5. Основные уравнения динамики вязкой жидкости в различных системах координат.

5.1. Декартова система координат

Как уже указывалось, в декартовой системе координат нет различия между ковариантными и контравариантными компонентами вектора и тензора, а метрический тензор записывается в виде единичной матрицы.

В этом случае основные уравнения динамики вязкой жидкости имеют следующий вид.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{5.1}$$

Уравнение количества движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i u_j + \delta_{ij} p - \tau_{ji}) = \rho F_j, \quad j = 1,2,3 \tag{5.2}$$

Уравнение энергии

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho u_i \left(E + \frac{p}{\rho}\right) - u_j \tau_{ji} + q_i\right] = \rho F_j u_j \tag{5.3}$$

Напомним, что в этих уравнениях:

ρ - плотность; u_i - компоненты вектора скорости; p - давление; E - полная внутренняя энергия; F - плотность массовой силы.

В случае линейной вязкой жидкости эти уравнения дополняются выражениями для компонент тензора вязких напряжений τ_{ij} и вектора плотности теплового потока q_i:

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial u_m}{\partial x_m}, \tag{5.4}$$

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{5.5}$$

где μ - коэффициент динамической вязкости, λ - коэффициент теплопроводности.

Удельная внутренняя энергия e связана с полной - E соотношением:

$$e = E - \frac{u_i u_i}{2} \tag{5.6}$$

Для идеального газа справедливо:

$$p = \rho RT = (\gamma - 1) C_V T \rho = (\gamma - 1) e \rho \tag{5.7}$$

Здесь: T - температура, γ - показатель адиабаты, C_V - удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Полная энтальпия H и удельная энтальпия вводятся по формулам:

$$H = E + \frac{p}{\rho}, \tag{5.8}$$

$$h = H - \frac{u_i^2}{2} \tag{5.9}$$

Иногда удобнее использовать уравнение энергии в форме энтальпии. Оно получается из уравнения (5.3) с учетом (5.8) и (5.9), а также уравнения количества движения (5.2):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j h) = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{5.10}$$

5.2. Цилиндрическая система координат

В цилиндрической системе точка M задается координатами (r, θ, z):

$$\zeta^1 = r, \quad \zeta^2 = \theta, \quad \zeta^3 = z \tag{5.11}$$

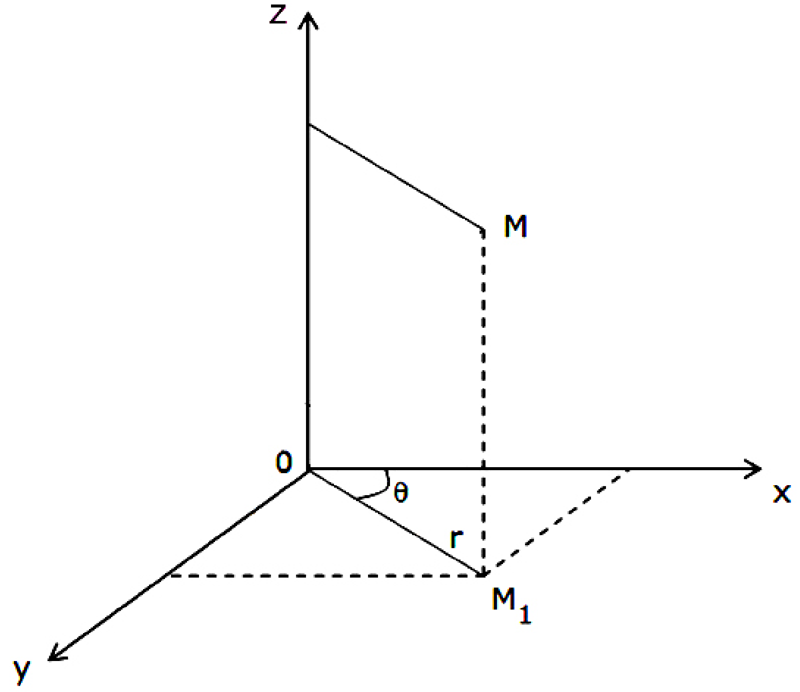

Рис.10. Цилиндрическая система координат.

