1.Обобщенное дифференциальное уравнение.

Основные уравнения, описывающие динамику вязкой жидкости, подчиняются некому обобщенному закону сохранения.

Уравнение энергии в декартовой системе координат имеет вид (см.глава 1):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j h)=\frac{dp}{dt}-\frac{\partial q_j}{\partial x_j}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (1.1)$$

С учетом представления плотности теплового потока в виде закона Фурье

$$q_i=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}, \qquad (1.2)$$

используя понятия дивергенции и градиента, а также того, что

$$\mathrm{grad}\ h=C_p\mathrm{grad}\ T\ , \qquad (1.3)$$

уравнение энергии можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)+\mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v} h)=\mathrm{div}\left(\frac{\lambda}{C_P}\mathrm{grad}\ h\right)+S_h \qquad (1.4)$$

где S_h - член, учитывающий работу сил внутренних напряжений

$$S_h=\frac{dp}{dt}+\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad (1.5)$$

Аналогично поступаем с уравнением количества движения в проекции, например, на продольную ось $x=x_1$. Проекция скорости на эту ось обозначается как $u=u_1$.

Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{i1})+\rho F_1, \qquad (1.6)$$

а компоненты тензора вязких напряжений определяются как

$$\tau_{i1} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{i1}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\delta_{i1}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{v} \tag{1.7}$$

Подставляя последнее выражение в (1.6), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} u) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\delta_{i1}\mu \operatorname{div} \boldsymbol{v}\right) + \rho F_1 - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.8}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} u) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_u \tag{1.9}$$

где S_u - член, учитывающий градиент давления, объемные силы и дополнительные вязкие силы

$$S_u = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\delta_{i1}\mu div\, \boldsymbol{v}\right) + \rho F_1 - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.10}$$

Таким образом, все уравнения динамики вязкой жидкости можно записать в обобщенном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Phi) + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v} \Phi) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \Phi) + S \tag{1.11}$$

где Γ - коэффициент, учитывающий переносные свойства (вязкость, теплопроводность, диффузии); S - источниковый член. Конкретный вид Γ и S зависит от смысла переменной Φ

Уравнение	Φ	Γ	S
Уравнение неразрывности	1	0	0
Уравнение количества движения в	u	μ	Формула (1.10)

проекции на ось x			
Уравнение энергии	h	$\frac{\lambda}{C_P}$	Формула (1.5)

В обобщенное дифференциальное уравнение входят четыре члена: нестационарный, конвективный, диффузионный и источниковый.

Такая форма записи основных уравнений называется консервативной. Если уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \qquad (1.12)$$

домножить на Φ и вычесть результат из уравнения (1.11), то получится обобщенное уравнение в неконсервативной форме

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \bullet \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad} \Phi) + S \qquad (1.13)$$

Задача, в которой физические величины зависят только от одной пространственной координаты, называется одномерной. Зависимость от двух пространственных координат приводит к двумерной задаче, а от трех — к трехмерной. Если задача не включает в себя зависимость от времени, она называется стационарной. В противном случае она называется нестационарной.

В двумерном случае уравнение (1.13) имеет вид

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + S \qquad (1.14)$$

Анализируя это уравнение, можно получить несколько предельных случаев.

1) Если конвективные и диффузионные члены равны нулю, получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{S}{\rho} \tag{1.15}$$

2) Если конвективные и источниковые члены равны нулю, получается уравнение параболического типа

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \tag{1.16}$$

3) Если диффузионные и источниковые члены равны нулю, получается уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \tag{1.17}$$

4) В стационарном случае, при отсутствии конвективных и источниковых членов, обобщенное уравнение является эллиптическим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=0 \tag{1.18}$$

5) В стационарном случае при использовании приближений пограничного слоя уравнение (1.14) принимает вид

$$\rho u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) \tag{1.19}$$

В такой форме это уравнение также приводится к параболическому типу с точки зрения продольной координаты.

В каждом из этих пяти случаев применяются разные численные методы решения. Отличаются и граничные условия.

В различных областях реальных течений в различные моменты времени определяющую роль могут играть разные члены обобщенного уравнения

(1.11). Еще в большей степени это утверждение относится ко всей системе уравнений динамики вязкого газа.

Поэтому выбор метода численной интерпретации лучше использовать не для всего уравнения в целом, а для отдельных его частей.

С этой точки зрения удобно использовать предложенную С.Патанкаром [1] трактовку свойств координат, как пространственных, так и временной.

Двухсторонней координатой называется координата, для которой протекание процессов в рассматриваемой точке зависит от условий как слева, так и справа по координатной линии от этой точки. В противоположном случае координата называется *односторонней*.

Рассмотрим одномерную стационарную теплопроводность в плоской стенке. На температуру в каждой точке стенки могут влиять изменения температуры, как на левой стороне стенки, так и на правой стороне.

Обычно пространственные координаты являются двухсторонними, время - всегда односторонняя координата. В течение нестационарного охлаждения твердого тела на значение температуры в данный момент времени может оказать влияние только то, что происходило перед этим моментом.

Математические термины параболический и эллиптический, используемые для классификации дифференциальных уравнений, соответствуют нашим вычислительным концепциям односторонней и двухсторонней координат. Первый термин означает одностороннее поведение, второй — двухстороннее.

Имело бы больше смысла определять задачи как параболические или эллиптические по данной координате. Таким образом, нестационарная задача теплопроводности, которую обычно называют параболической, на самом деле параболична по времени и эллиптична по пространственным координатам. Стационарная задача теплопроводности эллиптична по всем координатам. Двумерный пограничный слой параболичен по направленной вдоль течения координате и эллиптичен по поперечной координате.

Гиперболические задачи имеют в некотором роде одностороннее поведение, однако, не вдоль координатных направлений, а вдоль специальных линий, называемых характеристиками.