u_i - u_{i-1})}{\Delta x} + \frac{\lambda_- (u_{i+1} - u_i)}{\Delta x} = 0, \quad (5.16)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= \max(\lambda, 0) \\ \lambda_- &= \min(\lambda, 0) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Здесь индекс l , нумерующий уравнения для простоты записи опущен.

Составим диагональные матрицы

$$\mathbf{\Lambda}_{A+} = \begin{pmatrix} \lambda_{1+} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{4+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{5+} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda}_{A-} = \begin{pmatrix} \lambda_{1-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2-} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{4-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{5-} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

которые содержат только положительные и отрицательные элементы матрицы $\mathbf{\Lambda}_A$ соответственно.

Используя это обозначение, все пять разностных уравнений (5.16) можно свести к единой векторной форме

$$\frac{\delta \tilde{U}_i}{\Delta t} + \mathbf{\Lambda}_{A+} \frac{(\tilde{U}_i - \tilde{U}_{i-1})}{\Delta x} + \mathbf{\Lambda}_{A-} \frac{(\tilde{U}_{i+1} - \tilde{U}_i)}{\Delta x} = 0 \quad (5.19)$$

Подставляем в это выражение $\tilde{U} = \mathbf{S}_A \mathbf{U}$ и домножаем его на $(\mathbf{S}_A)^{-1}$

$$\frac{\delta \mathbf{U}_i}{\Delta t} + (\mathbf{S}_A)^{-1} \mathbf{\Lambda}_{A+} \mathbf{S}_A \frac{(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1})}{\Delta x} + (\mathbf{S}_A)^{-1} \mathbf{\Lambda}_{A-} \mathbf{S}_A \frac{(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)}{\Delta x} = 0 \quad (5.20)$$

Вводим обозначения

$$\mathbf{A}_+ = (\mathbf{S}_A)^{-1} \mathbf{\Lambda}_{A+} \mathbf{S}_A; \quad \mathbf{A}_- = (\mathbf{S}_A)^{-1} \mathbf{\Lambda}_{A-} \mathbf{S}_A \quad (5.21)$$

И получаем следующую разностную аппроксимацию уравнения (5.1)

$$\frac{\delta \mathbf{U}_i}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{A}_+ \mathbf{U}_i + \mathbf{A}_- \mathbf{U}_{i+1}) - (\mathbf{A}_+ \mathbf{U}_{i-1} + \mathbf{A}_- \mathbf{U}_i)}{\Delta x} = 0 \quad (5.22)$$

В предыдущем параграфе была выведена формула для аппроксимации основной системы уравнений в контрольном объеме (4.8). Для рассматриваемого случае эта формула имеет вид

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)_{i,j,k} + \frac{(\mathbf{F}_C)_{i+1/2,j,k} - (\mathbf{F}_C)_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} = 0 \quad (5.23)$$

Сравнивая это выражение с (5.22), получаем, что для обеспечения необходимого условия устойчивости конвективные потоки на гранях контрольного объема следует аппроксимировать формулами

$$\begin{aligned} (F_C)_{i+1/2,j,k} &= A_+ U_{i,j,k} + A_- U_{i+1,j,k} \\ (F_C)_{i-1/2,j,k} &= A_+ U_{i-1,j,k} + A_- U_{i,j,k} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Полученный результат можно интерпретировать схемой, изображенной на Рис.5.

На грань $(i+1/2, j, k)$ в момент времени $t = t^n$ приходит слева из точки (i, j, k) часть конвективного потока, определяемая формулой $A_+ U_{i,j,k}$, а справа из точки $(i+1, j, k)$ приходит часть потока, определяемая формулой $A_- U_{i+1,j,k}$.

Если, например, все собственные значения матрицы $A = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ являются положительными, то матрица A_{A_+} и, соответственно, матрица A_- состоят только из нулевых элементов. В этом случае влияние на параметры грани $(i+1/2, j, k)$ оказывают только узлы, находящиеся левее этой грани.

