

## 6. Методы решения задач с несколькими пространственными переменными

### 6.1. Особенности двух- и трехмерных задач.

В задачах с несколькими пространственными переменными после дискретизации получается гораздо более сложная система алгебраических уравнений, чем для задачи с одной пространственной переменной.

Рассмотрим, например, частный случай обобщенного уравнения (1.16), когда задача является двумерной, а конвекцией и источником членом можно пренебречь. Полагаем для простоты, что  $\Gamma = const$ ,  $\rho = const$ . В этом случае уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (6.1)$$

Это уравнение можно интерпретировать и как дифференциальное уравнение теплопроводности. В этом случае под  $\Phi$  подразумевается температура  $T$ , а под  $\nu$  - коэффициент температуропроводности.

Пусть задано начальное распределение  $\Phi$  и граничные условия первого рода:

$$\begin{aligned} \Phi(0, x, y) &= \phi_0(x, y), \\ \Phi_w &= \psi(t, x, y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Построение разностных схем для многомерных задач аналогично этому процессу для одномерной задачи. Получение многомерных дискретных аналогов проводится с помощью прямого распространения результатов, полученных при рассмотрении одномерной задачи.

Используем метод, основанный на разложении в ряд Тейлора. Неявный разностный аналог задачи (6.1) на сетке, изображенной на рис.5, имеет вид:

$$\frac{\Phi_{m,k}^{n+1} - \Phi_{m,k}^n}{\Delta t} - \nu \frac{\Phi_{m+1,k}^{n+1} - 2\Phi_{m,k}^{n+1} + \Phi_{m-1,k}^{n+1}}{\Delta x^2} - \nu \frac{\Phi_{m,k+1}^{n+1} - 2\Phi_{m,k}^{n+1} + \Phi_{m,k-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = 0;$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_\tau; \quad N_\tau \Delta t = t_{\max} \quad , \quad (6.3)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots, N_x; \quad (N_x - 1) \Delta x = L_x;$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N_y; \quad (N_y - 1) \Delta y = L_y$$

где  $L_x, L_y$  - размеры расчетной области по осям  $x, y$ ,

$\Phi_{m,j}^n$  - решение разностной задачи в момент времени  $t^n = n\Delta t$ , в точке  $(m, k)$ , которая находится на пересечении линий  $x_m = (m-1)\Delta x$  и  $y_k = (k-1)\Delta y$  (см. рис. 5).

