4. **Основные уравнения динамики вязкой жидкости.**

4.1. Уравнение неразрывности.

Одним из основных законов ньютоновской механики является закон сохранения массы m любого индивидуального объема, состоящего из одних и тех же частиц среды. Масса такого объема определяется по формуле:

$$m = \iiint_V \rho dV \tag{4.1}$$

где ρ - плотность.

Закон сохранения массы для индивидуального объема сплошной среды можно, очевидно, теперь записать в виде

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = 0 \tag{4.2}$$

Применим формулу (3.72) из предыдущего раздела к (4.2):

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i\left(\rho v^i\right)\right] dV = 0 \tag{4.3}$$

В силу произвольности выбора объема V из (4.3) следует:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i\left(\rho v^i\right) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho v^i\right)}{\partial \eta^i} + \rho v^j \Gamma^i_{ji} = 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

Это и есть уравнение неразрывности.

4.2. Уравнение количества движения.

Теоретическая механика рассматривает в основном сосредоточенные, или концентрированные силы, т. е. конечные силами, действующие в точке. В механике сплошной среды мы встречаемся в основном с распределенными силами, т. е. действующими в каждой части объема V или на каждом элементе поверхности Σ сплошной среды, причем при стремлении бесконечно малого элемента объема или поверхности к нулю вектор действующих на него сил также стремится к нулю.

Эти распределенные силы можно разделить на две категории: объемные и поверхностные.

Обозначим через F главный вектор массовых сил, действующих на элемент массы Δm. Тогда плотность $\boldsymbol{F}$ массовой силы в данной точке есть:

$$\boldsymbol{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\mathrm{F}}{\Delta m} \tag{4.5}$$

Число различных видов массовых сил невелико. Это — сила тяжести $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}$ и вообще гравитационные силы, подчиняющиеся закону всемирного тяготения Ньютона; электромагнитные силы; силы инерции, которые приходится вводить при изучении движения в неинерциальных системах координат.

В механике сплошной среды основную роль играют не массовые, а поверхностные, т.е. распределенные по поверхности сплошной среды, силы. Так, например, если взять воду, налитую в сосуд, то на поверхности S соприкосновения воды со стенками сосуда будет, очевидно, наблюдаться силовое взаимодействие. Взяв элемент $d\sigma$ поверхности S, можно ввести элементарную поверхностную силу $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}d\sigma$, где $\boldsymbol{p} = \lim\limits_{\Delta\sigma \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta\sigma}$ - плотность поверхностных сил, действующих на площадку $d\sigma$.

Выделим в сплошной среде некоторый произвольный объем V и разобьем его сечением S на две части V_1 и V_2 (см.рис.8).

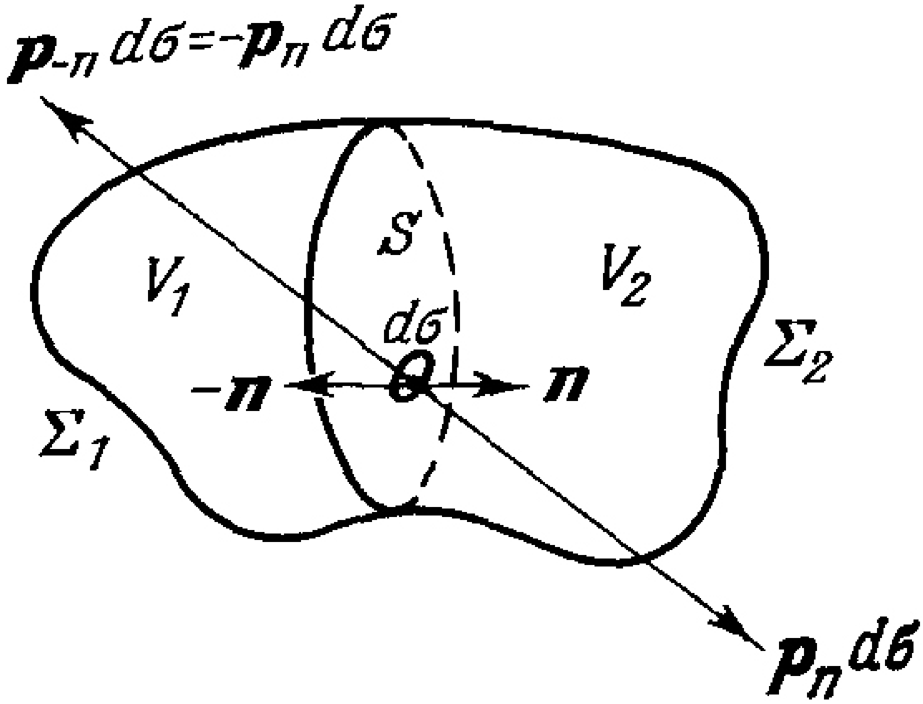

Рис.8. Силы внутренних напряжений.

