Глава 3. Численные методы решения уравнений движения вязкой жидкости.

Система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение вязкой ньютоновской жидкости называется уравнениями Навье-Стокса.

Существует большое количество численных методов решения уравнений Навье-Стокса. Автор не ставил задачей дать обзор и сравнительное описание этих методов.

В этой главе представлены:

- некоторые особенности, присущие уравнениям Навье-Стокса с точки зрения их численного решения;
- основные требования к численному решению уравнений Навье-Стокса.

Построен численный метод, который был практически реализован в виде программ на языках FORTRAN-90 и C++ (программа UNIVERSE-CFD).

1. Общий вид системы

1.1. Особенности численного решения

В главе 1 были представлена система основных дифференциальные уравнений динамики вязкой жидкости в различных системах координат. Она включает уравнение неразрывности, уравнения количества движения, уравнение энергии.

По своей форме уравнения количества движения и уравнение энергии очень похожи на дифференциальное уравнение теплопроводности с источником тепла.

Это сходство наводит на мысль, что для решения этих уравнений можно использовать такой же метод, как для решения дифференциального уравнения теплопроводности. Причем, каждое из этих уравнений можно решать отдельно, последовательно друг за другом.

Действительно, если задано поле давления, такой подход дает хорошие результаты. В этом случае член, содержащий градиент давления, рассматривается как заданный источник.

А что же делать, если поле давления не задано и его требуется определить на основе решения системы уравнений?

Первое, что приходит в голову, это использование итеративного процесса. Например:

1) задать в первом приближении поле давления;
2) решить уравнения количества движения и энергии, используя это поле давления как заданный источник, и получить распределение скорости;
3) определить поле плотности, решая уравнение неразрывности;
4) по уравнению состояния определить поле давления и вернуться ко 2-му пункту данного алгоритма

К сожалению, этот алгоритм редко сходится. Приходится прибегать к различным ухищрениям, например, использование шахматной сетки, дополнительных уравнений для поправок скоростей и давления и т.д. Подробно эти подходы разобраны в книге Патанкара [1].

Существует подход, основанный на исключении давления из системы уравнений и переходе к системе переменных функция тока – вихрь. Но этот подход имеет ограниченную область применения (см. [1]).

Практика последних лет показывает, что наиболее эффективным является подход, основанный не на последовательном решении каждого уравнения, входящего в систему уравнений Навье-Стокса, а на решении *одного* уравнения с *одной неизвестной* величиной. Только эта неизвестная величина является не скалярной функцией, а векторной. Соответственно, коэффициенты, входящие в полученное уравнение тоже не скаляры, а матрицы.

В этом случае отпадает необходимость сначала находить одну неизвестную величину (например, скорость), потом другую (например, давление), а потом искать способы их как-то связать.

Все неизвестные рассматриваются как единое целое и определяются в результате решения уравнения *одновременно*.

Такой подход имеет глубокий физический смысл: в реальном газовом потоке все газодинамические и термодинамические параметры тесно связаны между собой; любое изменение одного параметра вызывает неизбежное изменение других. Таким образом, эти параметры является *единым целым*, и расщепление при численном решении на отдельные части противоречит физическому смыслу процесса.

Этот метод требует существенное усложнение математического аппарата, но достигаемая эффективность с лихвой оправдывает это усложнение.

1.2. Векторная форма системы уравнений Навье-Стокса

Для декартовой системы координат (x, y, z) все уравнения, входящие в систему уравнений Навье-Стокса, можно записать в следующей общей форме

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

1) В уравнении неразрывности через $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ обозначены:

$$U_1 = \rho, \quad F_1 = \rho u, \quad G_1 = \rho v, \quad H_1 = \rho w \tag{1.2}$$

2) В проекциях уравнения количества движения на оси *x,y,z* через $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ обозначены соответственно:

$$U_2 = \rho u, \quad F_2 = \rho u^2 + p - \tau_{xx}, \quad G_2 = \rho uv - \tau_{xy}, \quad H_2 = \rho uw - \tau_{xz}, \tag{1.3}$$

$$U_3 = \rho v, \quad F_3 = \rho vu - \tau_{yx}, \quad G_3 = \rho v^2 + p - \tau_{yy}, \quad H_3 = \rho vw - \tau_{yz}, \tag{1.4}$$

$$U_4 = \rho w, \quad F_4 = \rho wu - \tau_{zx}, \quad G_4 = \rho wv - \tau_{zy}, \quad H_4 = \rho w^2 + p - \tau_{zz} \tag{1.5}$$

3) В уравнении энергии через $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$ обозначены:

$$U_5=\rho E,\quad F_5=\rho u\left(E+\frac{p}{\rho}\right)-u\tau_{xx}-v\tau_{yx}-w\tau_{zx}+q_x,$$

$$G_5=\rho v\left(E+\frac{p}{\rho}\right)-u\tau_{xy}-v\tau_{yy}-w\tau_{zy}+q_y, \tag{1.6}$$

$$H_5=\rho w\left(E+\frac{p}{\rho}\right)-u\tau_{xz}-v\tau_{yz}-w\tau_{zz}+q_z$$

Здесь использованы следующие обозначения:

ρ - плотность; u,v,w - компоненты вектора скорости в проекциях на оси x,y,z соответственно; p - давление; E - полная внутренняя энергия; компоненты тензора вязких напряжений и вектора плотности теплового потока выражаются по формулам:

$$\tau_{xx}=\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right)=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{yy}=\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right)=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{zz}=\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_m}{\partial x_m}\right)=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{1.7}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$q_x=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x},\quad q_y=-\lambda\frac{\partial T}{\partial y},\quad q_z=-\lambda\frac{\partial T}{\partial z} \tag{1.8}$$

где $\dfrac{\partial u_m}{\partial x_m}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}$ - дивергенция скорости, μ - коэффициент динамической вязкости, λ - коэффициент теплопроводности.

Удельная внутренняя энергия e связана с полной внутренней энергией E соотношением:

$$e=E-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right) \tag{1.9}$$

Выражения U_1,U_2,U_3,U_4,U_5 можно рассматривать как компоненты некоторого 5-мерного вектора ***U***

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \qquad (1.10)$$

Аналогично с использованием формул (1.2)-(1.6) строятся векторы $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho v u - \tau_{yx} \\ \rho w u - \tau_{zx} \\ \rho u H - u\tau_{xx} - v\tau_{yx} - w\tau_{zx} + q_x \end{bmatrix}, \qquad (1.11)$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho w v - \tau_{zy} \\ \rho v H - u\tau_{xy} - v\tau_{yy} - w\tau_{zy} + q_y \end{bmatrix}, \qquad (1.12)$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w - \tau_{xz} \\ \rho v w - \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ \rho w H - u\tau_{xz} - v\tau_{yz} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

Ввод этих векторов позволяет рассматривать уравнение (1.1) как векторную форму основных уравнений динамики вязкой жидкости. Такая форма позволяет существенно сократить объем записей при построении численного метода.

Для идеального газа:

$$\begin{gathered} e = C_V T, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}, \quad R = C_P - C_V = (\gamma - 1) C_V, \\ p = \rho R T = (\gamma - 1) C_V T \rho = (\gamma - 1) e \rho \end{gathered} \qquad (1.14)$$

$$H = E + \frac{p}{\rho}, \qquad (1.15)$$

где C_P, C_V - удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно, γ - показатель адиабаты, R - газовая постоянная.