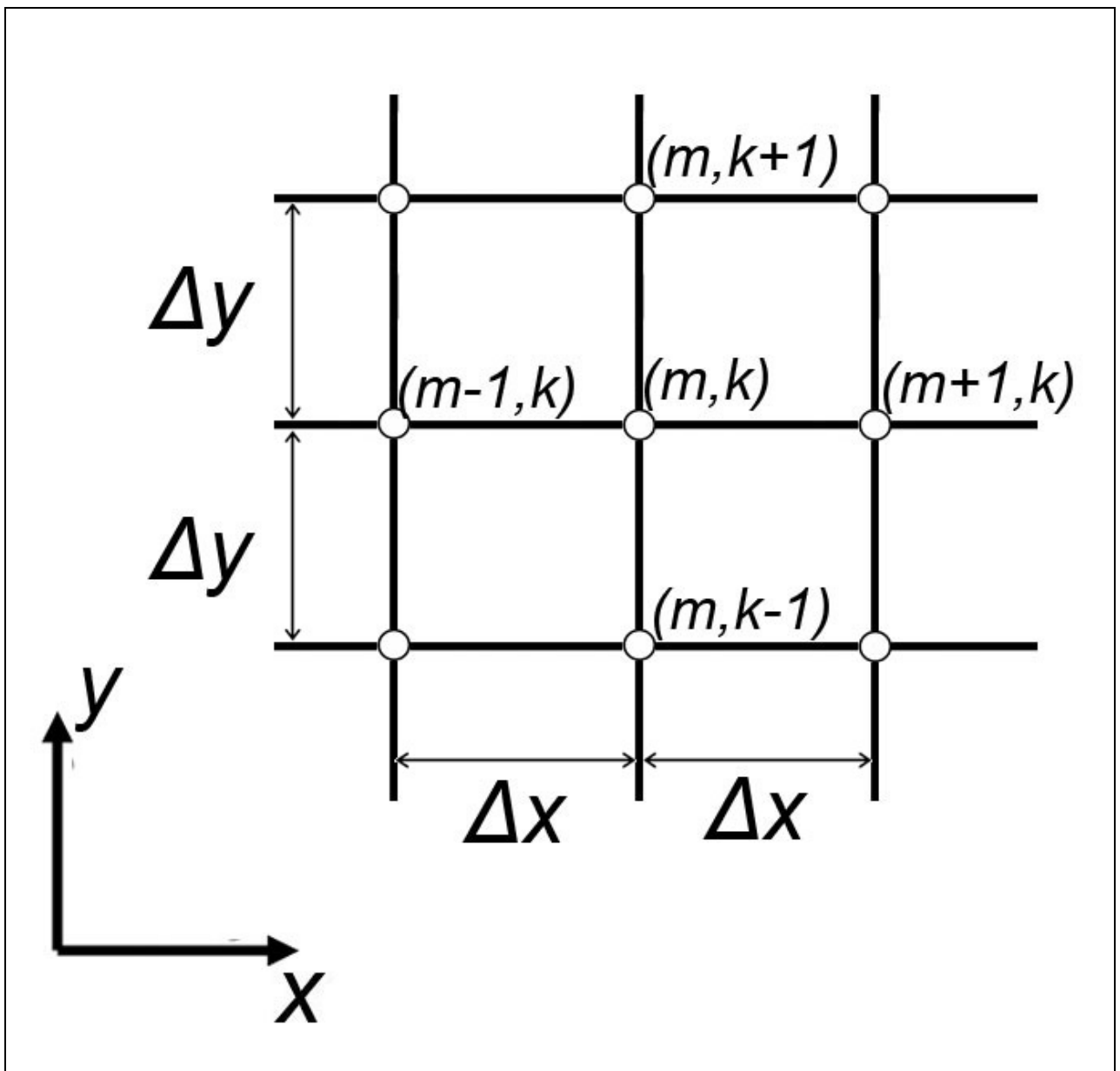


Рис.5. Сетка для двумерной задачи.

Уравнение (6.3) приводится к виду

$$b \Phi_{m,k+1}^{n+1} + a \Phi_{m,k}^{n+1} + c \Phi_{m,k-1}^{n+1} + d \Phi_{m+1,k}^{n+1} + e \Phi_{m-1,k}^{n+1} = f, \quad (6.4)$$

где

$$a = 1 + 2 \frac{v\Delta t}{\Delta x^2} + 2 \frac{v\Delta t}{\Delta y^2}, \quad (6.5)$$
$$b = c = -\frac{v\Delta t}{\Delta y^2}, \quad d = e = -\frac{v\Delta t}{\Delta x^2}, \quad f = \Phi_{m,j}^n$$

Уравнение (6.4) содержит 5 неизвестных. Вся система линейных алгебраических уравнений описывается так называемой *пятидиагональной матрицей* коэффициентов.

Аналогично для трехмерной задачи получается *семидиагональная матрица*.

В отличие от одномерной задачи, которая описывается трехдиагональной матрицей коэффициентов и которая эффективно решается методом прогонки, для задач с несколькими пространственными переменными таких эффективных методов нет.

Прямые методы решения алгебраических уравнений, применяемые к дву- или трехмерным задачам, становятся более сложными и требуют существенно большей машинной памяти и затрат вычислительного времени.

Альтернативой являются итерационные методы для решения алгебраических уравнений, а также подход построения разностных схем, основанный на методах расщепления.

### ***Упражнение***

Определить порядок аппроксимации разностной схемы (6.3).

