2.Дискретизация исходного уравнения.

Для простоты в этом разделе предположено, что переменная Ф является функцией только одной независимой переменной x. Однако разработанные здесь идеи будут применимы также в случае зависимости более чем от одной независимой переменной.

Пусть у нас есть некоторой отрезок D на оси x, и на этом отрезке поставлена некоторая дифференциальная краевая задача. Это значит, что задано дифференциальное уравнение, которому должно удовлетворять решение Ф на отрезке D и дополнительное условие для Ф на одном или на обоих концах отрезка. Дифференциальную краевую задачу можно записать в виде символического равенства

$$L\phi = f \ , \tag{2.1}$$

где L - заданный дифференциальный оператор, f - заданная правая часть. Например, для задачи

$$\begin{aligned} &\frac{d\phi}{dx} + \frac{x}{1+\phi^2} = \cos(x), \quad 0 \le x \le 1, \\ &\phi(0) = 3 \end{aligned} \tag{2.2}$$

достаточно положить:

$$\begin{aligned} L\phi &\equiv \begin{cases} \dfrac{d\phi}{dx} + \dfrac{x}{1+\phi^2}, & 0 \le x \le 1, \\ \phi(0) \end{cases} \\ f &\equiv \begin{cases} \cos(x), & 0 \le x \le 1, \\ 3 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для вычисления ϕ численным методом надо прежде всего выбрать на отрезке D конечное число точек, совокупность которых называется *сеточными узлами* и обозначается через D_h. Вводится шаг сетки h.

Например, если в качестве D используется отрезок $[0,1]$, и число узлов сетки равно N, то можно положить, что шаг равен

$$h = \frac{1}{N-1} \tag{2.4}$$

Узлы сетки в этом случае это совокупность точек:

$$x_1 = 0,\ x_2 = h,\ x_3 = 2h, \ldots, x_N = (N-1)h = 1 \tag{2.5}$$

Таким образом, в качестве основных неизвестных в численном методе рассматриваются значения зависимой переменной в конечном числе точек расчетной области. Метод включает в себя получение системы алгебраических уравнений для этих неизвестных и алгоритм решения этих уравнений. Будем обозначать набор решений этих алгебраических уравнений через $\phi^{(h)}$. Обозначим через ϕ_n решение в точке x_n, т.е.

$$\phi^{(h)} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_N) \tag{2.6}$$

Рассматривая значения в узловых точках, мы заменили непрерывную информацию, содержащуюся в точном решении дифференциального уравнения, дискретными значениями. Таким образом, мы дискретизировали распределение Ф, и этот класс численных методов назовем методами дискретизации. Возможные дискретные аналоги данного дифференциального уравнения являются неединственными, хотя предполагается, что в пределе очень большого числа узловых точек все типы дискретных аналогов дают одно и то же решение.

Дискретный аналог задачи (2.1) можно символически записать в виде:

$$L_h \phi^{(h)} = f^{(h)} \tag{2.7}$$

Дискретизацию заданного дифференциального уравнения можно осуществить множеством способов. Рассмотрим некоторые из них.

2.1. Использование рядов Тейлора.

Разложение в ряд Тэйлора около узловой точки n, расположенной посередине между точками $(n-1)$ и $(n+1)$ дает:

$$\begin{aligned}\phi_{n-1} &= \phi_n - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_n h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_n h^2 - \ldots \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_n h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_n h^2 - \ldots\end{aligned} \qquad (2.8)$$

Если во втором из этих уравнения отбросить все члены, начиная с третьего, то получим:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_n \approx \frac{\phi_{n+1}-\phi_n}{h} \qquad (2.9)$$

Если отбросить все члены рядов (2.8) начиная с четвертого и сложить их, получим:

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_n \approx \frac{\phi_{n+1}-2\phi_n+\phi_{n-1}}{h^2} \qquad (2.10)$$

Если же в этом случае вычесть первое из уравнений (2.8) из второго, то получится еще одна формула для аппроксимации первой производной:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_n \approx \frac{\phi_{n+1}-\phi_{n-1}}{2h} \qquad (2.11)$$

Таким образом, дискретный аналог задачи (2.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} L_h\phi^{(h)} &\equiv \begin{cases} \dfrac{\phi_{n+1}-\phi_n}{h} + \dfrac{x_n}{1+\phi_n{}^2}, & 1 \le n \le N-1, \\ \phi_1 \end{cases} \\ f^{(h)} &\equiv \begin{cases} \cos(x_n), & 1 \le n \le N-1, \\ 3 \end{cases} \end{aligned} \qquad (2.12)$$

2.2. Метод контрольного объема.

Основная идея метода контрольного объема легко понятна и поддается прямой физической интерпретации. Расчетную область разбивают на некоторое число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Дифференциальное уравнение интегрируют по каждому контрольному объему. Для вычисления интегралов используют кусочные профили, которые описывают изменение Ф между узловыми точками. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения Ф в нескольких узловых точках.