Если мы будем рассматривать движение одной из частей V, например V_1, то при этом действие на нее второй части, т. е. V_2, необходимо заменить распределенными по S поверхностными силами. Сечение S можно проводить по-разному, и, очевидно, распределенные поверхностные силы будут на разных S различными.

Возьмем некоторую точку М внутри тела и рассмотрим в этой точке различные площадки $d\sigma$. Ориентацию этих площадок будем определять нормалью $\boldsymbol{n}$ к ним, а полную силу, действующую со стороны части среды в объеме V_2 на часть среды в объеме V_1 на площадке $d\sigma$ с нормалью $\boldsymbol{n}$, обозначим через $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_n d\sigma$, где $\boldsymbol{p}_n$ - конечный вектор. Вектор $\boldsymbol{p}_n$ можно рассматривать как поверхностную плотность силы взаимодействия разделенных частей вдоль площадки $d\sigma$. В общем случае $\boldsymbol{p}_n$ может зависеть от ориентации площадки $d\sigma$ и других ее геометрических свойств.

Направление нормали $\boldsymbol{n}$ будем выбирать всегда так, чтобы она была внешней по отношению к той части среды, на которую действует вводимая сила $\boldsymbol{p}_n d\sigma$.

Такого рода поверхностные силы можно вводить в любой точке сплошной среды, они называются *силами внутренних напряжений*.

В каждой точке М сплошной среды существует бесконечно много векторов $\boldsymbol{p}_n$, соответствующих бесконечному набору площадок, проходящих через эту точку. Однако между ними имеется универсальная, не зависящая от частных свойств движущейся среды, связь.

Основным динамическим уравнением движения материальной точки является второй закон Ньютона:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \mathrm{F} \tag{4.6}$$

Так как масса m точки постоянна, имеем:

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \mathrm{F} \tag{4.7}$$

Произведение массы на скорость $m\boldsymbol{v}$ называется количеством движения точки.

Можно обобщить это уравнение на случай движения конечного объема V сплошной среды, ограниченного поверхностью Σ:

$$\underset{(I)}{\frac{d}{dt}\int_V (\rho\boldsymbol{v})\,dV} = \underset{(II)}{\int_V \rho\boldsymbol{F}\,dV} + \underset{(III)}{\int_\Sigma \boldsymbol{p}_n d\sigma}, \tag{4.8}$$

где $Q = \int_V \rho\boldsymbol{v}dV$ - количество движения сплошной среды, занимающей объем V; член (II) - сумма внешних массовых сил, действующих на среду в объеме V, член (III) - сумма внешних поверхностных сил, действующих на среду в объеме V.

Уравнение (4.8) означает, что производная по времени количества движения объема V сплошной среды равняется сумме всех внешних действующих на него массовых и поверхностных сил. Выделяемый мысленно объем V является произвольным субстациональным подвижным деформируемым объемом, состоящим по определению из одних и тех же частиц среды.

С учетом того, что масса M выбранного объема не меняется, получаем:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \boldsymbol{v} dV = \frac{d}{dt}\int_M \boldsymbol{v} dm = \int_M \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} dm = \int_V \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} dV \tag{4.9}$$

Таким образом, уравнение количества движение можно представить в виде:

$$\int_V \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} dV = \int_V \rho \boldsymbol{F} dV + \int_\Sigma \boldsymbol{p}_n d\sigma \tag{4.10}$$

Остановимся теперь на выводе зависимости напряжений $\boldsymbol{p}_n$ от ориентации соответствующих площадок, взятых в данной точке, в случае непрерывных движений сплошной среды.