### Упражнение

Доказать, что для разностной схемы (6.3) спектральный признак Неймана выполняется при любых значениях шагов по времени и по пространству.

*Указание.* Для решения этой задачи необходимо доказать ограниченности решений вида  $\Phi_{m,k}^n = \lambda^n e^{i(\alpha m + \beta k)}$  при любых значениях шагов.

## 6.2. Итерационный метод Гаусса-Зейделя с переменной направлений

Простейшим из всех итерационных методов является метод Гаусса-Зейделя, в котором значения переменной рассчитываются путем обращения в определенном порядке к каждой узловой точке. В памяти вычислительной машины держится только один массив значений  $\Phi_{m,k}$ . По мере обращения к очередной узловой точке соответствующее значение  $\Phi_{m,k}$  в памяти вычислительной машины (начальное приближение или значение  $\Phi_{m,k}$  с предыдущей итерации) заменяется на новое.

Для решения системы (6.4) на каждом шаге по времени используются два прохода в направлении основного движения потока (в данном случае  $x$ )

Для  $j = 1, 3, \dots$  ( $j$  - номер итерации):

1) Проход в обратном направлении ( $m = N_x - 1, N_x - 2, \dots, 3, 2$ )

$$b\Phi_{m,k+1}^{(j)} + a\Phi_{m,k}^{(j)} + c\Phi_{m,k-1}^{(j)} + d\Phi_{m+1,k}^{(j)} + e\Phi_{m-1,k}^{(j-1)} = f \quad (6.6)$$

Для  $m = N_x - 1$  значение  $\Phi_{m+1,k}^{(j)} = \Phi_{N_x,k}^{(j)}$  определяется граничными условиями на правой границе и, таким образом, является известной величиной. В результате при  $m = N_x - 1$  получается система, которая в каждой строке

содержит только 3 неизвестные величины -  $\Phi_{m,k-1}^{(j)}, \Phi_{m,k}^{(j)}, \Phi_{m,k+1}^{(j)}$ . Таким образом, система описывается трехдиагональной матрицей коэффициентов и эффективно решается методом прогонки.

Далее, при  $m = N_x - 2$  используется уже найденное значение  $\Phi_{m+1,k}^{(j)} = \Phi_{N_x-1,k}^{(j)}$ , и мы снова получаем трехдиагональную матрицу.

Этот процесс продолжается до слоя  $m = 2$ , а далее начинается проход в другом направлении.

2) Проход в прямом направлении  $m = 2, 3, \dots, N_x - 2, N_x - 1$

$$b\Phi_{m,k+1}^{(j+1)} + a\Phi_{m,k}^{(j+1)} + c\Phi_{m,k-1}^{(j+1)} + d\Phi_{m+1,k}^{(j)} + e\Phi_{m-1,k}^{(j+1)} = f \quad (6.7)$$

Для  $m = 2$  значение  $\Phi_{m-1,k}^{(j+1)} = \Phi_{1,k}^{(j+1)}$  определяется граничными условиями на левой границе и является известной величиной. Решение полученной системы, а также систем при всех последующих значений  $m$ , полностью аналогично предыдущему пункту.

Отметим, что для простоты записи в формулах (6.6) и (6.7) при обозначении  $\Phi$  не указывается номер шага по времени – везде используется  $(n+1)$ -ый номер.

Для начальной итерации используется значение с предыдущего шага по времени:

$$\Phi_{m,k}^{(0)} = \Phi_{m,k}^n \quad (6.8)$$

Для повышения эффективности метода можно чередовать направление проходов, а также использовать проходы не только в продольном направлении, но и в поперечном.

Главным недостатком метода Гаусса-Зейделя является медленная сходимость, особенно когда используется большое число узловых точек.

### 6.3. Метод приближенной факторизации

Методы факторизации состоят в том, что вместо решения одной системы линейных алгебраических уравнений решаются несколько систем, каждая из которых позволяет использовать более простые методы решения.

