4. Конечно-объемная аппроксимация основного уравнения

Если представить, что параметры $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$, входящие в основное уравнение (1.1), являются компонентами некоторого вектора $\vec{\boldsymbol{F}}$ в системе координат (x,y,z), то это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+div\vec{\boldsymbol{F}}=0 \tag{4.1}$$

Проинтегрируем это выражение по некоторому неподвижному объему V

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \boldsymbol{U}dV+\iiint\limits_V div\vec{\boldsymbol{F}}dV=0 \tag{4.2}$$

Здесь учитывается, что т.к. объем неподвижен, то

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}dV=\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \boldsymbol{U}dV \tag{4.3}$$

Используя теорему Гаусса-Остроградского, получаем, что для любого контрольного объема V с поверхностью S:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \boldsymbol{U}dV+\oint\!\!\oint\limits_S \vec{\boldsymbol{F}}\bullet\vec{\boldsymbol{n}}dS=0\,, \tag{4.4}$$

где $\vec{\boldsymbol{n}}$ - единичный вектор, направленный наружу по нормали к поверхности к рассматриваемому объему; $\vec{\boldsymbol{n}}dS$ - векторный элемент поверхности с нормалью $\vec{\boldsymbol{n}}$; $\vec{\boldsymbol{F}}$- вектор вязких и невязких потоков консервативной величины $\boldsymbol{U}$, проходящих через поверхность объема.

Рассмотрим в качестве объема V контрольный объем, имеющий форму параллелепипеда со сторонами параллельными осям *x,y,z* соответственно $(V=\Delta x\times\Delta y\times\Delta z)$. Двумерный вариант этого контрольного на плоскости *0xy* показан на рис.1 (заштрихованный участок).

Интегрирование (4.4) по такому объему с учетом того, что $\vec{\boldsymbol{F}}=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H})$ дает следующее:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V} \boldsymbol{U} dV + \iint\limits_{\Delta y\Delta z} \left(\boldsymbol{F}_{i+1/2} - \boldsymbol{F}_{i-1/2}\right) dydz + \iint\limits_{\Delta x\Delta z} \left(\boldsymbol{G}_{j+1/2} - \boldsymbol{G}_{j-1/2}\right) dxdz \\
&+ \iint\limits_{\Delta x\Delta y} \left(\boldsymbol{H}_{k+1/2} - \boldsymbol{H}_{k-1/2}\right) dxdy = 0
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

Индексы i,j,k нумеруют ячейки контрольных объемов по осям x,y,z соответственно. Индекс $i+1/2$ в функции $\boldsymbol{F}_{i+1/2}$ означает, что эта функция берется на грани, разделяющей ячейки (i,j,k) и $(i+1,j,k)$. Аналогично, индекс $i-1/2$ относится к грани, разделяющей ячейки $(i-1,j,k)$ и (i,j,k), индекс $j-1/2$ относится к грани, разделяющей ячейки $(i,j-1,k)$ и (i,j,k) и т.д.

Основное допущение состоит в том, что каждый поток постоянен по всей грани, т.е., например, для потока вдоль оси x справедливо:

$$
\iint\limits_{\Delta y\Delta z} \left(\boldsymbol{F}_{i+1/2} - \boldsymbol{F}_{i-1/2}\right) dydz = \left(\boldsymbol{F}_{i+1/2} - \boldsymbol{F}_{i-1/2}\right)\Delta y\Delta z \tag{4.6}
$$

Кроме того, полагаем, что

$$
\iiint\limits_{V} \boldsymbol{U} dV \cong \boldsymbol{U}_{i,j,k} V = \boldsymbol{U}_{i,j,k}\Delta x\Delta y\Delta z\,, \tag{4.7}
$$

где $\boldsymbol{U}_{i,j,k}$ - значение $\boldsymbol{U}$ в центре ячейки (i,j,k).

Тогда уравнение (4.5) принимает вид

$$
\left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\right)_{i,j,k} + \frac{\boldsymbol{F}_{i+1/2,j,k} - \boldsymbol{F}_{i-1/2,j,k}}{\Delta x} + \frac{\boldsymbol{G}_{i,j+1/2,k} - \boldsymbol{G}_{i,j-1/2,k}}{\Delta y} + \frac{\boldsymbol{H}_{i,j,k+1/2} - \boldsymbol{H}_{i,j,k-1/2}}{\Delta z} = 0 \tag{4.8}
$$

Это уравнение является основой для методов численного решения уравнений Навье-Стокса.

Обозначим через $\delta\boldsymbol{U}^{n+1}$ приращения вектора $\boldsymbol{U}$ при переходе от n- го шага по времени к $(n+1)$-му шагу

$$
\delta\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{U}^{n+1} - \boldsymbol{U}^{n} \tag{4.9}
$$

На каждом шаге по времени стоит задача определения $\boldsymbol{U}^{n+1}$ по известным значениям $\boldsymbol{U}^{n}$.