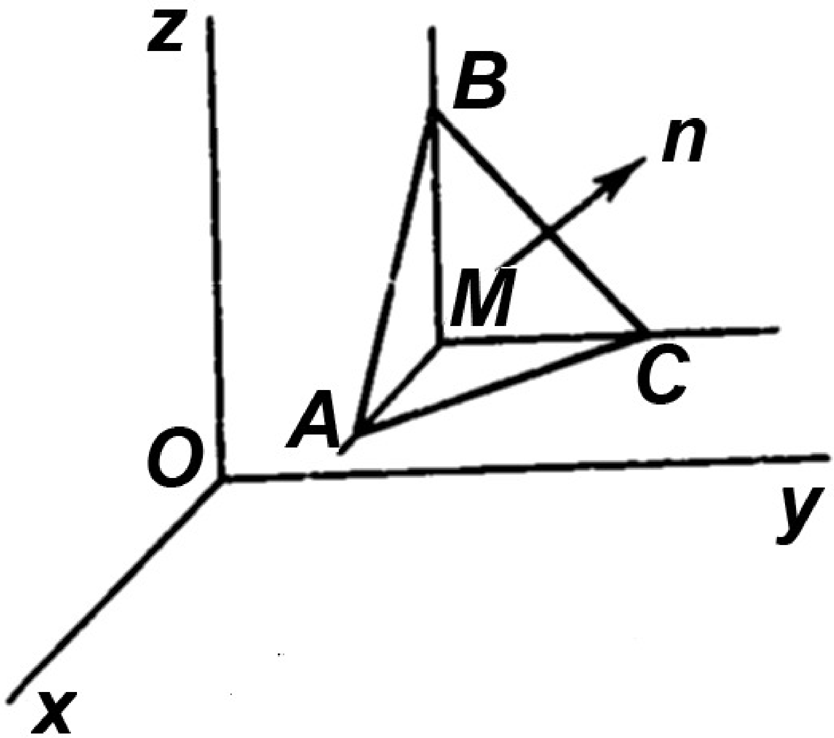

Рис.9 К свойству внутренних напряжений.

Возьмем произвольную точку M сплошной среды и проведем из нее направления, параллельные осям декартовой системы координат (рис.9). Отложим на них произвольные бесконечно малые отрезки $dx = MA$, $dy = MC$ и $dz = MB$ и рассмотрим объем V в виде построенного таким путем бесконечно малого тетраэдра $MABC$. Его грани MBC, MAB, MAC перпендикулярны к соответствующим осям координат, а грань ABC ориентирована произвольно. Ее ориентация определяется единичным вектором нормали

$$\boldsymbol{n} = \cos(nx)\boldsymbol{i} + \cos(ny)\boldsymbol{j} + \cos(nz)\boldsymbol{k} = n_i \mathbf{g}^i \tag{4.11}$$

Напряжения на площадках с нормалями $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}$ обозначим соответственно через $\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{p}^3, \boldsymbol{p}_n$.

Если стягивать этот тетраэдр в точку, то можно показать, что из уравнения количества движения следует, что между напряжениями должно выполняться следующее соотношение:

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}^1\cos(nx) + \boldsymbol{p}^2\cos(ny) + \boldsymbol{p}^3\cos(nz) = \boldsymbol{p}^i n_i \tag{4.12}$$

Из теоремы Остроградского-Гаусса в форме (3.70) следует, что сумму внешних поверхностных сил $\int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{p}_n d\sigma$, действующих на объем V сплошной среды, ограниченный поверхностью Σ, можно преобразовать в интеграл, взятый по объему:

$$\int\limits_{\Sigma}\boldsymbol{p}_n d\sigma = \int\limits_{\Sigma}\left[\boldsymbol{p}^1\cos(nx) + \boldsymbol{p}^2\cos(ny) + \boldsymbol{p}^3\cos(nz)\right]d\sigma = \int\limits_{V}\left(\frac{\partial\boldsymbol{p}^1}{\partial x} + \frac{\partial\boldsymbol{p}^2}{\partial y} + \frac{\partial\boldsymbol{p}^3}{\partial z}\right)dV \tag{4.13}$$

В формуле (4.12) векторы $\boldsymbol{p}^1, \boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{p}^3$ можно разложить по ковариантному базису. Например, $\boldsymbol{p}^1 = p^{11}\mathbf{g}_1 + p^{21}\mathbf{g}_2 + p^{31}\mathbf{g}_3$. Проекции нормали есть не что иное, как скалярное произведение $\mathbf{g}_i\bullet\boldsymbol{n}$. Таким образом, из (4.12) следует:

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}^i n_i = p^{ki}\mathbf{g}_k n_i = p^{ki}\mathbf{g}_k\left(\mathbf{g}_i\bullet\boldsymbol{n}\right) \tag{4.14}$$