Систему (6.4) можно записать в обычном векторном виде

$$Ax = b, \quad (6.9)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a & c & . & . & e & . & . & . & . & . & . \\ b & a & c & . & . & e & . & . & . & . & . \\ . & b & a & c & . & . & e & . & . & . & . \\ . & . & b & a & c & . & . & e & . & . & . \\ d & . & . & b & a & c & . & . & e & . & . \\ . & d & . & . & b & a & c & . & . & e & . \\ . & . & d & . & . & b & a & c & . & . & e \\ . & . & . & d & . & . & b & a & c & . & . \\ . & . & . & . & d & . & . & b & a & c & . \\ . & . & . & . & . & d & . & . & b & a & c \\ . & . & . & . & . & . & d & . & . & b & a \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$x = \begin{bmatrix} . \\ \Phi_{m+1,k}^{n+1} \\ . \\ . \\ \Phi_{m,k+1}^{n+1} \\ \Phi_{m,k}^{n+1} \\ \Phi_{m,k-1}^{n+1} \\ . \\ . \\ \Phi_{m-1,k}^{n+1} \\ . \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} . \\ \Phi_{m+1,k}^n \\ . \\ . \\ \Phi_{m,k+1}^n \\ \Phi_{m,k}^n \\ \Phi_{m,k-1}^n \\ . \\ . \\ \Phi_{m-1,k}^n \\ . \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Матрица  $A$  имеет  $N$  строк и  $N$  столбцов, где  $N = N_x \times N_y$ . Соответственно размерность векторов  $x$  и  $b$  также равна  $N$ .

Метод приближенной факторизации состоит в том, что матрица представляется в виде

$$A \cong A_x \cdot A_y, \quad (6.12)$$

где

$$A_x = \begin{pmatrix} a_x & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_x & \cdot & e & \cdot & \cdot & \cdot \\ d & \cdot & a_x & \cdot & e & \cdot & \cdot \\ \cdot & d & \cdot & a_x & \cdot & e & \cdot \\ \cdot & \cdot & d & \cdot & a_x & \cdot & e \\ \cdot & \cdot & \cdot & d & \cdot & a_x & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & d & \cdot & a_x \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} a_y & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & a_y & c & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & a_y & c & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & b & a_y & c & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b & a_y & c & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & a_y & c \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & b & a_y \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Здесь коэффициенты  $b, c, d, e$  совпадают с соответствующими коэффициентами матрицы  $A$ , а коэффициенты  $a_x$  и  $a_y$  зависят только от шагов  $\Delta x$  и  $\Delta y$  соответственно:

$$a_x = 1 + 2 \frac{v\Delta t}{\Delta x^2} \quad (6.14)$$

$$a_y = 1 + 2 \frac{v\Delta t}{\Delta y^2}$$

Вводим обозначение

$$\tilde{x} = A_y x \quad (6.15)$$

и решаем систему

$$A_x \tilde{x} = b \quad (6.16)$$

Если подробно расписать это выражение, то получим систему в виде

$$a_x \tilde{\Phi}_{m,k} + d \tilde{\Phi}_{m+1,k} + e \tilde{\Phi}_{m-1,k} = f \quad (6.17)$$

Эта система имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов и эффективно решается методом прогонки.

Затем решается система (6.15)

$$b \Phi_{m,k+1}^{n+1} + a_y \Phi_{m,k}^{n+1} + c \Phi_{m,k-1}^{n+1} = \tilde{\Phi}_{m,k}, \quad (6.18)$$

которая тоже имеет трехдиагональную матрицу коэффициентов.

Основным недостатком метода приближенной факторизации является то, что ни один из ненулевых элементов матрицы  $A$  не совпадает с соответствующими элементами матрицы  $A_x \cdot A_y$ , а некоторые нулевые даже становятся ненулевыми. Это может приводить к большой погрешности метода и медленной сходимости.

Для трехмерных задач метод приближенной факторизации сходится крайне медленно и его не рекомендуется использовать.