Компоненты метрического тензора равны

$$g_{11}=1,\ g_{22}=r^2,\ g_{33}=1$$
$$g^{11}=1,\ g^{22}=\frac{1}{r^2},\ g^{33}=1 \tag{5.12}$$

Ненулевые символы Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=\frac{1}{r},\quad \Gamma^1_{22}=-r \tag{5.13}$$

1) Уравнение неразрывности

Физические компоненты скорости равны $u_i=u^i=v^i\sqrt{g_{ii}}$, т.е.:

$$u_r=v^1,\quad u_\theta=v^2 r,\quad u_z=v^3 \tag{5.14}$$

Отсюда

$$v^1=u_r,\quad v^2=\frac{u_\theta}{r},\quad v^3=u_z \tag{5.15}$$

Дивергенция скорости определяется формулой (3.58)

$$div\,\boldsymbol{v} \equiv \nabla_i v^i = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{5.16}$$

Таким образом, уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) + \frac{\rho u_r}{r} = 0 \tag{5.17}$$

2) Уравнение количества движения

Тензор вязких напряжений задается формулой (4.47):

$$\tau^{ki} = \mu\left[\left(g^{kj}\nabla_j v^i + g^{ij}\nabla_j v^k\right) - \frac{2}{3}div(\boldsymbol{v})\,g^{ki}\right] \tag{5.18}$$

Ковариантные производные вектора равны

$$\nabla_i v^k = \frac{\partial v^k}{\partial \zeta^i} + v^j \Gamma^k_{ji} \tag{5.19}$$

С учетом определения физических компонент вектора (5.15) получаем:

$$\tau^{11} = \frac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right], \tag{5.20}$$

$$\tau^{22} = \mu\frac{1}{r^2}\left[\frac{4}{3}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \eta^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{4}{3}\frac{1}{r}u_r - \frac{2}{3}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right], \tag{5.21}$$

$$\tau^{33} = \frac{2}{3}\mu\left[-\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + 2\frac{\partial u_z}{\partial z}\right], \tag{5.22}$$

$$\tau^{12} = \tau^{21} = \mu\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right)\right], \tag{5.23}$$

$$\tau^{13} = \tau^{31} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right), \tag{5.24}$$

$$\tau^{23} = \tau^{32} = \mu\frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right] \tag{5.25}$$

Введем физические компоненты тензора вязких напряжений:

$$\tau_{rr} = \tau^{11} g_{11} = \tau^{11} = \frac{2}{3}\mu\left[2\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] \tag{5.26}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau^{22} g_{22} = \tau^{22} r^2 = \frac{2}{3}\mu\left[-\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \eta^2} + u_r\right) - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] \tag{5.27}$$

$$\tau_{zz} = \tau^{33} g_{33} = \tau^{33} = \frac{2}{3}\mu\left[-\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + 2\frac{\partial u_z}{\partial z}\right] \tag{5.28}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \tau^{12}\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}} = \tau^{12} r = \mu\left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta\right)\right] \tag{5.29}$$

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \tau^{13}\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{33}} = \tau^{13} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) \tag{5.30}$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = \tau^{23}\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{33}} = \tau^{23} r = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \tag{5.31}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
&\tau^{11} = \tau_{rr}, \quad \tau^{12} = \frac{1}{r}\tau_{r\theta}, \quad \tau^{13} = \tau_{rz}, \\
&\tau^{21} = \frac{1}{r}\tau_{r\theta}, \quad \tau^{22} = \frac{1}{r^2}\tau_{\theta\theta}, \quad \tau^{23} = \frac{1}{r}\tau_{\theta z}, \\
&\tau^{31} = \tau_{zr}, \quad \tau^{32} = \frac{1}{r}\tau_{z\theta}, \quad \tau^{33} = \tau_{zz}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Ковариантные производные тензора равны:

$$\nabla_i \tau^{ik} = \frac{\partial \tau^{ik}}{\partial \eta^i} + \tau^{mk}\Gamma^i_{mi} + \tau^{im}\Gamma^k_{mi} \tag{5.33}$$

Рассмотрим уравнения для каждого значения индекса k.