Полученный подобным образом дискретный аналог выражает закон сохранения Ф для конечного контрольного объема точно так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объема. Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в предельном случае очень большого их числа. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам.

Рассмотрим стационарную одномерную задачу теплопроводности, описываемую уравнением

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)+S=0 \tag{2.13}$$

где λ — коэффициент теплопроводности; T — температура; S — скорость выделения теплоты в единице объема.

Подготовка. Для получения дискретного аналога будет использовано показанное на рис. 1 расположение узловых точек.

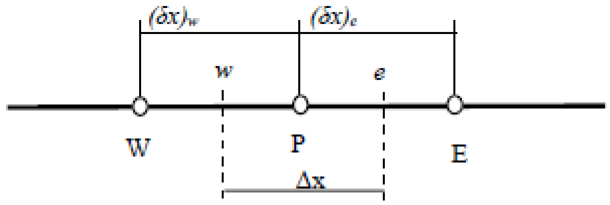

Рис. 1. Шаблон узловых точек для одномерной задачи

Используем при этом обозначения С.Патанкара [1]. В центре нашего внимания оказывается точка P, окруженная точками E и W (E — восточная сторона, т. е. направление вдоль оси x, W—западная сторона, т. е. направление, обратное направлению оси x). Штрихом показаны границы контрольного объема; сейчас нас не интересует их точное расположение. Эти границы обозначены буквами e и w.

Для рассматриваемой одномерной задачи предположим, что размеры контрольного объема в направлениях y и z равны единице. Таким образом, объем показанного контрольного объема равен $h\times1\times1$. Интегрируя (2.13) по контрольному объему, получаем

$$\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)_e-\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)_w+\int_w^e S dx=0 \qquad (2.14)$$

Если интерполировать температуру T между узлами линейной функцией, то из (2.14) получим:

$$\lambda_e\frac{T_E-T_P}{h}-\lambda_w\frac{T_P-T_W}{h}+\bar{S}h=0 \qquad (2.15)$$

Важным вопросом является аппроксимация источника. Часто источниковый член является функцией самой зависимой переменной T, и тогда желательно учесть эту зависимость при построении дискретного аналога. Однако формально можем учитывать только линейную зависимость, так как решение дискретных уравнений будет осуществляться, как увидим позже, с помощью методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Запишем среднее значение S в виде

$$\overline{S} = S_C + S_P T_P \tag{2.16}$$

где S_C представляет собой постоянную составляющую S, а S_P — коэффициент (очевидно, что S_P не есть значение S в точке P).

В результате получаем:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b \tag{2.17}$$

где

$$\begin{aligned} a_P &= \frac{\lambda_e}{h} + \frac{\lambda_w}{h} - S_P h = a_E + a_W - S_P h, \\ a_E &= \frac{\lambda_e}{h}, \quad a_W = \frac{\lambda_w}{h}, \quad b = S_C h \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.3. Основные правила, вытекающие из физического смысла метода контрольного объема

Стоит учесть некоторые правила, которые следуют из физического смысла метода контрольного объема [1].

1) Выражение потока через границу, общую для двух прилегающих контрольных объемов, при записи дискретных аналогов уравнения для этих объемов должно быть одним и тем же.

2) В большинстве из интересующих нас задач влияние значения зависимой переменной в точках, соседних с некоторой узловой, на значение в этой узловой точке обусловлено процессами конвекции и диффузии. Следовательно, увеличение значения в одной узловой точке должно, при прочих равных условиях, привести к увеличению (а не уменьшению) значения в соседней узловой точке. Тогда, как видно из уравнения (2.17), из

увеличения T_P при увеличении T_E следует, что коэффициенты a_P и a_E должны иметь одинаковый знак. Другими словами, в общем случае, описываемом уравнением (2.17), знаки коэффициентов перед значениями зависимой переменной в соседних точках a_E и a_W и коэффициента перед ее значением в центральной точке a_P должны быть одинаковыми.

3) В формуле (2.16) коэффициент S_P должен быть либо отрицательным, либо равным нулю.

Действительно, если бы S_P был положительным, физический процесс мог бы стать неустойчивым. Положительность S_P свидетельствует о росте источникового члена при увеличении T_P, а это, в свою очередь, может привести, если нет эффективного механизма отвода теплоты, к возрастанию T_P и т.д. С вычислительной точки зрения во избежание неустойчивостей и физически нереальных решений целесообразно сохранять S_P отрицательным.

4) Уравнение (2.17) выведено для одномерного случая. В общем случае удобно представить это уравнение в виде

$$a_P T_P = \sum a_{nb} T_{nb} + b \qquad (2.19)$$

где индекс nb обозначает соседние точки, и суммирование производится по всем соседним точкам.

Для случаев, когда дифференциальное уравнение удовлетворяется также при добавлении к зависимой переменной постоянной величины, необходимо, чтобы

$$a_P = \sum a_{nb} \qquad (2.20)$$