#### 6.4. Модифицированный метод приближенной факторизации Маккормака [4]

Метод приближенной факторизации может быть улучшен с тем, чтобы уменьшить ошибку разложения матриц. Рассмотренный далее метод позволяет получить точное совпадение ненулевых элементов факторизованной и исходной матриц. Правда, некоторые нулевые элементы исходной матрицы становятся ненулевыми при факторизации, но возникающая ошибка может быть ликвидирована с помощью итераций.

Матрица  $A$ , входящая в систему (6.9), представляется в виде

$$A \cong A_x D^{-1} A_y, \quad (6.19)$$

где

$$A_x = \begin{pmatrix} a & . & e & . & . & . & . \\ . & a & . & e & . & . & . \\ d & . & a & . & e & . & . \\ . & d & . & a & . & e & . \\ . & . & d & . & a & . & e \\ . & . & . & d & . & a & . \\ . & . & . & . & d & . & a \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} a & c & . & . & . & . & . \\ b & a & c & . & . & . & . \\ . & b & a & c & . & . & . \\ . & . & b & a & c & . & . \\ . & . & . & b & a & c & . \\ . & . & . & . & b & a & c \\ . & . & . & . & . & b & a \end{pmatrix} \quad (6.20)$$



Здесь коэффициенты все  $a, b, c, d, e$  совпадают с соответствующими коэффициентами матрицы  $A$ .

Диагональная матрица  $D$  состоит только из элементов  $a$ :

$$D = \begin{pmatrix} a & . & . & . & . & . & . \\ . & a & . & . & . & . & . \\ . & . & a & . & . & . & . \\ . & . & . & a & . & . & . \\ . & . & . & . & a & . & . \\ . & . & . & . & . & a & . \\ . & . & . & . & . & . & a \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Таким образом, вместо системы (6.9) решается система

$$A_x D^{-1} A_y x = b \quad (6.22)$$

Решение этой системы не представляет большой сложности: оно состоит из обращений двух трехдиагональных матриц и одного умножения на диагональную матрицу.

Для уменьшения погрешности этого алгоритма можно добавить следующий итеративный процесс.

Систему (6.22) можно представить в виде:

$$A_x D^{-1} A_y x = Ax + Px \equiv b + Px, \quad (6.23)$$

где  $Px$  - невязка – отклонение приближенного решения от точного, которое находится из решения системы

$$Ax = b \quad (6.24)$$

Можно ввести итеративный процесс решения основной системы, основываясь на уравнении (6.23):

$$\begin{aligned} A_x D^{-1} A_y x^{(j)} &= b + Px^{(j-1)}, \\ j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.25)$$

где  $j$  - номер итерации.

Для нулевой итерации:

$$x^{(0)} = [\mathbf{0}] \quad (6.26)$$

После первой итерации, которая фактически описана выше (формула (6.22) ), необходимо найти невязку. Из формулы (6.23) следует:

$$Px^{(1)} = A_x D^{-1} A_y x^{(1)} - Ax^{(1)} = b - Ax^{(1)} \quad (6.27)$$

Затем решаем систему (6.25) для второй итерации  $j = 2$ . И т.д.

Для последующих итераций имеем:

$$Px^{(j)} = A_x D^{-1} A_y x^{(j)} - Ax^{(j)} = b + Px^{(j-1)} - Ax^{(j)}, \quad (6.28)$$

Если ввести обозначение для правой части (6.25)

$$r^{(j-1)} = b + Px^{(j-1)} \quad (6.29)$$

то невязка после  $j$ -ого шага определяется по формуле:

$$Px^{(j)} = r^{(j-1)} - Ax^{(j)} \quad (6.30)$$

Для хорошей сходимости достаточно двух итераций.

В работе [4] показано, что метод модифицированной факторизации намного эффективнее метода приближенной факторизации как для решения двумерных задач, так и для трехмерных.

## 6.5. Методы расщепления

Методы, описанные в предыдущих разделах, основаны на итерационном решении системы (6.4), которая была получена при использовании разностной схемы (6.3) для задачи (6.1).

