4. Аппроксимация и устойчивость дискретных аналогов уравнений в частных производных

Определения сходимости, аппроксимации и устойчивости и теорема о связи между этими понятиями носят общий характер. Они одинаково имеют смысл для любых функциональных уравнений. Эти понятия, проиллюстрированные в предыдущем параграфе примерами для обыкновенных дифференциальных уравнений, легко распространяются на дискретизацию дифференциальных уравнений в частных производных.

4.1. Аппроксимация задачи Коши

Рассмотрим следующую задачу.

В некоторой области $D=\{t \ge 0, \quad -\infty < x < \infty\}$ необходимо найти функцию $\phi(t,x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - u\frac{\partial \phi}{\partial x} = f(t,x) \tag{4.1}$$

и начальным условиям

$$\phi(0,x) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{4.2}$$

В символическом виде (2.1)

$$\boldsymbol{L}\phi = \boldsymbol{f}$$

эта задача выглядит так

$$
\boldsymbol{L}\phi = \begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} - u\dfrac{\partial\phi}{\partial x}, & t \ge 0, \quad -\infty < x < \infty \\ \phi(0,x), & -\infty < x < \infty \end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{f} = \begin{cases} f(t,x), & t \ge 0, \quad -\infty < x < \infty \\ g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{4.3}
$$

В качестве сетки D_h используем точки пересечения линий

$$
\begin{aligned} &t^n = n\Delta t, \quad n = 0,1,2,\dots \\ &x_m = m\Delta x, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2,\dots \end{aligned} \tag{4.4}
$$