Потоки $\boldsymbol{F,G,H}$ являются функциями $\boldsymbol{U}$:

$$
\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}),\quad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}),\quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{U}) \tag{4.10}
$$

Нетрудно показать, что для этих векторных функций справедливы те же формулы дифференциального исчисления, что и для обычных функций. В частности, можно выразить потоки на $(n+1)$-ом шаге через потоки на n-ом шаге с помощью разложения в ряд Тейлора относительно приращения $\delta\overline{\boldsymbol{U}}^{n+1}$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^{n+1} &= \boldsymbol{F}^{n} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^{n} \delta \boldsymbol{U}^{n+1}, \\
\boldsymbol{G}^{n+1} &= \boldsymbol{G}^{n} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^{n} \delta \boldsymbol{U}^{n+1}, \\
\boldsymbol{H}^{n+1} &= \boldsymbol{H}^{n} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^{n} \delta \boldsymbol{U}^{n+1}
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Здесь $\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}},\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}},\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{U}}$ - матрицы Якоби функций, входящих в векторы $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$, в пространстве функций, входящих в $\boldsymbol{U}$. Например,

$$
\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial U_5} \\
\frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial U_5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial F_5}{\partial U_1} & \frac{\partial F_5}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_5}{\partial U_5}
\end{pmatrix}
\tag{4.12}
$$

Члены, содержащие производные выше первой, в формулах (4.11) отброшены.

Выразим потоки, входящие в уравнение (4.8), как линейную комбинацию значений на n-м и $(n+1)$-м шагах по времени

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= (1-\alpha)\boldsymbol{F}^{n} + \alpha\boldsymbol{F}^{n+1} = \boldsymbol{F}^{n} + \alpha\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^{n} \delta \boldsymbol{U}^{n+1}, \\
\boldsymbol{G} &= (1-\alpha)\boldsymbol{G}^{n} + \alpha\boldsymbol{G}^{n+1} = \boldsymbol{G}^{n} + \alpha\left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^{n} \delta \boldsymbol{U}^{n+1}, \\
\boldsymbol{H} &= (1-\alpha)\boldsymbol{H}^{n} + \alpha\boldsymbol{H}^{n+1} = \boldsymbol{H}^{n} + \alpha\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)^{n} \delta \boldsymbol{U}^{n+1}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Здесь α - параметр, характеризующий порядок точности представления производной по времени. Если $\alpha = 0.5$, порядок равен 2, и схема подобна схеме Кранка-Николсона; при $\alpha = 1$ получается чисто неявная схема; значение $\alpha > 1$ дает завышенную релаксацию, но это может улучшать сходимость метода.

Подстановка формул (4.9), (4.13) в уравнение (4.8) позволяет получить конечно-объемную аппроксимацию основного уравнения (1.1):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta t}+\frac{\alpha}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)_{i+1/2,j,k}^{n}\delta \boldsymbol{U}_{i+1/2,j,k}^{n+1}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)_{i-1/2,j,k}^{n}\delta \boldsymbol{U}_{i-1/2,j,k}^{n+1}\right]\\
&+\frac{\alpha}{\Delta y}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)_{i,j+1/2,k}^{n}\delta \boldsymbol{U}_{i,j+1/2,k}^{n+1}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)_{i,j-1/2,k}^{n}\delta \boldsymbol{U}_{i,j-1/2,k}^{n+1}\right]\\
&+\frac{\alpha}{\Delta z}\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)_{i,j,k+1/2}^{n}\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k+1/2}^{n+1}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{U}}\right)_{i,j,k-1/2}^{n}\delta \boldsymbol{U}_{i,j,k-1/2}^{n+1}\right]\\
&=-\left(\frac{\boldsymbol{F}_{i+1/2,j,k}^{n}-\boldsymbol{F}_{i-1/2,j,k}^{n}}{\Delta x}+\frac{\boldsymbol{G}_{i,j+1/2,k}^{n}-\boldsymbol{G}_{i,j-1/2,k}^{n}}{\Delta y}+\frac{\boldsymbol{H}_{i,j,k+1/2}^{n}-\boldsymbol{H}_{i,j,k-1/2}^{n}}{\Delta z}\right)
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Для того, чтобы получить из (4.14) замкнутую систему линейных алгебраических уравнений необходимо выразить неизвестную функцию $\boldsymbol{U}$ на гранях контрольного объема через значения $\boldsymbol{U}$ в узловых точках.

К сожалению, эта операция является отнюдь не тривиальной и требует существенных усложнений и без того громоздкого разностного уравнения (4.14).