3.Понятия сходимости, аппроксимации и устойчивости.

Подробное описание этих понятий со всеми необходимыми математическими доказательствами содержится, например, в книге Годунова С.К., Рябенького В.С. [2].

3.1. Сходимость, порядок точности

Будем говорить, что решение дискретной $\phi^{(h)}$задачи (2.7) *сходится* к решению дифференциальной задачи (2.1) , если

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| \to 0 \text{ при } h \to 0, \tag{3.1}$$

где ϕ_h - множество значений искомой функции в сеточных узлах, т.е.

$$\phi_h = \left(\phi(x_1), \phi(x_2), \phi(x_3), ..., \phi(x_N)\right) \tag{3.2}$$

Напомним, что через $\phi^{(h)}$ обозначается набор решений алгебраических уравнений, полученных в результате дискретизации – формула (2.6).

Норма $\| \ \|$ на сеточных узлах может быть задана разными способами, например, как максимальное значение модуля:

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| = \max_n \left|\phi(x_n) - \phi_n\right|, \tag{3.3}$$

или как

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| = \left(\frac{1}{N}\left|\phi(x_n) - \phi_n\right|^2\right)^{1/2} \tag{3.4}$$

Кроме определения (3.1) можно ввести еще и *порядок точности*: если выполнено неравенство

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| < ch^k, \tag{3.5}$$

где $c > 0, \quad k > 0$ некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что дискретная схема имеет $k-$ый порядок точности.

3.2. Невязка, аппроксимация

Подставим ϕ_h, т.е. множество значений искомой функции в сеточных узлах, в уравнение (2.7), которое является дискретным аналогом исходного дифференциального уравнения. При этом возникнет так называемая *невязка*, определяемая как

$$\boldsymbol{L}_h\phi_h = \boldsymbol{f}^{(h)} + \delta\boldsymbol{f}^{(h)} \tag{3.6}$$

В качестве примера определим невязку для уравнения

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + a(x)\frac{d\phi}{dx} = 0 \tag{3.7}$$

Используем формулы (2.10) и (2.11) для дискретизации этого дифференциального уравнения, т.е.

$$\begin{aligned} &L_h\phi^{(h)} = \frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{h^2} + a(x_n)\frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2h} = 0 \\ &f^{(h)} = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Используем для точных решений искомой функции формулу Тейлора:

$$\begin{aligned} \phi(x_{n-1}) &= \phi(x_n) - \phi'(x_n)h + \frac{1}{2}\phi''(x_n)h^2 - \frac{1}{6}\phi'''(x_n)h^3 + \frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_1)h^4 \\ \phi(x_{n+1}) &= \phi(x_n) + \phi'(x_n)h + \frac{1}{2}\phi''(x_n)h^2 + \frac{1}{6}\phi'''(x_n)h^3 + \frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_2)h^4 \end{aligned} \tag{3.9}$$

где ξ_1 и ξ_2 -некоторые промежуточные точки отрезка $[x_{n-1}, x_{n+1}]$.

Определяем $L_h\phi_h$, т.е. подставляем в (3.8) вместо ϕ_n искомую функцию $\phi(x_n)$, вместо ϕ_{n-1} - $\phi(x_{n-1})$, вместо ϕ_{n+1} - $\phi(x_{n+1})$, т.е.

$$\begin{aligned} L_h\phi_h &= \phi''(x_n) + a(x_n)\phi'(x_n) + \frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_2)h^2 + a(x_n)\frac{1}{12}\phi'''(\xi)h^2 = \\ &= f^{(h)} + \frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_2)h^2 + a(x_n)\frac{1}{12}\phi'''(\xi)h^2 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Отсюда невязка равна:

$$\delta f^{(h)} = \frac{1}{24}\phi^{(IV)}(\xi_2)h^2 + a(x_n)\frac{1}{12}\phi'''(\xi)h^2 \tag{3.11}$$

Если искомая функция имеет ограниченные производные, то можно записать, что

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\| \le Ch^2 \tag{3.12}$$

где C - некоторая постоянная, зависящая от ϕ, но не зависящая от h.

Определение. Будем говорить, что дискретная схема $L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$ *аппроксимирует* задачу $L\phi = f$ на решение ϕ, если для невязки справедливо:

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\| \to 0 \text{ при } h \to 0 \tag{3.13}$$

Если, сверх того, имеет место неравенство

$$\left\|\delta f^{(h)}\right\| \le Ch^k \tag{3.14}$$

где $C > 0, \quad k > 0$ некоторые постоянные, не зависящие от h, то говорят, что имеет место *аппроксимация порядка* h^k или порядка k относительно величины h.

3.3. Устойчивость

Достаточно ли аппроксимации для сходимости?

Можно показать [2], что одной аппроксимации недостаточно для того, чтобы решение дискретной задачи сходилось к решению дифференциальной задачи. Для сходимость необходимо еще и условие устойчивости.

Определение. Будем называть дискретную схему $L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$ *устойчивой*, если существуют числа $h_0 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при любом $h < h_0$ и любом $\varepsilon^{(h)}$, таком, что

$$\left\|\varepsilon^{(h)}\right\| < \delta$$

дискретная задача

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)},$$

полученная из исходной дискретной схемы добавлением к правой части возмущения $\varepsilon^{(h)}$, имеет одно и только одно решение $z^{(h)}$, причем это решение отклоняется от решения $\phi^{(h)}$ невозмущенной задачи на сеточную функцию $z^{(h)} - \phi^{(h)}$, удовлетворяющую условию

$$\left\|z^{(h)} - \phi^{(h)}\right\| \le C_1 \left\|\varepsilon^{(h)}\right\| \tag{3.15}$$

где C_1 - некоторая постоянная, не зависящая от h.

Равенство (3.15) означает, что малое возмущение $\varepsilon^{(h)}$ правой части вызывает малое возмущение решения $\left(z^{(h)} - \phi^{(h)}\right)$.

В случае линейного оператора L_h сформулированное определение равносильно следующему.

Дискретная задача $L_h \phi^{(h)} = f^{(h)}$ *устойчива*, если существует $h_0 > 0$ такое, что при любом $f^{(h)}$ она однозначно разрешима, причем

$$\left\|\phi^{(h)}\right\| \le C_1 \left\|f^{(h)}\right\| \tag{3.16}$$

где C_1 - некоторая постоянная, не зависящая от h и $f^{(h)}$.

Сформулируем важную теорему, характеризующую зависимость между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью.

Теорема. Пусть дискретная схема $L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$ аппроксимирует задачу $L\phi = f$ на решении и с порядком точности h^k и устойчива. Тогда решение $\phi^{(h)}$ задачи $L_h\phi^{(h)} = f^{(h)}$ сходится к ϕ_h, причем имеет место оценка

$$\left\|\phi_h - \phi^{[h]}\right\| < CC_1h^k, \tag{3.17}$$

где C, C_1 - числа, входящие в оценки (3.14) и (3.16).