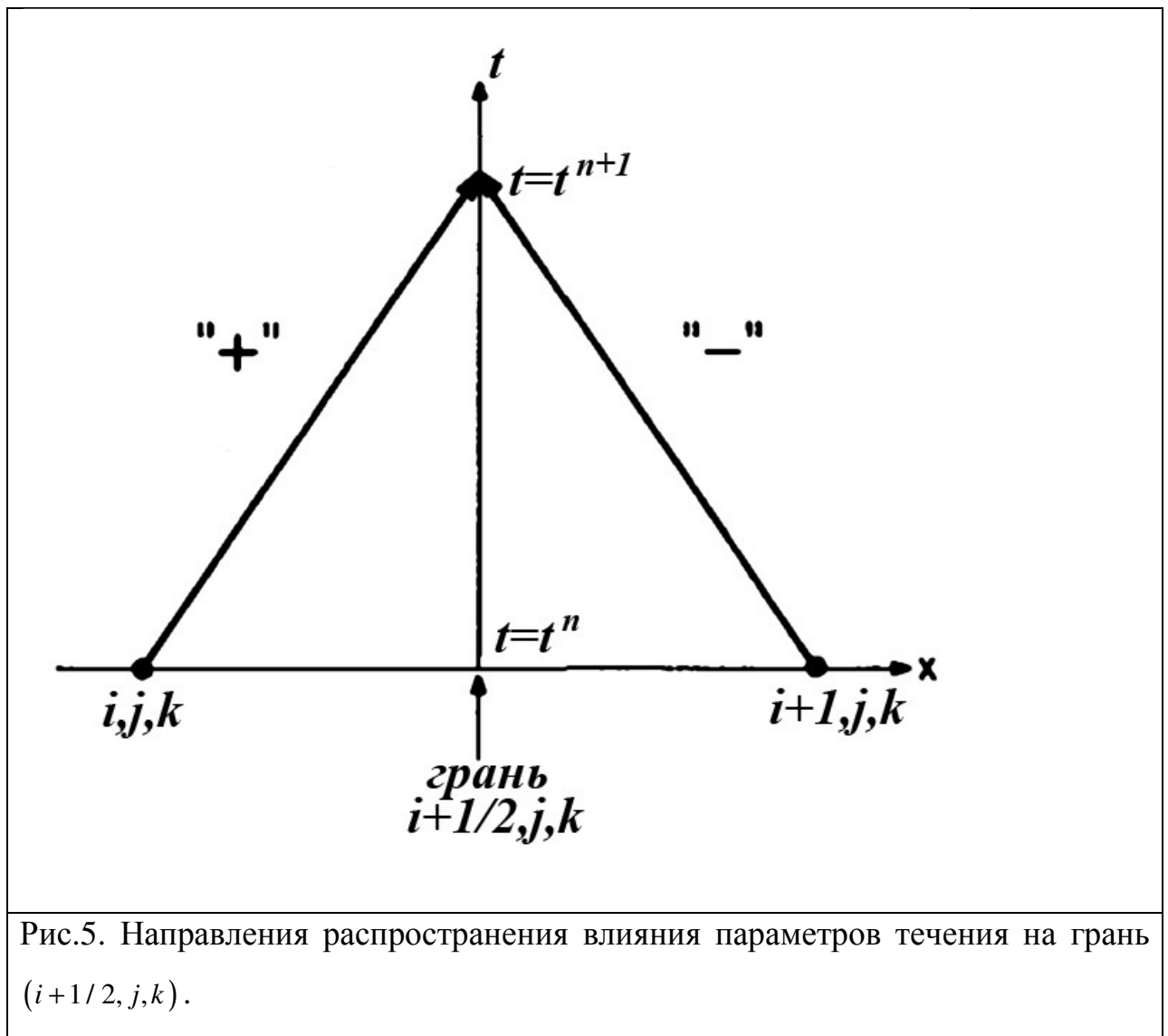


Рис.5. Направления распространения влияния параметров течения на грань $(i+1/2, j, k)$.

