5. Явные и неявные схемы.

5.1. Явная, Кранка-Николсона и полностью неявная схемы.

Ограничения на шаг по времени, связанные с устойчивостью (см.формулы (4.31), (4.34) и т.п.), могут быть очень неудобны и приводить к большим затратам времени на численное решение задач.

Введем понятие *числа Куранта* (иногда используется название: *число Куранта-Фридрихса-Леви*):

$$CFL = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \tag{5.1}$$

По условию (4.34) для обеспечения устойчивости необходимо:

$$CFL \le 1 \tag{5.2}$$

Эти ограничения можно снять (частично или полностью), если перейти от *явных* разностных схем, которые рассматривались ранее, к *неявным* схемам.

Неявные схемы используют уравнения, которые выражают данные на $(n+1)$-ом шаге по времени на через несколько соседних точек сетки. Для нахождения результата решается система линейных уравнений.

Рассмотрим следующую разностную схему для решения задачи теплопроводности (4.25)

$$\frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta t} - \nu \frac{\Phi_{m+1}^{n+1} - 2\Phi_m^{n+1} + \Phi_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0\,, \tag{5.3}$$

где коэффициент

$$\nu = \Gamma / \rho \tag{5.4}$$

для простоты полагается постоянным (на анализ устойчивости, исходя из принципа «замороженных» коэффициентов, это не влияет).

Подставим решение в форме (4.18) - $\Phi_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$ в задачу (5.3) и найдем спектр $\lambda(\alpha)$:

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}\left(e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{4\nu \Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (5.5)$$

Очевидно, что $|\lambda(\alpha)| \le 1$ при любом положительном значении ν, т.е. необходимое условие устойчивости выполняется при любом шаге по времени.

Можно сформулировать следующее правило: неявные схемы чаще бывают устойчивыми по сравнению с явными. Но при этом усложняется процесс решения системы линейных алгебраических уравнений, которые получаются после дискретизации исходных уравнений.

Кроме чисто явных и чисто неявных схем, бывают смешанные схемы. Например, для уравнения теплопроводности это

$$\frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2}\left[f\left(\Phi_{m+1}^{n+1} - 2\Phi_m^{n+1} + \Phi_{m-1}^{n+1}\right) + (1-f)\left(\Phi_{m+1}^{n} - 2\Phi_m^{n} + \Phi_{m-1}^{n}\right)\right] = 0, \qquad (5.6)$$

где параметр f принимает значения от 0 до 1. При $f = 0$ получается чисто явная схема, при $f = 1$ - полностью неявная, при $f = 0.5$ получается так называемая *схема Кранка-Николсона*.

Легко показать, что при $f \ge 0.5$ схема удовлетворяет необходимому условию устойчивость при любых соотношениях шагов по времени и по пространственной координате.

Такие схемы называются *безусловно устойчивыми*.

Различные значения f можно интерпретировать как характеристику изменения Φ_m при переходе во времени от момента t^n к t^{n+1}, показанного на рис. 4. Явная схема по существу предполагает, что старое значение Φ_m^n существует в пределах всего временного шага, за исключением точки $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Неявная схема предполагает, что в момент t^n Φ_m резко уменьшается от Φ_m^n до Φ_m^{n+1}, а затем остается равной Φ_m^{n+1} на всем временном шаге и функция в пределах временного шага характеризуется новым значением Φ_m^{n+1}. Схема Кранка-Николсона предполагает линейное изменение Φ_m. На первый взгляд линейное изменение должно быть более разумным, чем две другие альтернативы.