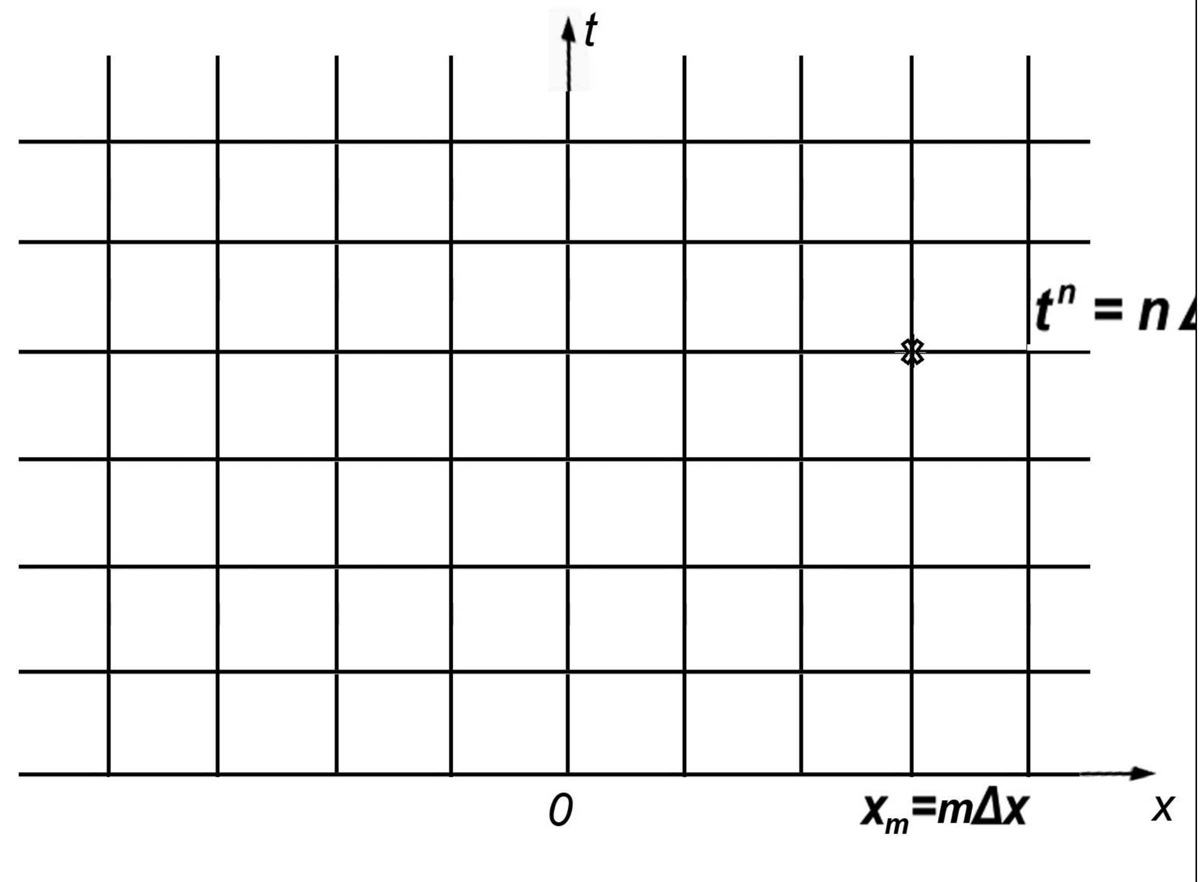

Рис.2. Сетка

В качестве дискретного аналога этой задачи

$$
\boldsymbol{L}_h\phi^{(h)} = \boldsymbol{f}^{(h)}
$$

используем следующую разностную схему

$$\boldsymbol{L}_h\phi^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{\phi_m^{n+1}-\phi_m^n}{\Delta t}-u\dfrac{\phi_{m+1}^n-\phi_m^n}{\Delta x},\\ \phi_m^0,\\ \\ n=0,1,2,...;\quad m=0,\pm1,\pm2,...\end{cases} \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{f}^{(h)}=\begin{cases}f\left(t^n,x_m\right),\\ g\left(x_m\right),\\ n=0,1,2,...;\quad m=0,\pm1,\pm2,...\end{cases}$$

Используем для точных решений искомой функции формулу Тейлора:

$$\begin{aligned}\phi\left(t^{n+1},x_m\right)&=\phi\left(t^n,x_m\right)+\frac{\partial\phi}{\partial t}\left(t^n,x_m\right)\Delta t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\left(t^n+\tau,x_m\right)\Delta t^2\\ \phi\left(t^n,x_{m+1}\right)&=\phi\left(t^n,x_m\right)+\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(t^n,x_m\right)\Delta x+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\left(t^n,x_m+\xi\right)\Delta x^2\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $0\le\tau\le\Delta t,\quad 0\le\xi\le\Delta x$ и, соответственно, точка $t^n+\tau$ является некоторой промежуточной точкой отрезка $\left[t^n,t^{n+1}\right]$, а точка $x_m+\xi$ - некоторой промежуточной точкой отрезка $[x_m,x_{m+1}]$.

Определяем $L_h\phi_h$, т.е. подставляем в (4.5) вместо ϕ_m^{n+1} искомую функцию $\phi\left(t^{n+1},x_m\right)$, вместо ϕ_i^n - $\phi\left(t^n,x_m\right)$, вместо ϕ_{m+1}^n -$\phi\left(t^n,x_{m+1}\right)$,

$$\boldsymbol{L}_h\phi_h=\begin{cases}\dfrac{\phi\left(t^{n+1},x_m\right)-\phi\left(t^n,x_m\right)}{\Delta t}-u\dfrac{\phi\left(t^n,x_{m+1}\right)-\phi\left(t^n,x_m\right)}{\Delta x},\\ \phi\left(0,x_m\right),\\ \\ n=0,1,2,...;\quad m=0,\pm1,\pm2,...\end{cases} \tag{4.7}$$