Полученную важную формулу (5.24) можно записать в более общем виде. Для грани $(i+1/2, j, k)$ это

$$(F_C)_{i+1/2,j,k} = A_+ U_L + A_- U_R, \quad (5.25)$$

где U_L - некоторое значение вектора U левее этой грани, а U_R - значение вектора U правее этой грани.

Существует несколько способов определения параметров, входящих в формулу (5.25).

Для правых U_R и левых U_L используются следующие аппроксимации.

1) Формула (5.24) имеет первый порядок аппроксимации. В этом случае

$$\begin{aligned} U_L &= U_i \\ U_R &= U_{i+1} \end{aligned} \quad (5.26)$$

2) Аппроксимация второго порядка против потока

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{2}(3U_i - U_{i-1}), \\ U_R &= \frac{1}{2}(3U_{i+1} - U_{i+2}) \end{aligned} \quad (5.27)$$

3) Аппроксимация третьего порядка против потока

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{1}{8}(3U_{i+1} + 6U_i - U_{i-1}), \\ U_R &= \frac{1}{8}(3U_i + 6U_{i+1} - U_{i+2}) \end{aligned} \quad (5.28)$$

(Индексы j, k в этих формулах для простоты записи опущены, но подразумеваются.)

Матрицы A_+, A_- тоже можно рассчитывать по-разному.

1) Расщепление Стейджера-Уорминга [2]

$$A_+ = A_+(U_L), \quad A_- = A_-(U_R) \quad (5.29)$$

Считается, что такое представление обладает повышенной схемной вязкостью и плохо описывает течение в пограничном слое.

Поэтому чаще используется другое представление.

2) Модифицированное расщепление Стейджера-Уорминга [3]

$$A_+ = A_+(U_{LR}), \quad A_- = A_-(U_{LR}) \quad (5.30)$$

где

$$U_{LR} = \frac{U_L + U_R}{2} \quad (5.31)$$

Считается, что такое расщепление потока менее диссипативно, но в районах сильных скачков уплотнения может стать непригодным.

3) Расщепление Ройе [3]:

$$(\mathbf{F}_C)_{i+1/2} = \frac{(\mathbf{F}_C)_L + (\mathbf{F}_C)_R}{2} - \frac{1}{2} \hat{A}_{i+1/2} (U_R - U_L) \quad (5.32)$$

где

$$\hat{A}_{i+1/2} = A(U_{LR}), \quad U_{LR} = \frac{U_L + U_R}{2} \quad (5.33)$$

В заключение этого раздела отметим, что в конечно-объемном уравнении (4.8) конвективные потоки \mathbf{G} и \mathbf{H} на гранях контрольного объема моделируются абсолютно так же, как поток \mathbf{F} . Только используются в этом случае матрицы Якоби $\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{G}_C}{\partial U}$ и $\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{H}_C}{\partial U}$ соответственно.

5.3. Матрицы перехода, собственные значения, собственные векторы

Напомним некоторые определения из линейной алгебры, которые имеют отношение к рассматриваемой проблеме.

Пусть L - линейное пространство над полем K , $A: L \rightarrow L$ - линейное преобразование.

Собственным вектором линейного преобразования A называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого $\lambda \in K$:

$$Ax = \lambda x \quad (5.34)$$

Собственным значением линейного преобразования A называется такое число $\lambda \in K$, для которого существует собственный вектор, то есть уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение $x \in L$.

Упрощённо говоря, собственный вектор - любой ненулевой вектор x , который отображается оператором в коллинеарный λx , а соответствующий скаляр λ называется собственным значением оператора.

Для определения собственных чисел достаточно решить относительно λ уравнение

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (5.35)$$

где $\det(A - \lambda I)$ - определитель матрицы $(A - \lambda I)$, A - матрица линейного преобразования, I - единичная матрица.

Для получения представления (5.9) $A = (S_A)^{-1} \Lambda_A S_A$ необходимо провести следующие операции.