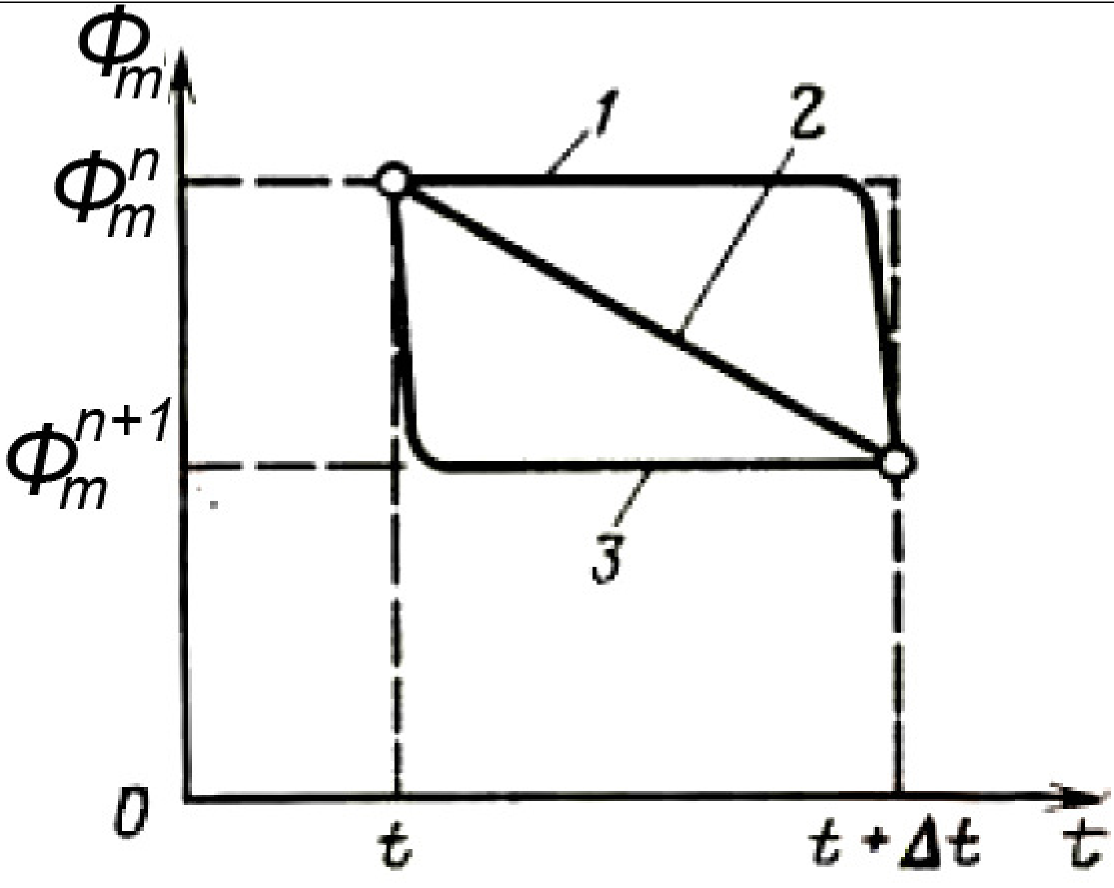

Рис.4. Изменение искомой функции Φ_m температуры во времени для явной схемы (1), схемы Кранка-Николсона (2) и полностью неявной схемы

(3).

Тем не менее, чисто неявная схема является предпочтительной. Причины две.

1) В случае схемы Кранка-Николсона могут иметь место колеблющиеся решения. Устойчивость в математическом смысле просто гарантирует, что эти колебания будут, в конечном счете, затухать, но это не обеспечивает физически правдоподобного решения. Несколько примеров подобных решений, полученных с помощью схемы Кранка-Николсона, можно найти в [1].

2) Точные решения рассматриваемой задачи имеют экспоненциальный характер, поэтому линейная интерполяция хуже отражает истинный характер изменения функции.

Упражнение

Доказать, что схема Кранка-Николсона действительно может давать нефизичные результаты, поскольку для нее не всегда выполняются требования, описанные в разделе 2.3.

5.2. Метод прогонки

Как уже говорилось, в случае использовании неявной схемы получается система уравнений относительно неизвестных на $(n+1)$-ом шаге по времени значений функции Φ. Например, уравнение (5.3) преобразуется к виду

$$\left(1+2\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\right)\Phi_m^{n+1}=\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\Phi_{m+1}^{n+1}+\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2}\Phi_{m-1}^{n+1}+\Phi_m^n,\quad m=1,2,\ldots,N \qquad (5.7)$$

Для решения этой системы используется так называемый *метод прогонки.*

Метод прогонки используется для решения системы линейных алгебраических уравнений, в которой каждая m-ая строка представлена в виде

$$a_m \Phi_m = b_m \Phi_{m+1} + c_m \Phi_{m-1} + d_m \tag{5.8}$$

где $m = 1, 2, ..., N-1, N$.