и таким образом с учетом (4.6) получаем

$$\boldsymbol{L}_h\phi_h=\begin{cases}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\left(t^n,x_m\right)-u\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\left(t^n,x_m\right)+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\left(t^n+\tau,x_m\right)\Delta t-u\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\left(t^n,x_m+\xi\right)\Delta x,\\ \phi\left(0,x_m\right),\\ \\ n=0,1,2,...;\quad m=0,\pm1,\pm2,...\end{cases} \tag{4.8}$$

Отсюда невязка $\delta \boldsymbol{f}^{(h)}$ равна

$$\delta \boldsymbol{f}^{(h)} = \boldsymbol{L}_h \phi_h - \boldsymbol{f}^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\left(t^n + \tau, x_m\right)\Delta t - u\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\left(t^n, x_m + \xi\right)\Delta x, \\ 0, \\ \\ n = 0,1,2,\ldots; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{4.9}$$

Если искомая функция имеет ограниченные вторые производные, то можно записать, что

$$\left\| \delta f^{(h)} \right\| \le \sup\left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right| \frac{1}{2}\Delta t + \sup\left| u\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right| \frac{1}{2}\Delta x \tag{4.10}$$

Таким образом, рассматриваемая схема дискретизации имеет первый порядок аппроксимации как относительно шага по времени Δt, так и относительно Δx.

Напомним, что через $\sup x$ (супрéмум) обозначается точная верхняя грань множества всех возможных значений x.

Упражнение.

Определить порядок аппроксимации разностной схемы

$$\boldsymbol{L}_h \phi^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t} - u\dfrac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2\Delta x}, \\ \phi_i^0, \\ \\ n = 0,1,2,\ldots; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases} \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{f}^{(h)} = \begin{cases} f\left(t^n, x_i\right), \\ g\left(x_i\right), \\ n = 0,1,2,\ldots; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

задачи Коши для уравнения (4.1).

4.2. Устойчивость по начальным данным. Спектральный признак Неймана. Примеры исследования

Рассмотрим разностную схему (4.5) для задачи Коши, рассмотренной в предыдущем параграфе

$$
\boldsymbol{L}_h\phi^{(h)} = \begin{cases} \dfrac{\phi_m^{n+1}-\phi_m^n}{\Delta t} - u\,\dfrac{\phi_{m+1}^n-\phi_m^n}{\Delta x} = f\left(t^n, x_m\right), \\ \phi_m^0 = g\left(x_m\right), \\ \\ n = 0,1,2,...; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases} \tag{4.12}
$$

Определим нормы $\left\|\phi^{(h)}\right\|$ и $\left\|\boldsymbol{f}^{(h)}\right\|$ равенствами

$$
\begin{gathered}
\left\|\phi_i^n\right\| = \max_n\left[\max_m\left|\phi_m^n\right|\right], \\
\left\|\boldsymbol{f}^{(h)}\right\| = \max_m\left|g\left(x_m\right)\right| + \max_{m,n}\left|f\left(t^n, x_m\right)\right| = \max_m\left|g_m\right| + \max_{m,n}\left|f_m^n\right|
\end{gathered} \tag{4.13}
$$

Условие устойчивости (3.16) рассматриваемой задачи

$$
\left\|\phi^{(h)}\right\| \le C_1\left\|f^{(h)}\right\|
$$

примет вид

$$
\max_m\left|\phi_m^n\right| \le C_1\left(\max_m\left|g_m\right| + \max_{m,n}\left|f_m^n\right|\right), \quad n = 0,1,2,... \quad , \tag{4.14}
$$

где C_1 не зависит от $\Delta t, \Delta x$. Условие (4.14) должно выполняться при любых ограниченных функциях $\{g_m\}$ и $\{f_m^n\}$. В частности, для устойчивости необходимо, чтобы оно выполнялось при произвольных $\{g_m\}$ и $f_m^n = 0$, т.е. чтобы решение задачи

$$\frac{\phi_m^{n+1}-\phi_m^n}{\Delta t}-u\frac{\phi_{m+1}^n-\phi_m^n}{\Delta x}=0,$$
$$\phi_m^0=g\left(x_m\right), \tag{4.15}$$
$$n=0,1,2,...;\quad m=0,\pm 1,\pm 2,...$$