- 1) Определение матрицы $A = \frac{\partial F_c}{\partial U}$
- 2) Определение ее собственных значений
- 3) Определение соответствующих собственных векторов
- 4) Построение матрицы $(S_A)^{-1}$, каждый столбец которой состоит из компонент собственных векторов
- 5) Получение матрицы S_A обращением матрицы $(S_A)^{-1}$

- 1) Матрицу $A = \frac{\partial F_c}{\partial U}$ можно рассматривать как матрицу некоторого линейного преобразования.

Формально для ее определения необходимо выразить все элементы вектора F_c через элементы вектора U . Это не очень удобно. Проще ввести некий вспомогательный вектор

$$V = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ e \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

И представить матрицу $\frac{\partial F_c}{\partial U}$ как производную сложной функции

$$\frac{\partial F_c}{\partial U} = \frac{\partial F_c}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial U} \quad (5.37)$$

Напомним, что

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ \rho u E + u p \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Выражаем компоненты вектора \mathbf{V} через компоненты вектора \mathbf{U} :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 / U_1 \\ U_3 / U_1 \\ U_4 / U_1 \\ U_5 / U_1 - \frac{1}{2U_1^2} (U_2^2 + U_3^2 + U_4^2) \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

и легко получаем матрицу Якоби

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u/\rho & 1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ -v/\rho & 0 & 1/\rho & 0 & 0 \\ -w/\rho & 0 & 0 & 1/\rho & 0 \\ (-E + u^2 + v^2 + w^2)/\rho & -u/\rho & -v/\rho & -w/\rho & 1/\rho \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Здесь учитывается, что $e = E - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$, $H = E + \frac{p}{\rho}$

Аналогично поступаем с вектором \mathbf{F}_C :

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ \rho u E + u p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 V_2 \\ V_1 V_2^2 + p \\ V_1 V_3 V_2 \\ V_1 V_4 V_2 \\ V_1 V_2 E + V_2 p \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_C}{\partial \mathbf{V}} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u^2 + p_{,1} & 2\rho u + p_{,2} & p_{,3} & p_{,4} & p_{,5} \\ v u & \rho v & \rho u & 0 & 0 \\ w u & \rho w & 0 & \rho u & 0 \\ \left(\begin{matrix} uE + \rho u E_{,1} \\ +u p_{,1} \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} \rho E + \rho u E_{,2} \\ +p + u p_{,2} \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} \rho u E_{,3} \\ +u p_{,3} \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} \rho u E_{,4} \\ +u p_{,4} \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} \rho u E_{,5} \\ +u p_{,5} \end{matrix} \right) \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

Здесь используются обозначения производных

$$p_{,m} = \frac{\partial p}{\partial V_m}, \quad E_{,m} = \frac{\partial E}{\partial V_m} \quad (5.43)$$

Из формулы $E = e + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = V_5 + \frac{1}{2}(V_2^2 + V_3^2 + V_4^2)$ следует, что

$$E_{,1} = 0, \quad E_{,2} = u, \quad E_{,3} = v, \quad E_{,4} = w, \quad E_{,5} = 1 \quad (5.44)$$

Подставляем эти формулы в (5.42):

$$\frac{\partial F_c}{\partial V} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u^2 + p_{,1} & 2\rho u + p_{,2} & p_{,3} & p_{,4} & p_{,5} \\ vu & \rho v & \rho u & 0 & 0 \\ wu & \rho w & 0 & \rho u & 0 \\ u(E + p_{,1}) & (\rho E + \rho u^2 + p + up_{,2}) & u(\rho v + p_{,3}) & u(\rho w + p_{,4}) & u(\rho + p_{,5}) \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Заметим, что во всех этих формулах пока не учитывается форма зависимости давления p от компонент вектора V . Это позволяет рассматривать в дальнейшем самые разные формы этой зависимости, т.е. различные формы уравнения состояния.