Разностные схемы расщепления основаны на ином подходе – в них сами разностные схемы строятся так, что их решение не представляет большой сложности.

Основную идею схем расщепления можно изложить так.

Рассмотрим дифференциальную задачу вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \mathbf{A}\Phi, \\ \Phi|_{t=0} &= \phi_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

где  $\mathbf{A}$  - некоторый дифференциальный оператор по пространственным переменным.

Например, для задачи (6.1) это

$$\mathbf{A}\Phi = \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (6.32)$$

Допустим, что правая часть уравнения (6.31) имеет вид

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{A}_1\Phi + \mathbf{A}_2\Phi \quad (6.33)$$

На каждом шаге по времени при переходе от момента времени  $t = t^n$  к  $t = t^{n+1} = t^n + \Delta t$  заменим решение задачи (6.31) на решение двух задач:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \mathbf{A}_1 v, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \\ v(t^n, x, y) &= \Phi(t^n, x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \mathbf{A}_2 w, \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}, \\ w(t^n, x, y) &= v(t^{n+1}, x, y) \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Можно показать [2], что

$$w(t^{n+1}, x, y) = \Phi(t^{n+1}, x, y) + O(\Delta t^2), \quad (6.36)$$

т.е. порядок аппроксимации разностной схемы по шагу  $\Delta t$  не меняется.

Для задачи (6.1) расщепление (6.34), (6.35) имеет простую физическую интерпретацию.

Рассмотрим распространение тепла в плоском теле за период времени от  $t^n$  до  $t^{n+1}$ . Указанное расщепление двумерного уравнения из задачи (6.1) на два одномерных уравнения (6.34), (6.35) можно истолковать как приближенную замену процесса распространения тепла на два процесса. В первом из них, который описывается первым уравнением (6.34), мысленно вводятся теплонепроницаемые перегородки, препятствующие распространению тепла в направлении оси  $y$ . Затем, по прошествии времени  $\Delta t$ , взамен этих перегородок вводятся перегородки, препятствующие распространению тепла в направлении оси  $x$ . Тогда распространение тепла, снова в течение времени  $\Delta t$ , описывается уравнением (6.35).

Разностный аналог задач (6.34), (6.35) может быть записан как

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{\Phi}_{m,k} - \Phi_{m,k}^n}{\Delta t} &= \nu \Lambda_{xx} \tilde{\Phi}_{m,k}, \\ \frac{\Phi_{m,k}^{n+1} - \tilde{\Phi}_{m,k}}{\Delta t} &= \nu \Lambda_{yy} \Phi_{m,k}^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{xx} \Phi_{m,k} &= \frac{\Phi_{m+1,k} - 2\Phi_{m,k} + \Phi_{m-1,k}}{\Delta x^2}, \\ \Lambda_{yy} \Phi_{m,k} &= \frac{\Phi_{m,k+1} - 2\Phi_{m,k} + \Phi_{m,k-1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (6.38)$$

- разностные аппроксимации вторых производных.

Первое уравнение (6.37) преобразуется к виду

$$a_x \tilde{\Phi}_{m,k} + d \tilde{\Phi}_{m+1,k} + e \tilde{\Phi}_{m-1,k} = f \quad (6.39)$$

где

$$a_x = 1 + 2 \frac{v\Delta t}{\Delta x^2}, \quad d = e = -\frac{v\Delta t}{\Delta x^2}, \quad f = \Phi_{m,j}^n \quad (6.40)$$

Второе уравнение (6.37) преобразуется к виду

$$a_y \Phi_{m,k}^{n+1} + b \Phi_{m,k+1}^{n+1} + c \Phi_{m,k-1}^{n+1} = \tilde{\Phi}_{m,k} \quad (6.41)$$

где

$$a_y = 1 + 2 \frac{v\Delta t}{\Delta y^2}, \quad b = c = -\frac{v\Delta t}{\Delta y^2} \quad (6.42)$$

Сравнение формул (6.39)-(6.42) с основными формулами метода приближенной аппроксимации (6.17), (6.18) показывает, что для задачи (6.1) они в точности совпадают.

