

3. Искусственная вязкость

Для того, чтобы разобраться с механизмом возникновения искусственной схемной вязкости, рассмотрим двумерную задачу конвективного распространения тепла при малых скоростях газового потока. Переносом тепла за счет теплопроводности пренебрегаем, а поле скоростей считаем заданным.

Уравнение энергии при этих условиях имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) = 0 \quad (3.1)$$

Для получения дискретного аналога этого уравнения используем метод контрольного объема. Для этого расположим узлы сетки, как на рисунке 1. И проинтегрируем уравнение (3.1) по заштрихованному объему. Контрольный объем имеет форму параллелепипеда размером $\Delta x \times \Delta y \times 1$.

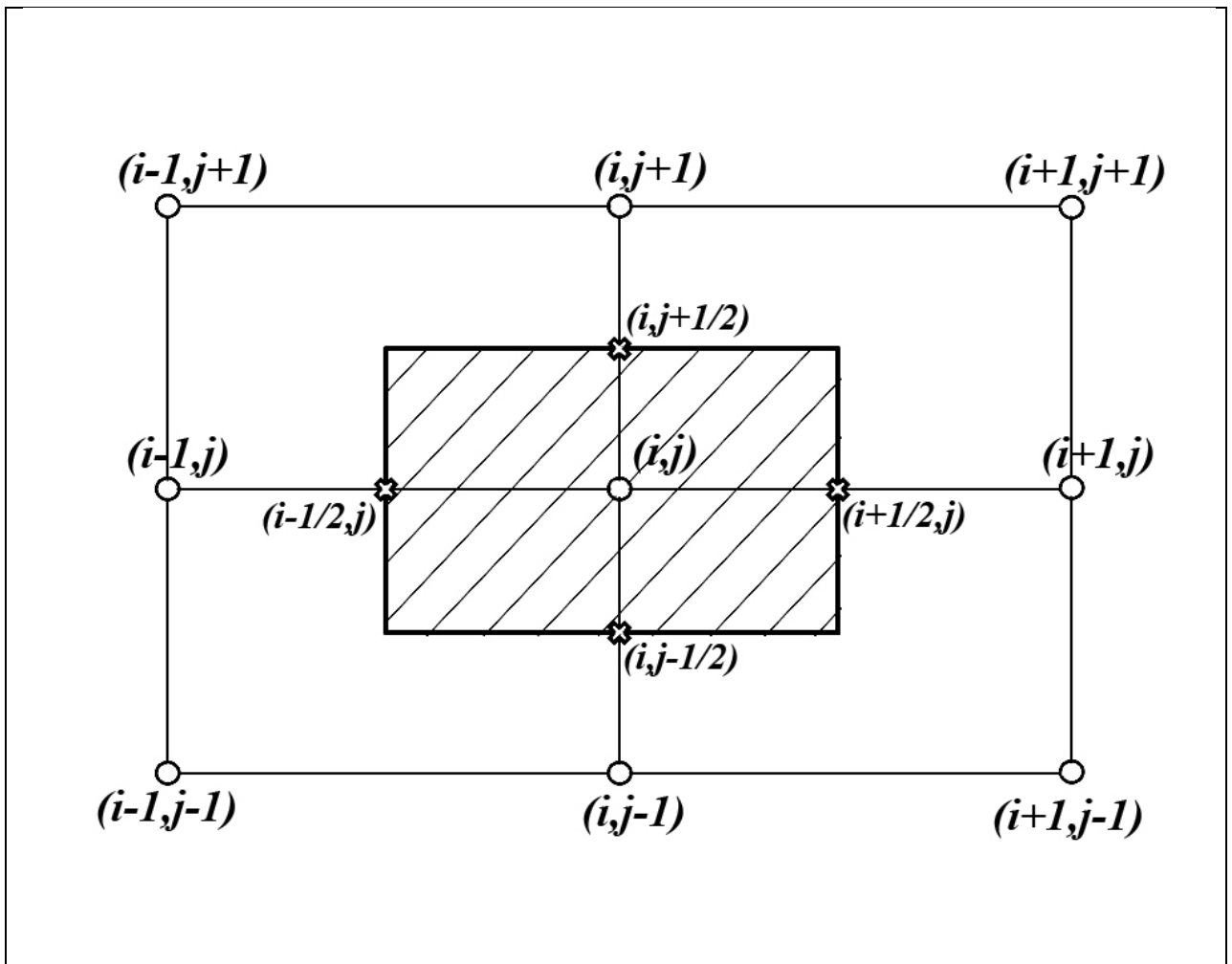


Рис.1. Контрольный объем (заштрихованная область) для двумерной задачи

В результате интегрирования получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint (\rho T) dV + \iint [(\rho u T)_{i+1/2} - (\rho u T)_{i-1/2}] \Delta y + \iint [(\rho v T)_{j+1/2} - (\rho v T)_{j-1/2}] \Delta x = 0 \quad (3.2)$$

Индексы i, j нумеруют ячейку по осям x и y соответственно. Величина (ρT) задается в центре ячейки, а конвективные потоки $(\rho u T), (\rho v T)$ – на соответствующих границах ячейки, поэтому они имеют не целочисленные индексы.