Для идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)V_1 V_5,$$

поэтому производные давления равны

$$p_{,1} = (\gamma - 1)e, \quad p_{,2} = 0, \quad p_{,3} = 0, \quad p_{,4} = 0, \quad p_{,5} = (\gamma - 1)\rho \quad (5.46)$$

В этом случае,

$$\frac{\partial F_c}{\partial V} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u^2 + (\gamma - 1)e & 2\rho u & 0 & 0 & (\gamma - 1)\rho \\ vu & \rho v & \rho u & 0 & 0 \\ wu & \rho w & 0 & \rho u & 0 \\ u(E + (\gamma - 1)e) & (\rho E + \rho u^2 + p) & \rho uv & \rho uw & \gamma \rho u \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Перемножаем полученные матрицы

$$\frac{\partial F_c}{\partial U} = \frac{\partial F_c}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta - u^2 & u(2 - \gamma) & -\beta v & -\beta w & \beta \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ u(\alpha\beta - H) & H - \beta u^2 & -\beta uv & -\beta uw & \gamma u \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

где введены обозначения:

$$\alpha = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \quad \beta = \gamma - 1 \quad (5.49)$$

Здесь учитывается, что

$$H = E + \frac{p}{\rho}, \quad \frac{p}{\rho} = \beta e$$

2) Для того, чтобы найти собственные значения матрицы $\frac{\partial F_c}{\partial U}$, необходимо решить относительно λ следующее уравнение 5-ой степени

$$\det\left(\frac{\partial F_c}{\partial U} - \lambda I\right) = 0 \quad (5.50)$$

Избавляя читателя от довольно длинной, но тривиальной, операции нахождения определителя матрицы размера (5×5) , приведем лишь окончательный вид этого уравнения:

$$(u - \lambda)^3 [(u - \lambda)^2 - a^2] = 0, \quad (5.51)$$

где $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ - скорость звука.

Таким образом, собственные значения матрицы $\frac{\partial F_c}{\partial U}$ равны

$$\lambda_1 = u, \lambda_2 = u + a, \lambda_3 = u, \lambda_4 = u, \lambda_5 = u - a \quad (5.52)$$

Матрица Λ_A , входящая в представление (5.9), имеет вид

$$\Lambda_A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (u + a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (u - a) \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

Полученные значения собственных значений матрицы A имеют глубокий физический смысл. Фактически они характеризуют *распространение*

воздействия в потоке сжимаемой жидкости в направлении оси x . Любая точка потока может распространять свое воздействие на окружающее пространство следующим образом:

- со скоростью u за счет перемещения самого потока - вниз по потоку;
- со скоростью $u+a$ за счет перемещения самого потока и распространения звуковых колебаний - вниз по потоку;
- со скоростью $u-a$ за счет распространения звуковых колебаний; если скорость u превышает скорость звука a , это воздействие сносится вниз и воздействие вверх по потоку отсутствует

3) Определение собственных векторов

Для этого необходимо решить систему

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (5.54)$$

которая, как следует из (5.50), имеет бесконечное множество ненулевых решений.

Для $\lambda = u$ получаем:

$$\begin{pmatrix} -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta - u^2 & u(2 - \gamma) & -\beta v & -\beta w & \beta \\ -uv & v & 0 & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & 0 & 0 \\ u(\alpha\beta - H) & H - \beta u^2 & -\beta uv & -\beta uw & \beta u \end{pmatrix} x = 0 \quad (5.55)$$

Нетрудно заметить, что только 2 строки этой системы являются линейно независимыми, поэтому получается система

$$\begin{pmatrix} -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u(\alpha\beta - H) & H - \beta u^2 & -\beta uv & -\beta uw & \beta u \end{pmatrix} x = 0 \quad (5.56)$$