Таким образом, можно сделать вывод, что метод приближенной аппроксимации основывается на расщеплении задачи по физическим процессам, протекающим в разных направлениях. Отсюда и вытекают его основные недостатки – при больших значениях  $\Delta t$  пренебрежение взаимным влиянием процессов, протекающих в направлении оси  $x$  и в направлении оси  $y$ , может приводить к большим погрешностям.

К классу методов расщепления можно отнести так называемый *метод переменных направлений*. Его физическая интерпретация для уравнения теплопроводности состоит в том, что период времени от  $t^n$  до  $t^{n+1}$  разбивается на 2 полушага. В отличие от расщепления по физическим процессам, никакого отключения тепловых потоков в направлениях осей  $x$  и  $y$  не происходит. На первом полушаге тепловой поток в направлении оси  $x$  представляется в явной форме, т.е. через температуру в момент времени  $t^n$ , а тепловой поток в направлении оси  $y$  представляется в неявной форме, т.е. через температуру в момент времени  $t^{n+1}$ . На втором полушаге все происходит наоборот.

Разностная схема имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{\Phi}_{m,k} - \Phi_{m,k}^n}{\Delta t / 2} &= \nu \Lambda_{xx} \Phi_{m,k}^n + \nu \Lambda_{yy} \tilde{\Phi}_{m,k}, \\ \frac{\Phi_{m,k}^{n+1} - \tilde{\Phi}_{m,k}}{\Delta t / 2} &= \nu \Lambda_{xx} \Phi_{m,k}^{n+1} + \nu \Lambda_{yy} \tilde{\Phi}_{m,k} \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Исследуем эту схему на устойчивость, т.е. проверим выполняется ли спектральный признак Неймана, состоящий в ограниченности решений вида  $\Phi_{m,k}^n = \lambda^n e^{i(\alpha m + \beta k)}$ .

Отметим, что если спектр  $\lambda = \lambda(\alpha, \beta)$  является собственным числом оператора перехода от значений сеточной функции на  $n$ -м слое по времени к значениям сеточной функции на  $(n+1)$ -м слое, то он равен произведению собственных чисел операторов перехода на каждом полушаге:

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \quad (6.44)$$

На первом полушаге спектр  $\lambda_1$  находится путем подстановки в первое уравнение (6.43) вместо  $\Phi_{m,k}^n$  гармоники  $\lambda_1^n e^{i(\alpha m + \beta k)}$ , а вместо  $\tilde{\Phi}_{m,k}$  -  $\lambda_1^{n+1} e^{i(\alpha m + \beta k)}$ .

Он равен

$$\lambda_1 = \frac{1 - \frac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{2\nu\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}} \quad (6.45)$$

Аналогично находим спектр  $\lambda_2$

$$\lambda_2 = \frac{1 + \frac{\nu\Delta t}{2\Delta y^2} (e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta})}{1 - \frac{\nu\Delta t}{2\Delta x^2} (e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha})} = \frac{1 - \frac{2\nu\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (6.46)$$

Отсюда

$$|\lambda| = \left| \frac{1 - \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right| \times \left| \frac{1 - \frac{2v\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + \frac{2v\Delta t}{\Delta y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}} \right| \quad (6.47)$$

Очевидно, что первый множитель не превышает единицу ни при каком значении  $\alpha$ . Действительно, неравенство

$$\left| \frac{1 - \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1 - \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$-1 - \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 1 - \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 1 + \frac{2v\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

справедливо при любом  $\alpha$ .

Аналогично, второй множитель в формуле (6.47) тоже не превышает единицу.

Таким образом,

$$|\lambda| \leq 1 \quad (6.48)$$

и необходимый спектральный признак Неймана выполняется при любых значениях шагов по времени и по пространству.