Считаем, что каждый поток постоянен по всей грани. В этом случае уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T)_{i,j} + \frac{(\rho u T)_{i+1/2} - (\rho u T)_{i-1/2}}{\Delta x} + \frac{(\rho v T)_{j+1/2} - (\rho v T)_{j-1/2}}{\Delta y} = 0 \quad (3.3)$$

В соответствии с требованиями из предыдущего раздела будем представлять конвективные члены в неявной форме – на $(n+1)$ -ом шаге по времени. Встает вопрос о представлении потоков на гранях контрольного объема, т.е. выражении этих потоков через значения в узловых точках. На первый взгляд кажется, что оптимальным является представление в виде среднего между соседними узлами. Например,

$$\begin{aligned} (\rho u T)_{i+1/2} &= \frac{1}{2} [(\rho u T)_i + (\rho u T)_{i+1}], \\ (\rho v T)_{j-1/2} &= \frac{1}{2} [(\rho v T)_{j-1} + (\rho v T)_j] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Однако в последующих разделах мы увидим, что это далеко не всегда лучший выбор.

Поэтому используем так называемые *параметры вверх по потоку*. Если продольная скорость $u \geq 0$, то поток движется слева направо, и мы полагаем, что

$$\begin{aligned} (\rho u T)_{i+1/2} &= (\rho u T)_i, \\ (\rho u T)_{i-1/2} &= (\rho u T)_{i-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогично при поперечной скорости $v \geq 0$ поток направлен вверх, и

$$\begin{aligned}(\rho v T)_{j+1/2} &= (\rho v T)_j, \\ (\rho v T)_{j-1/2} &= (\rho v T)_{j-1}\end{aligned}\tag{3.6}$$

В результате уравнение (3.3) представляется в виде

$$\frac{\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{(u\Phi)_{i,j}^{n+1} - (u\Phi)_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{(v\Phi)_{i,j}^{n+1} - (v\Phi)_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = 0,\tag{3.7}$$

где $\Phi = \rho T$

При решении задачи методом установления при приближении к равновесию $\Phi_{i,j}^{n+1} \cong \Phi_{i,j}^n$, и уравнение (3.7) преобразуется к виду

$$a_{i,j} \Phi_{i,j}^{n+1} = b_{i,j} \Phi_{i-1,j}^{n+1} + c_{i,j} \Phi_{i,j-1}^{n+1}\tag{3.8}$$

где

$$a_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} u_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{\Delta y} v_{i,j}^{n+1}, \quad b_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} u_{i-1,j}^{n+1}, \quad c_{i,j} = \frac{1}{\Delta y} v_{i,j-1}^{n+1}\tag{3.9}$$

Рассмотрим случай смешения двух потоков, движущихся параллельно с равной скоростью (см. рис.2), но с различными температурами в начальном сечении.

Если бы теплопроводность λ не равнялась нулю (случай *a*), то между этими потоками образовывался бы слой смешения, в котором функция $\Phi = \rho T$ постепенно изменяется от большего значения к меньшему; ширина этого слоя в поперечном направлении увеличивается вниз по потоку.

В рассматриваемом нами случае теплопроводность отсутствует: $\lambda = 0$, поэтому слой смешения не образуется, и будет иметь место скачок функции $\Phi = \rho T$ в поперечном направлении (случай *b*).