Таким образом, для этого собственного значения существует три независимых решения. Задаем произвольным образом 3 компоненты вектора \mathbf{x} - x_1, x_3, x_4 , а x_2, x_5 находим из решения системы (5.56):

$$\begin{aligned} x_1 = 1; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_2 = u; \quad x_5 = u^2 - \alpha \\ x_1 = 0; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_5 = v \\ x_1 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 1; \quad x_2 = 0; \quad x_5 = w \end{aligned}$$

Получается три собственных вектора, соответствующие трем собственным значениям $\lambda = u$:

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \\ 0 \\ u^2 - \alpha \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ w \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

Однако для нашей задачи удобнее будет использовать не эти векторы, а некие их линейные комбинации:

$$r_1 + vr_2 + wr_3, \quad \rho r_2, \quad \rho r_3 \quad (5.58)$$

В результате получаем следующие собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \\ 0 \\ \rho v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho \\ \rho w \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

Эти векторы и будут столбцами в матрице $(S_A)^{-1}$.

Для $\lambda = u + a$ получаем:

$$\begin{pmatrix} -u - a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\beta - u^2 & -\beta u - a & -\beta v & -\beta w & \beta \\ -uv & v & -a & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & -a & 0 \\ u(\alpha\beta - H) & H - \beta u^2 & -\beta uv & -\beta uw & \beta u - a \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0 \quad (5.60)$$

В этом случае имеем 4 линейно независимых строки и, соответственно, только одно решение и только один собственный вектор.

Задаем $x_1 = 1$, а остальные компоненты \mathbf{x} находим, решая систему (5.60):

$$x_2 = u + a; \quad x_3 = v; \quad x_4 = w; \quad x_5 = \alpha + au + \frac{a^2}{\beta} \quad (5.61)$$

Получаем собственный вектор

$$\begin{pmatrix} 1 \\ u + a \\ v \\ w \\ \alpha + au + \frac{a^2}{\beta} \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

Для формирования матрицы $(S_A)^{-1}$ более удобно использовать не этот вектор, а умноженный на $\frac{1}{2a^2}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2a^2} \\ \frac{u + a}{2a^2} \\ \frac{v}{2a^2} \\ \frac{w}{2a^2} \\ \frac{\alpha + au}{2a^2} + \frac{1}{2\beta} \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

Аналогичным методом получаем собственный вектор, соответствующий $\lambda = u - a$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2a^2} \\ \frac{u-a}{2a^2} \\ \frac{v}{2a^2} \\ \frac{w}{2a^2} \\ \frac{\alpha-au}{2a^2} + \frac{1}{2\beta} \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

4) Построение матрицы $(S_A)^{-1}$ осуществляется из собственных векторов (5.59), (5.63), (5.64).

При этом должно учитываться расположение собственных значений λ_m в диагональной матрице Λ_A .

Получается:

$$(S_A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2a^2} & 0 & 0 & \frac{1}{2a^2} \\ u & \frac{u+c}{2a^2} & 0 & 0 & \frac{u-c}{2a^2} \\ v & \frac{v}{2a^2} & \rho & 0 & \frac{v}{2a^2} \\ w & \frac{w}{2a^2} & 0 & \rho & \frac{w}{2a^2} \\ \alpha & \frac{\alpha+uc}{2a^2} + \frac{1}{2\beta} & \rho v & \rho w & \frac{\alpha-ua}{2a^2} + \frac{1}{2\beta} \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

5) Обращение матрицы $(S_A)^{-1}$ можно осуществить методом Гаусса-Жордана или с помощью детерминанта и транспонированной матрицы алгебраических дополнений.

Эти способы в данном случае примерно одинаковы по трудоемкости, но достаточно тривиальны. Опуская эти выкладки, запишем результат

$$S_A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha\beta}{a^2} & \frac{\beta u}{a^2} & \frac{\beta v}{a^2} & \frac{\beta w}{a^2} & -\frac{\beta}{a^2} \\ \alpha\beta - ua & a - \beta u & -\beta v & -\beta w & \beta \\ -\frac{v}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{w}{\rho} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ \alpha\beta + ua & -a - \beta u & -\beta v & -\beta w & \beta \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

Читателю предоставляется возможность самому убедиться, что эта матрица является обратной по отношению к $(S_A)^{-1}$.