удовлетворяло условию

$$\max_m\left|\phi_m^n\right|\le C_1\max_m\left|\phi_m^0\right|,\quad n=0,1,2,... \tag{4.16}$$

при произвольной ограниченной функции $g^i=g\left(x_i\right)$

Свойство (4.16), необходимое для устойчивости (4.14) задачи (4.12), называют устойчивостью задачи (4.12) относительно *возмущения начальных данных*. Оно означает, что возмущение $\left\{\phi_m^0\right\}$, внесенное в начальные данные задачи (4.12), вызовет возмущение $\left\{\phi_m^n\right\}$ решения задачи (4.12), которое в силу (4.16) не более чем в C_1 раз превосходит возмущение начальных данных, причем C_1 не зависит от $\Delta t, \Delta x$.

Условие устойчивости (4.16) должно выполняться для любых ограниченных функций $\left\{\phi_m^0\right\}$, в частности, для гармоники

$$\phi_m^0=e^{i\alpha m}, \tag{4.17}$$

где i -мнимая единица, α - вещественный параметр.

Решение задачи (4.15) при таких начальных условиях имеет вид:

$$\phi_m^n=\lambda^n e^{i\alpha m} \tag{4.18}$$

где

$$\lambda=\lambda\left(\alpha\right)=1+\frac{u\Delta t}{\Delta x}\left(e^{i\alpha}-1\right)=1-r+re^{i\alpha}, \tag{4.19}$$

$$r = \frac{u\Delta t}{\Delta x} = const$$

Для решения (4.18) справедливо

$$\max_m \left|\phi_m^n\right| \le \left|\lambda(\alpha)\right|^n \max_m \left|\phi_m^0\right| \qquad (4.20)$$

Сравнивая это выражение с условием (4.16), получаем, что для устойчивости решения задачи (4.15) необходимо выполнение неравенства

$$\left|\lambda(\alpha)\right|^n \le C_1 \qquad (4.21)$$

Так как это условие должно выполняться для любого значения n, то оно эквивалентно условию

$$\left|\lambda(\alpha)\right| \le 1 \qquad (4.22)$$

Это и есть *необходимое спектральное условие устойчивости Неймана* применительно к рассматриваемому примеру.

Комплексная функция (4.19) называется *спектром* и при $r > 0$ представляет собой окружность радиуса r с центром в точке $(1-r)$.