$\underline{k=1}$: уравнение количества движения для компоненты скорости u_r

Компоненты $\nabla_i \tau^{ik}$:

$$\begin{aligned}
&\nabla_i \tau^{i1} = \nabla_1 \tau^{11} + \nabla_2 \tau^{21} + \nabla_3 \tau^{31} = \frac{\partial \tau^{11}}{\partial \eta^1} + \frac{\partial \tau^{21}}{\partial \eta^2} + \tau^{11}\frac{1}{r} - \tau^{22} r + \frac{\partial \tau^{31}}{\partial \eta^3} = \\
&= \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\tau_{r\theta}\right) + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}\right)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Компоненты $\nabla_i\left(\rho v^i v^k\right)$:

$$\nabla_i\left(\rho v^i v^1\right)=\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho u_\theta u_r)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_r)+\frac{1}{r}(\rho u_r u_r-\rho u_\theta u_\theta) \tag{5.35}$$

Градиент давления:

$$g^{i1}\nabla_i p=g^{11}\nabla_1 p=\frac{\partial p}{\partial r} \tag{5.36}$$

Таким образом, уравнение количества для компоненты u_r имеет вид:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_r)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_r+p-\tau_{rr})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho u_\theta u_r-\tau_{r\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_r-\tau_{zr})\\&+\frac{1}{r}(\rho u_r u_r-\rho u_\theta u_\theta-\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta})=\rho F_r\end{aligned} \tag{5.37}$$

$\underline{k=2}$: уравнение для u_θ

Компоненты $\nabla_i\tau^{ik}$:

$$\begin{aligned}&\nabla_i\tau^{i2}=\nabla_1\tau^{12}+\nabla_2\tau^{22}+\nabla_3\tau^{32}=\frac{\partial\tau^{12}}{\partial r}+\frac{\partial\tau^{22}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau^{32}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(2\tau^{12}+\tau^{21}\right)=\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\tau_{r\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2}\tau_{\theta\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\tau_{z\theta}+\frac{1}{r}\left(2\frac{1}{r}\tau_{r\theta}+\frac{1}{r}\tau_{r\theta}\right)=\\&=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\tau_{r\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}\right]\end{aligned} \tag{5.38}$$

Компоненты $\nabla_i\left(\rho v^i v^k\right)$:

$$\nabla_i\left(v^i v^2\right)=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(u_r u_\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(u_\theta u_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(u_z u_\theta)+\frac{1}{r}2u_r u_\theta\right] \tag{5.39}$$

Градиент давления:

$$g^{i2}\nabla_i p=g^{22}\nabla_2 p=\frac{1}{r^2}\frac{\partial p}{\partial\theta} \tag{5.40}$$

Уравнение для компоненты u_θ:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\theta)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_\theta-\tau_{r\theta})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho u_\theta u_\theta+p-\tau_{\theta\theta})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_\theta-\tau_{z\theta})\\&+\frac{2}{r}(\rho u_r u_\theta-\tau_{r\theta})=\rho F_\theta\end{aligned} \tag{5.41}$$

$\underline{k=3}$: уравнение для u_z

Компоненты $\nabla_i \tau^{ik}$:

$$\nabla_i \tau^{i3} = \nabla_1 \tau^{13} + \nabla_2 \tau^{23} + \nabla_3 \tau^{33} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \tau_{rz}\right) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \tag{5.42}$$

Компоненты $\nabla_i\left(\rho v^i v^k\right)$:

$$\nabla_i\left(\rho v^i v^3\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho u_r u_z\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho u_\theta u_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho u_z u_z\right) + \frac{1}{r}\rho u_r u_z \tag{5.43}$$

Градиент давления:

$$g^{i3}\nabla_i p = g^{33}\nabla_3 p = \frac{\partial p}{\partial z} \tag{5.44}$$

Уравнение для компоненты u_z :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_z\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\rho u_r u_z - \tau_{rz}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho u_\theta u_z - \tau_{\theta z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho u_z u_z + p - \tau_{zz}\right) \\ &+\frac{1}{r}\left(\rho u_r u_z - \tau_{rz}\right) = \rho F_z \end{aligned} \tag{5.45}$$