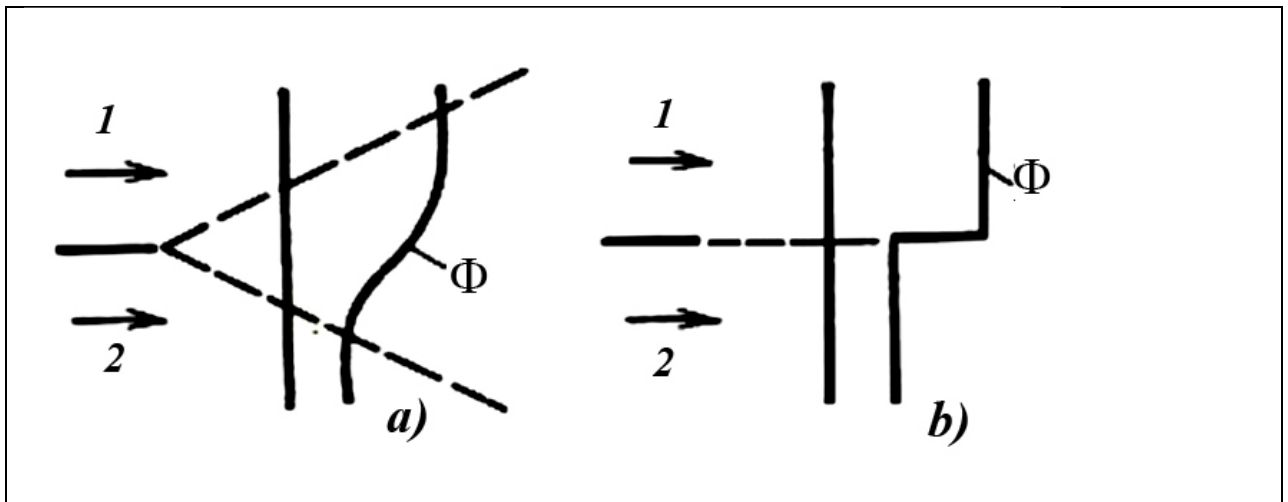


Рис.2. Распределение функции $\Phi = \rho T$ при наличии (а) и отсутствии (б) теплопроводности: 1 — горячий поток; 2 — холодный поток

Построим сетку так, чтобы ось x была направлена параллельно потоку. В этом случае поперечная составляющая скорости равна нулю. Исходя из формул (3.9) и (3.8), получаем, что

$$a_{i,j} = b_{i,j}, \quad c_{i,j} = 0 \quad (3.10)$$

и

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i-1,j}^{n+1} \quad (3.11)$$

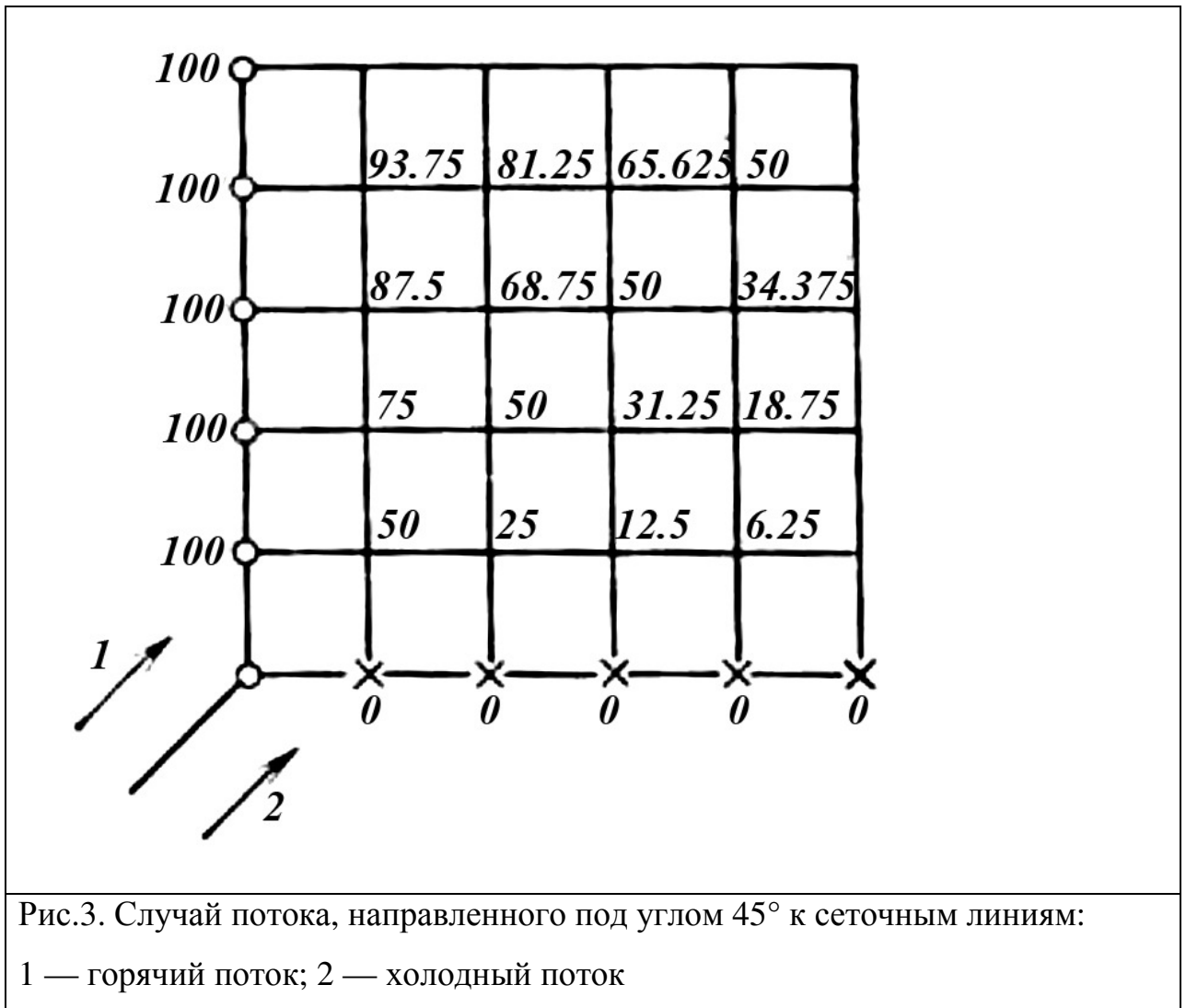
В результате данные значения будут устанавливаться во всех точках вдоль каждой горизонтальной линии. Следовательно, скачкообразный характер профиля Φ и, соответственно, температуры, имеющий место в начальном сечении, будет сохранен. Не происходит размытия профиля и, следовательно, в этом случае искусственная вязкость не появляется.