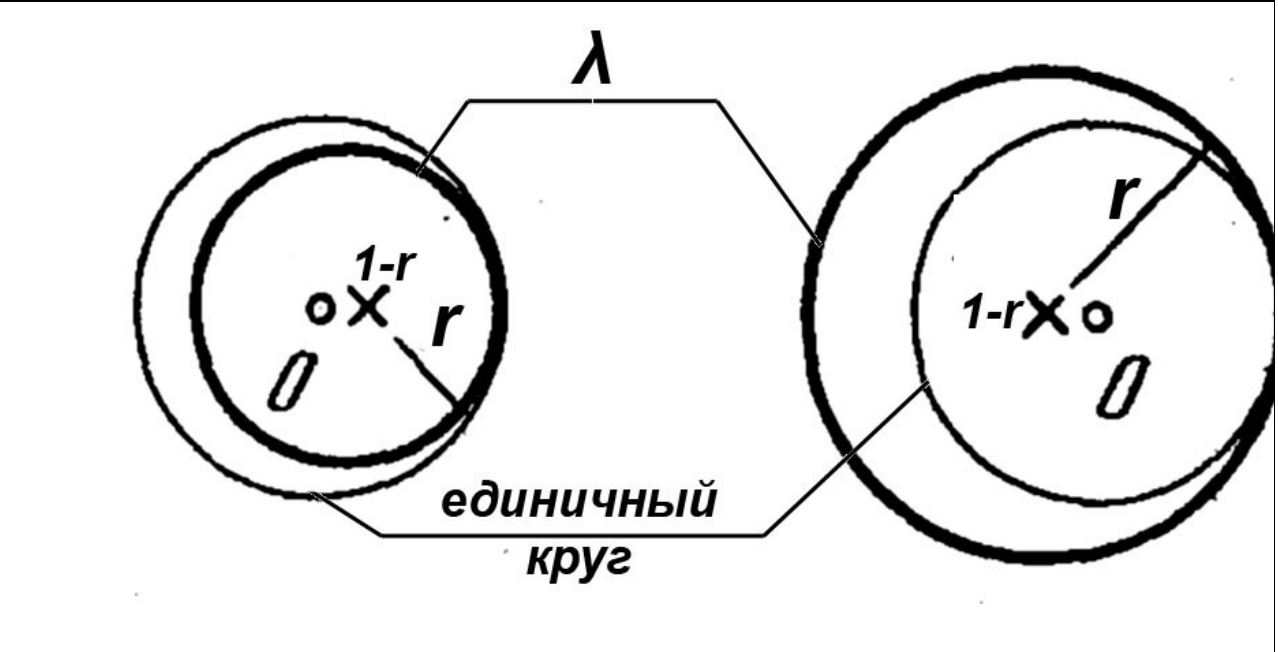

Рис.3

В случае $r<1$ эта окружность лежит внутри единичного круга (касаясь его в точке $\lambda=1$, при $r=1$ совпадает с единичной окружностью, а при $r>1$ лежит вне единичного круга (см.рис.3). Соответственно, необходимое условие устойчивости (4.22) выполнено при $r\le 1$ и не выполнено при $r>1$.

При $r<0$ необходимое условие устойчивости не выполняется.

Резюмируя все вышесказанное, можно сказать, что, *если необходимое условие Неймана (4.22) не выполнено, то ни при каких условиях нельзя ожидать устойчивости, а в случае его выполнения можно надеяться, что устойчивость имеет место.*

Спектр $\lambda(\alpha)$ является собственным числом оператора перехода от значений сеточной функции на n-м слое по времени к значениям сеточной функции на $(n+1)$-м слое:

$$\phi_m^{n+1}=(1-r)\phi_m^n+r\phi_{m+1}^n \qquad (4.23)$$

Изложенный принцип исследования устойчивости был использован для задачи Коши с постоянными коэффициентами. Однако он легко расширяется на задачи с непостоянными коэффициентами, а также на задачи в ограниченных областях, когда граничные условия задаются не только при $t=0$, но и на боковых границах. Этим приемом можно пользоваться и для исследования нелинейных задач.

Проиллюстрируем это на следующем примере.

<u>Пример.</u>

Проведем исследование устойчивости численной схемы для решения нестационарного одномерного уравнения теплопроводности

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{4.24}$$

Это уравнение совпадает по форме с обобщенным уравнением (1.13) в случае, когда рассматривается одномерная задача, и можно пренебречь конвекцией и источником

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \tag{4.25}$$

Здесь коэффициенты ρ и Γ не являются постоянными, а зависят от времени t и координаты x

Пусть полностью задача выглядит так

$$\boldsymbol{L}\phi = \begin{cases} \rho \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right), & t \geq 0, \quad 0 < x < L \\ \Phi(0,x), & 0 < x < L \\ \Phi(t,0), & t \geq 0 \\ \Phi(t,L), & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \quad 0 < x < L \\ g(x), & 0 < x < L \\ \omega(t), & t \geq 0 \\ \psi(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

Задача может трактоваться как определение температуры в стержне, у которого задано начальное распределение температуры $g(x)$ и значения температуры на концах стержня $\omega(t)$ и $\psi(t)$ в любой момент времени.