Упражнение.

Доказать, что матрицы $(S_A)^{-1}$ и S_A , заданные формулами (5.66) и (5.65), являются взаимно обратными.

5.4. Разностный аналог рассматриваемой задачи

С учетом всех полученных результатов запишем конечно-объемное представление задачи, предложенной в начале данного параграфа.

Напомним, что мы рассматривали задачу одномерного течения невязкого газа, описываемую уравнением (5.1):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_C}{\partial x} = 0$$

Разностное представление этого уравнение в контрольном объеме описывается формулой (5.23)

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{i,j,k} + \frac{(F_C)_{i+1/2,j,k} - (F_C)_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} = 0$$

И, наконец, конвективные потоки F_C на гранях контрольного объема задаются формулами (5.25):

$$(F_C)_{i+1/2,j,k} = A_+ U_L + A_- U_R \quad (5.67)$$

Используем введенное в параграфе 4 обозначение приращение вектора U при переходе от n -го шага по времени к $(n+1)$ -му шагу через δU^{n+1} и неявное представление потоков в виде формулы (4.13)

$$F_C = F_C^n + \alpha \left(\frac{\partial F_C}{\partial U} \right)^n \delta U^{n+1} = F_C^n + \alpha A^n \delta U^{n+1}, \quad (5.68)$$

Для грани $(i+1/2, j, k)$ это представление с учетом расщепления потока по формуле (5.67) имеет вид

$$\begin{aligned} (F_C)_{i+1/2, j, k} &= (A_+ U_L)_{i+1/2, j, k}^n + (A_- U_R)_{i+1/2, j, k}^n \\ &+ \alpha \left[(A_+)_{i+1/2, j, k}^n (\delta U_L)_{i+1/2, j, k}^{n+1} + (A_-)_{i+1/2, j, k}^n (\delta U_R)_{i+1/2, j, k}^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

Для конвективных потоков слева U_L и справа U_R используются формулы (5.26) - (5.28).

В работе [3] показано, что можно использовать для U_L и U_R в явной части представления (5.69) аппроксимации 2-го или 3-го порядка (формулы (5.27) или (5.28)), а для неявной части – аппроксимацию 1-го порядка, как более простую. При решении задач методом установления такой подход гарантирует аппроксимацию 2-го или 3-го порядка соответственно по пространственной координате.

В этом случае получаем:

$$\begin{aligned} (F_C)_{i+1/2, j, k} &= (F_C)_{i+1/2, j, k}^n + \alpha \left[(A_+)_{i+1/2, j, k}^n \delta U_{i, j, k}^{n+1} + (A_-)_{i+1/2, j, k}^n \delta U_{i+1, j, k}^{n+1} \right], \\ (F_C)_{i-1/2, j, k} &= (F_C)_{i-1/2, j, k}^n + \alpha \left[(A_+)_{i-1/2, j, k}^n \delta U_{i-1, j, k}^{n+1} + (A_-)_{i-1/2, j, k}^n \delta U_{i, j, k}^{n+1} \right], \end{aligned} \quad (5.70)$$

где для явных представлений $(F_C)_{i+1/2, j, k}^n, (F_C)_{i-1/2, j, k}^n$ используются формулы (5.27) или (5.28).