3) Уравнение энергии

Компоненты вектора $v_k \tau^{ki}$ обозначим:

$$A^i = v_k \tau^{ki} \tag{5.46}$$

Конкретные значения равны

$$\begin{aligned} A^1 &= v_1\tau^{11} + v_2\tau^{21} + v_3\tau^{31} = u_r\tau_{rr} + u_\theta\tau_{r\theta} + u_z\tau_{zr} \\ A^2 &= v_1\tau^{12} + v_2\tau^{22} + v_3\tau^{32} = \frac{1}{r}\left(u_r\tau_{r\theta} + u_\theta\tau_{\theta\theta} + u_z\tau_{z\theta}\right) \\ A^3 &= v_1\tau^{13} + v_2\tau^{23} + v_3\tau^{33} = u_r\tau_{rz} + u_\theta\tau_{\theta z} + u_z\tau_{zz} \end{aligned} \tag{5.47}$$

Общий вид уравнения энергии:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla_i\left[\rho v^i H + q^i - v_k\tau^{ki}\right] = \rho F^k v_k ,$$

где $H = \left(E + \dfrac{p}{\rho}\right)$ - полная энтальпия

Введем вектор f, контравариантные компоненты которого равны:

$$f^i = \rho v^i H + q^i - v_k \tau^{ki} \tag{5.48}$$

Дивергенция этого вектора равна

$$\nabla_i f^i = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{f_r}{r}, \tag{5.49}$$

где

$$\begin{aligned} f_r &= \rho u_r H + q_r - u_r \tau_{rr} - u_\theta \tau_{r\theta} - u_z \tau_{zr}, \\ f_\theta &= \rho u_\theta H + q_\theta - u_r \tau_{r\theta} - u_\theta \tau_{\theta\theta} - u_z \tau_{z\theta}, \\ f_z &= \rho u_z H + q_z - u_r \tau_{rz} - u_\theta \tau_{\theta z} - u_z \tau_{zz} \end{aligned} \tag{5.50}$$

Таким образом, уравнение энергии примет вид:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{f_r}{r} = \rho\left(F_r u_r + F_\theta u_\theta + F_z u_z\right), \tag{5.51}$$

Компоненты плотности теплового потока равны:

$$\begin{aligned} q_r &= q^1 = -\lambda g^{11} \nabla_1 T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \\ q_\theta &= q^2 r = \left(-\lambda g^{22} \nabla_2 T\right) r = -\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \\ q_z &= q^3 = -\lambda g^{33} \nabla_3 T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \tag{5.52}$$

Окончательно запишем основные уравнения в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) + \frac{\rho u_r}{r} = 0, \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_r + p - \tau_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta u_r - \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_r - \tau_{zr}) \\ &+ \frac{1}{r}(\rho u_r u_r - \rho u_\theta u_\theta - \tau_{rr} + \tau_{\theta\theta}) = \rho F_r \end{aligned}, \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_\theta - \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta u_\theta + p - \tau_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_\theta - \tau_{z\theta}) \\ &+ \frac{2}{r}(\rho u_r u_\theta - \tau_{r\theta}) = \rho F_\theta \end{aligned}, \tag{5.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_z)+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r u_z-\tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta u_z-\tau_{\theta z})+\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z u_z+p-\tau_{zz})$$
$$+\frac{1}{r}(\rho u_r u_z-\tau_{rz})=\rho F_z \quad , \qquad (5.56)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial f_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial f_z}{\partial z}+\frac{f_r}{r}=\rho(F_r u_r+F_\theta u_\theta+F_z u_z) \qquad (5.57)$$

Компоненты вектора f задаются формулами (5.50), компоненты тензора вязких напряжений – формулами (5.26)-(5.31), а компоненты вектора плотности теплового потока – формулами (5.52).

Кроме того, для идеального газа используется формула (5.7)

Упражнение. Вывести основные уравнения динамики вязкого газа в сферической системе координат.