Ситуация значительно изменяется, когда та же задача решается на сетке, узловые линии которой составляют 45° с направлением потока. Для удобства используем равномерную сетку с $\Delta x = \Delta y$. Скорости потока в направлениях осей x и y равны. Исходя из формул (3.9) и (3.8), получаем, что

$$a_{i,j} = b_{i,j} + c_{i,j}, \quad b_{i,j} = c_{i,j} \quad (3.12)$$

и

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = 0.5(\Phi_{i-1,j}^{n+1} + \Phi_{i,j-1}^{n+1}) \quad (3.13)$$



Для сетки, показанной на рис. 3, разрыв начального профиля Φ обеспечивается равенством всех значений $\Phi = 100$ вдоль левой и $\Phi = 0$ вдоль нижней границ. Результат решения во внутренних точках записан около каждой узловой точки. Если схемная искусственная вязкость отсутствует, то сверху от диагонали, направленной из нижнего левого угла, должны получиться значения 100 и значения 0 вниз от диагонали. Фактическое решение дает неточный профиль Φ , подобный тому, какой изображен на рис. 2, а.

Исходя из этого примера, можно сделать следующие замечания по поводу искусственной вязкости [1].

1. Искусственная вязкость имеет место, когда поток наклонен по отношению к линиям сетки и существует ненулевой градиент зависимой переменной в направлении по нормали к потоку.

2. Приближенное выражение для коэффициента искусственной вязкости двухмерном случае дано в [1]:

$$\Gamma_a = \frac{\rho U \Delta x \Delta y \sin(2\theta)}{4(\Delta y \sin^3 \theta + \Delta x \cos^3 \theta)} \quad (3.14)$$

где U — модуль вектора скорости; θ — угол наклона (от 0 до 90°) вектора скорости к направлению оси x . Из этого уравнения видно, что искусственная вязкость не появляется, если результирующий поток направлен вдоль одной из сеточных линий; кроме того, искусственная вязкость является максимальной, когда направление потока составляет угол 45° с линиями сетки.

3. Вклад искусственной вязкости можно уменьшить, используя меньшие шаги Δx и Δy и располагая сетку (если это возможно) так, чтобы сеточные линии более или менее совпадали с направлением потока.

4. Поскольку реальная вязкость имеет место во многих задачах, то достаточно сделать искусственную вязкость малой по сравнению с реальной.

5. Основной причиной возникновения искусственной вязкости является практика обращения с потоком через каждую грань контрольного объема как с локально-одномерным. Схемы, которые обеспечили бы меньший вклад искусственной вязкости, должны учитывать многомерную природу потока. Для этого также необходимо включать большее число соседних точек в дискретный аналог. В нашем случае это точки $(i-1, j-1), (i-1, j+1), (i+1, j-1), (i+1, j+1)$.

В заключение отметим, что искусственная вязкость носит не только негативный характер. Как будет показано далее, ее добавление в численную

схему позволяет улучшить сходимость решения и погасить нежелательные нефизичные осцилляции решения в районах скачков уплотнения. Однако это добавление должно быть контролируемо и носить узлокальный характер.