Для случая (5.7) коэффициенты равны

$$\begin{aligned} a_m &= \left(1 + 2\frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}\right), \\ b_m &= \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}, \quad c_m = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}, \quad d_m = \Phi_m^n \end{aligned} \tag{5.9}$$

Для $m = 1, \quad m = N$ коэффициенты

$$c_1 = 0, \quad b_N = 0 \tag{5.10}$$

Матрица такой системы называется трехдиагональной. В английской литературе метод называется алгоритмом Томаса или TDMA (Tri-diagonal-Matrix Algorithm- трехдиагональный матрицы алгоритмом).

Если на границах области заданы значения искомой функции, то:

$$a_1 = 1, \quad b_1 = c_1 = 0, \quad d_1 = \Phi_1, \tag{5.11}$$

$$a_N = 1, \quad b_N = c_N = 0, \quad d_N = \Phi_N \tag{5.12}$$

Записанные условия (5.8), (5.10) означают, что Φ_1 известна в зависимости от Φ_2. Уравнение для $m = 2$ представляет собой соотношение между Φ_1, Φ_2, Φ_3. Но поскольку Φ_1 может быть выражена через Φ_2, это соотношение приводится к соотношению между Φ_2 и Φ_3. Другими словами, Φ_2 можно выразить через Φ_3. Процесс подстановки можно продолжать до тех пор, пока значение Φ_N не будет выражено через Φ_{N+1}. Но поскольку Φ_{N+1} не существует, мы в действительности на данном этапе получим численное значение Φ_N. Это позволит нам начать процесс обратной подстановки, в котором Φ_{N-1} получится из Φ_N, Φ_{N-2} — из Φ_{N-1}, ..., Φ_2— из Φ_3 и Φ_1— из Φ_2. Это и составляет существо алгоритма трехдиагональной матрицы.

Предположим, что при прямой подстановке имеем зависимость

$$\Phi_m = P_m \Phi_{m+1} + Q_m \tag{5.13}$$

после того, как получено

$$\Phi_{m-1} = P_{m-1} \Phi_m + Q_{m-1} \tag{5.14}$$

Подставляя (5.14) в (5.8), получаем следующее соотношение:

$$\Phi_m = \frac{b_m}{(a_m - c_m P_{m-1})} \Phi_{m+1} + \frac{c_m Q_{m-1} + d_m}{(a_m - c_m P_{m-1})} \tag{5.15}$$

Сравниваем это выражение с (5.13) и получаем формулы для прогоночных коэффициентов P_m, Q_m:

$$P_m = \frac{b_m}{(a_m - c_m P_{m-1})}, \quad Q_m = \frac{c_m Q_{m-1} + d_m}{(a_m - c_m P_{m-1})} \tag{5.16}$$

Эти рекуррентные соотношения определяют P_m, Q_m через P_{m-1}, Q_{m-1}. Заметим, что в начале рекуррентного процесса уравнение (5.8) для $m = 1$ по форме почти совпадает с (5.13). Таким образом, P_1, Q_1 определяются в следующем виде:

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \tag{5.17}$$

На другом конце последовательности P_m, Q_m имеем $b_N = 0$. Это дает $P_N = 0$, и из (5.13)получаем

$$Q_N = \Phi_N \tag{5.18}$$

С этого момента осуществляется обратная подстановка с помощью уравнения (5.13).

Краткое описание алгоритма

1. Рассчитываем P_1, Q_1 из уравнения (5.17).

2. Используя рекуррентные соотношения (5.16), получаем P_m, Q_m для $m = 2, 3, ..., N$

3. Полагаем $Q_N = \Phi_N$

4. Используя уравнение (5.13) для $m = N - 1, N - 2, ..., 3, 2, 1$, получаем $\Phi_{N-1}, \Phi_{N-2}, ..., \Phi_3, \Phi_2, \Phi_1$.

Алгоритм, использующий свойство трехдиагональности матрицы, является мощным и удобным методом решения алгебраических уравнений, которые можно представить в виде (5.8). В отличие от общих матричных методов метод прогонки требует машинной памяти и машинного времени, пропорциональных N, а не N^2 или N^3.