Это равенство дает линейное (с коэффициентами p^{ij}) преобразование от компонент вектора $\boldsymbol{n}$ к компонентам вектора $\boldsymbol{p}_n$. Оно было получено с использованием ортогональной декартовой системы координат, и, следовательно, p^{ij} были определены в произвольных ортогональных декартовых системах координат. Равенство (4.14) является соотношением между векторами $\boldsymbol{p}_n$ и $\boldsymbol{n}$ и поэтому может быть написано в любой криволинейной системе координат. Отсюда следует, что не только в ортогональных декартовых осях, но и в произвольных криволинейных системах координат с помощью равенства (4.14) можно ввести величины p^{ij}, которые следует рассматривать как контравариантные компоненты тензора

$$P = p^{ki}\mathbf{g}_k\mathbf{g}_i \tag{4.15}$$

Этот тензор называется *тензором внутренних напряжений*. При этом в любой системе координат будет выполняться равенство

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{P} \bullet \boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}^i n_i \tag{4.16}$$

где $\boldsymbol{p}_n$ - напряжение на произвольной площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$, а n_i - ковариантные компоненты $\boldsymbol{n}$.

В уравнение количества движения (4.10) входит член $\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n d\sigma$. С учетом (4.16) и теоремы Гаусса – Остроградского получаем:

$$\int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n d\sigma = \int\limits_{\Sigma} \boldsymbol{p}^i n_i d\sigma = \int\limits_{V} \nabla_i \boldsymbol{p}^i dV \tag{4.17}$$

Подставляем полученное выражение в (4.10) и, в силу произвольности выбора объема *V*, получаем уравнение количества движения в виде:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \boldsymbol{F} + \nabla_i \boldsymbol{p}^i \tag{4.18}$$

где

$$\nabla_i \boldsymbol{p}^i = \frac{\partial \boldsymbol{p}^i}{\partial \zeta^i} + \boldsymbol{p}^j \Gamma^i_{ji} = \nabla_i p^{ki} \mathbf{g}_k = \left(\frac{\partial p^{ki}}{\partial \zeta^i} + p^{ji} \Gamma^k_{ji} + p^{kj} \Gamma^i_{ji} \right) \mathbf{g}_k \tag{4.19}$$

Напоминаем, что векторы $\boldsymbol{p}^i$ мы разложили по базису

$$\boldsymbol{p}^i = p^{ki} \mathbf{g}_k \tag{4.20}$$

Полная (субстанциональная) производная представляется в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + v^i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial v^k}{\partial t} \mathbf{g}_k + v^i \left(\frac{\partial v^k}{\partial \zeta^i} + v^j \Gamma^k_{ji} \right) \mathbf{g}_k = \left(\frac{\partial v^k}{\partial t} + v^i \nabla_i v^k \right) \mathbf{g}_k \tag{4.21}$$

Тогда в проекции на ковариантный базис уравнение количества движения представляется в виде:

$$\rho\frac{\partial v^k}{\partial t}+\rho v^i\nabla_i v^k=\rho F^k+\nabla_i p^{ki} \tag{4.22}$$

Если домножить уравнение неразрывности (4.4) на v^k

$$v^k\frac{\partial\rho}{\partial t}+v^k\nabla_i\left(\rho v^i\right)=0 \tag{4.23}$$

и сложить его с (4.22), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right)+\nabla_i\left(\rho v^i v^k\right)=\rho F^k+\nabla_i p^{ki} \tag{4.24}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right)+\nabla_i\left(\rho v^i v^k-p^{ki}\right)=\rho F^k \tag{4.25}$$

Такая форма уравнения количества движения называется консервативной.

Без использования символа ∇ те же операции приводят к:

$$\frac{\partial\left(\rho v^k\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho v^i v^k\right)}{\partial\zeta^i}+\rho v^i v^j\Gamma^k_{ji}+\rho v^j v^k\Gamma^i_{ji}=\rho F^k+\left(\frac{\partial p^{ki}}{\partial\zeta^i}+p^{ji}\Gamma^k_{ji}+p^{kj}\Gamma^i_{ji}\right) \tag{4.26}$$

Можно показать, что тензор напряжений симметричен, т.е. $p^{ki}=p^{ik}$. Это обстоятельство дает возможность записать уравнение количества движения (4.18) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})+\nabla\bullet(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{P})=\rho\boldsymbol{F} \tag{4.27}$$

где, как мы помним, $\boldsymbol{P}$ - тензор внутренних напряжения, а $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}$ - диадное произведение векторов скорости.

4.3. Понятие идеального газа.

Понятие идеального газа, казалось бы, достаточно тривиально. Однако, не все так уж просто. Дело в том, что существует некоторое расхождение в определении этого понятия у различных авторов.