### ***Упражнение.***

Доказать, что для разностной схемы расщепления по физическим процессам (6.37) спектральный признак Неймана выполняется при любых значениях шагов по времени и по пространству.

### ***Упражнение.***

Определить порядок аппроксимации разностной схемы расщепления по физическим процессам (6.37).

### ***Упражнение.***

Определить порядок аппроксимации схемы переменных направлений  
(6.43)

### **6.6. Метод установления**

Для решения многих стационарных задач математической физики, описывающих равновесные состояния, имеет смысл рассматривать последние как результат установления развивающегося во времени процесса, расчет которого часто оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния.

Мы проиллюстрируем применение метода установления примером алгоритма для вычисления решения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S = 0, \quad (6.49)$$

которое получается из обобщенного уравнения (1.14) в случае стационарного течения и пренебрежения конвекцией.

Это уравнение также можно интерпретировать как дифференциальное уравнение теплопроводности в стационарном случае. В этом случае под  $\Phi$  подразумевается температура,  $\Gamma$  - связан с коэффициентом теплопроводности,  $S$  - источник тепла.

Пусть заданы граничные условия первого рода, т.е. температура на границе рассматриваемой области  $\Phi_w = \psi(x, y)$ .

Рассмотрим вспомогательную нестационарную задачу о распространении тепла



$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S, \\ \Phi(0, x, y) &= \phi_0(x, y), \\ \Phi_w &= \psi(x, y) \end{aligned} \quad (6.50)$$

где начальные условия  $\phi_0(x, y)$  заданы произвольно. Таким образом, имеется нестационарная задача со стационарными граничными условиями  $\Phi_w = \psi(x, y)$ .

Поскольку источники тепла  $S$  и температура на границе  $\Phi_w$  не зависят от времени, то естественно ожидать, что и решение  $\Phi(t, x, y)$  с течением времени будет меняться все медленнее, распределение температур  $\Phi(t, x, y)$  в пределе при  $t \rightarrow \infty$  превращается в равновесное распределение температур  $\Phi(x, y)$ , описываемое задачей (6.49).

Поэтому вместо стационарной задачи (6.49) можно решать нестационарную задачу (6.50) до того момента времени  $t$ , пока ее решение перестанет меняться в пределах интересующей нас точности. В этом и состоит идея решения стационарных задач *методом установления*.

Математически метод установления можно обосновать следующим образом.

Как уже указывалось, после дискретизации уравнения в частных производных получается система линейных алгебраических уравнений.

Применим для решения этой системы какой-либо итерационный метод (например, метод простой итерации), который можно расписать так.

Исходная система имеет вид

$$Ax = b \quad (6.51)$$

Переносим все в левую часть и умножаем на некую знакопостоянную функцию  $\tau$

$$\tau(Ax - b) = 0 \quad (6.52)$$

Прибавим и отнимем к левой части неизвестную величину  $x$

$$x - x + \tau(Ax - b) = 0 \quad (6.53)$$

и построим на основе этого выражения итеративный процесс:

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} + \tau(Ax^{(n)} - b) = 0 \quad (6.54)$$

где  $(n)$  - номер итерации.

Последнее выражение можно переписать в виде:

$$\frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{\tau} = -(Ax^{(n)} - b) \quad (6.55)$$

Если считать, что  $x^{(n)}$  значение решения на текущем слое по времени, а  $x^{(n+1)}$  - значение решения на следующем шаге, то левую часть уравнения (6.55) можно рассматривать как разностную аппроксимацию частной производной по времени  $\frac{\partial x}{\partial t}$ , а функцию  $\tau$  как шаг по времени  $\Delta t$ .

Отсюда следует, что между итерационным процессом и эволюционными решениями (развивающимися во времени) есть глубокая аналогия. Переход от одной итерации к другой, вплоть до момента, когда итерации сойдутся можно рассматривать как движение по временным слоям вплоть до затухания колебаний решения.

При этом нам неважно, каким путем мы пришли к конечному результату, который и является решением исходного стационарного уравнения.