Для решения используем сетку (см. Рис.2) и следующую разностную схему

$$
\left.
\begin{array}{l}
\rho\left(t^n, x_m\right)\dfrac{\Phi_m^{n+1}-\Phi_m^n}{\Delta t}-\dfrac{1}{\Delta x^2}\left[\Gamma\left(t^n,\dfrac{x_{m+1}+x_m}{2}\right)\left(\Phi_{m+1}^n-\Phi_m^n\right)-\Gamma\left(t^n,\dfrac{x_m+x_{m-1}}{2}\right)\left(\Phi_m^n-\Phi_{m-1}^n\right)\right]=0,\\
\Phi_m^0=g\left(x_m\right),\\
\Phi_0^n=\omega\left(t^n\right),\\
\Phi_M^n=\psi\left(t^n\right)\\
n=0,1,2,...;\quad m=0,1,2,...M;\quad M\Delta x=L
\end{array}
\right\} \tag{4.26}
$$

Выберем произвольную внутреннюю точку $(\tilde{t},\tilde{x})$ области, где рассматривается задача, и «заморозим» коэффициенты в этой точке.

Разностное уравнение с постоянными коэффициентами имеет вид

$$
\left.
\begin{array}{l}
\dfrac{\Phi_m^{n+1}-\Phi_m^n}{\Delta t}-\dfrac{\Gamma\left(\tilde{t},\tilde{x}\right)}{\rho\left(\tilde{t},\tilde{x}\right)}\dfrac{\Phi_{m+1}^n-2\Phi_m^n+\Phi_{m-1}^n}{\Delta x^2}=0,\\
\Phi_m^0=g\left(x_m\right),\\
\Phi_0^n=\omega\left(t^n\right),\\
\Phi_M^n=\psi\left(t^n\right)\\
n=0,1,2,...;\quad m=0,1,2,...M;\quad M\Delta x=L
\end{array}
\right\} \tag{4.27}
$$

Вместо исследования на устойчивость задачи (4.26) будем исследовать задачу с «замороженными» коэффициентами (4.27). Это позволяет сделать *принцип замороженных коэффициентов.*

Принцип замороженных коэффициентов. Для устойчивости задачи (4.26) необходимо, чтобы задача Коши для разностного уравнения с постоянными коэффициентами (4.27) удовлетворяла необходимому спектральному признаку устойчивости Неймана.

Введем обозначение

$$
\nu=\frac{\Gamma\left(\tilde{t},\tilde{x}\right)}{\rho\left(\tilde{t},\tilde{x}\right)}
$$

подставим решение в форме (4.18) - $\Phi_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$ в задачу (4.27) и найдем спектр $\lambda(\alpha)$:

$$\lambda = 1 + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2}\left(e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}\right) \tag{4.28}$$

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \tag{4.29}$$

получаем

$$\lambda = 1 - \frac{2\nu\Delta t}{\Delta x^2}(1-\cos\alpha) = 1 - \frac{4\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{4.30}$$

Из условия (4.22) следует, что для устойчивости разностной схемы необходимо:

$$\left|1 - \frac{4\nu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| \le 1$$

Это условие должно выполняться при любом значении α, откуда следует:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2\nu} \tag{4.31}$$

Формула (4.31) накладывает ограничение на шаг по времени Δt в зависимости от шага по пространственной координате Δx.

Упражнение

Доказать, что для задачи (1.17) в случае одномерного течения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + u\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \tag{4.32}$$

разностная схема

$$\frac{\Phi_m^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta t} + u\left(t^n, \frac{x_m + x_{m-1}}{2}\right)\frac{\left(\Phi_m^n - \Phi_{m-1}^n\right)}{\Delta x} = 0 \qquad (4.33)$$

при $u < 0$ не может быть устойчивой ни при каких условиях, а при $u > 0$ для обеспечения устойчивости необходимо выполнение условия:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{u} \qquad (4.34)$$