Подставляем (5.70) в исходную формулу (5.23) и получаем систему алгебраических уравнений для определения приращения $\delta U_{i, j, k}^{n+1}$:

$$A_{i, j} \delta U_{i, j, k}^{n+1} + D_{i, j} \delta U_{i+1, j, k}^{n+1} + E_{i, j} \delta U_{i-1, j, k}^{n+1} = \Delta U_{i, j, k}^{n+1}, \quad (5.71)$$

где

$$\Delta U_{i, j, k}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(F_C)_{i+1/2, j, k}^n - (F_C)_{i-1/2, j, k}^n \right] - \quad (5.72)$$

приращение вектора U при переходе от n -го шага по времени к $(n+1)$ -му шагу, представленное в явной форме,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,j} &= \mathbf{I} + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}_+)_{i+1/2,j,k}^n - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}_-)_{i-1/2,j,k}^n; \\ \mathbf{D}_{i,j} &= + \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}_-)_{i+1/2,j,k}^n; \quad \mathbf{E}_{i,j} = - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}_+)_{i-1/2,j,k}^n \end{aligned} \quad (5.73)$$

Уравнение, вернее, система (5.71) по форме совпадает с системой (5.8) из Главы 2, и для ее решения можно использовать эффективный метод прогонки. Единственное, но существенное, отличие состоит в том, что в данном случае рассматриваются не скалярные неизвестные величины, как в главе 2, а векторные, и коэффициенты $\mathbf{A}_{i,j}, \mathbf{D}_{i,j}, \mathbf{E}_{i,j}$ являются не числами, а матрицами.

Поэтому для решения системы (5.71) используется не скалярная, а *векторная прогонка*. Она будет описана в одном из следующих разделов.

5.5. Двумерные и трехмерные задачи.

Все, что говорилось здесь о расщеплении конвективного потока F_C , легко распространяется на конвективные потоки G_C и H_C , направленные по осям y, z соответственно. Объясняется это тем, что основное уравнение (1.1) абсолютно симметрично относительно координат (x, y, z) .

Например, конвективный поток через верхнюю грань контрольного объема представляется формулой, аналогичной (5.25):

$$(\mathbf{G}_C)_{i,j+1/2,k} = \mathbf{B}_+ \mathbf{U}_L + \mathbf{B}_- \mathbf{U}_R \quad (5.74)$$

В этой формуле:

\mathbf{U}_L - некоторое значение вектора U ниже рассматриваемой грани, а \mathbf{U}_R - значение вектора U выше этой грани. Матрицы $\mathbf{B}_+, \mathbf{B}_-$ определяются соотношениями

$$\mathbf{B}_+ = (\mathbf{S}_B)^{-1} \mathbf{\Lambda}_{B+} \mathbf{S}_B; \quad \mathbf{B}_- = (\mathbf{S}_B)^{-1} \mathbf{\Lambda}_{B-} \mathbf{S}_B \quad (5.75)$$

Матрицы $(\mathbf{S}_B)^{-1}, \mathbf{S}_B$ определяются преобразованием подобия

$$\mathbf{B} \equiv \frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial \mathbf{U}} = (\mathbf{S}_B)^{-1} \Lambda_B \mathbf{S}_B \quad (5.76)$$

Диагональная матрица Λ_B состоит из собственных значений матрицы Якоби $\frac{\partial \mathbf{G}_c}{\partial \mathbf{U}}$:

$$\Lambda_B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (v+a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v-a) \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

Диагональные матрицы $\Lambda_{B+}, \Lambda_{B-}$ содержат только положительные и отрицательные элементы матрицы Λ_B соответственно.

В результате получаются представления потоков \mathbf{G}_c на гранях, подобные (5.70).

Так же поступаем с конвективными потоками \mathbf{H}_c на передней и задней гранях контрольного объема (рис.1).

Полученные выражения подставляются в основное разностное уравнение (4.8), и в результате получается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных величин – значений вектора \mathbf{U} во всех узлах сетки.

Упражнение

Определить матрицы $(\mathbf{S}_B)^{-1}, \mathbf{S}_B$, входящие в представление (5.76).

Упражнение

Определить матрицы $(\mathbf{S}_c)^{-1}, \mathbf{S}_c$, входящие в представление матрицы Якоби

$$\mathbf{C} \equiv \frac{\partial \mathbf{H}_c}{\partial \mathbf{U}} = (\mathbf{S}_c)^{-1} \Lambda_c \mathbf{S}_c,$$

а также диагональную матрицу собственных значений Λ_c .