Седов Л.И. в книге «Механика сплошной среды» определяет идеальный газ как «среду, в которой вектор напряжения $\boldsymbol{p}_n$ на любой площадке с нормалью $\boldsymbol{n}$ ортогонален площадке». В результате получаются следующие формулы для ковариантных и контравариантных компонент тензора напряжений:

$$p^{ki} = -pg^{ki}, \tag{4.28}$$

$$p_{ki} = -pg_{ki} \tag{4.29}$$

где p - давление.

Нетрудно видеть, что в этом случае тензор внутренних напряжений не зависит от вязкого трения.

С другой стороны, известно выражение, впервые полученное Максвеллом, по которому *вязкость идеального газа* определяется по формуле:

$$\mu = \frac{1}{3}\rho\overline{\mathrm{v}}\mathrm{L} \tag{4.30}$$

где ρ - плотность газа, $\overline{\mathrm{v}}$ - средняя скорость теплового движения молекул, L - средняя длина свободного пробега молекул.

Из этого выражения видно, что коэффициент вязкости не зависит от давления, так как произведение $\rho\mathrm{L}$ не зависит от давления.

Определение Седова противоречит и понятиям, введенным в ANSYS CFX, где рабочее тело «AIR as IDEAL GAS (Воздух как идеальный газ)» обладает вязкостью.

Поэтому в дальнейшем нам удобнее использовать несколько отличное от Седова Л.И. определение идеального газа.

Идеальный газ — математическая модель газа, в которой предполагается, что потенциальной энергией молекул можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией. Между молекулами не действуют силы притяжения или отталкивания, соударения частиц между собой и со стенками сосуда абсолютно упруги, а время взаимодействия между молекулами пренебрежимо мало по сравнению со средним временем между столкновениями.

В молекулярно-кинетической теории устанавливается следующее соотношение между средней кинетической энергией ε поступательного движения молекул и абсолютной температурой Т:

$$\varepsilon = \frac{3}{2}kT \tag{4.31}$$

где k - постоянная Больцмана.

Внутренняя энергия 1 моля идеального газа равна произведению ε на число Авогадро N_A:

$$U = \frac{3}{2}kN_AT = \frac{3}{2}R_\mu T , \tag{4.32}$$

где R_μ - универсальная газовая постоянная.

При изменении температуры на ΔT внутренняя энергия изменяется на величину

$$\Delta U = \frac{3}{2}R_\mu \Delta T = C_{V\mu}\Delta T \tag{4.33}$$

Коэффициент пропорциональности между ΔU и ΔT равен мольной теплоемкости $C_{V\mu} = \frac{3}{2} R_{\mu}$ при постоянном объеме.

Это соотношение хорошо подтверждается в экспериментах с газами, состоящими из одноатомных молекул (гелий, неон, аргон). Однако, для двухатомных (водород, азот) и многоатомных (углекислый газ) газов это соотношение не согласуется с экспериментальными данными. Причина такого расхождения состоит в том, что для двух- и многоатомных молекул средняя кинетическая энергия должна включать энергию не только поступательного, но и вращательного движения молекул.

В общем случае верная формула:

$$C_{V\mu} = \frac{i}{2} R_{\mu} \tag{4.34}$$

Где i - степень свободы молекулы. Одноатомная молекула имеет 3 поступательные степени свободы, «жесткая» двухатомная молекула имеет 5 степеней (3 поступательные и 2 вращательные), а многоатомная молекула – 6 степеней свободы (3 поступательные и 3 вращательные).

Соответственно мольная теплоемкость при постоянном давлении и показатель адиабаты равны:

$$C_{P\mu} = C_{V\mu} + R_{\mu} = \frac{i+2}{2} R_{\mu} \tag{4.35}$$

$$\gamma = \frac{C_{P\mu}}{C_{V\mu}} = \frac{i+2}{i} \tag{4.36}$$

Для идеального газа можно записать уравнение состояния

$$p = \rho R T \tag{4.37}$$

где

$$R = \frac{R_\mu}{M} \text{ -} \tag{4.38}$$

газовая постоянная, M - молекулярная масса газа.

4.4. Уравнения Эйлера для невязкого газа

В случае невязкого газа полагается, что ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений выражаются через один параметр – давление p:

$$p^{ki} = -pg^{ki}, \tag{4.39}$$

$$p_{ki} = -pg_{ki} \tag{4.40}$$

В этом случае уравнение количества движение (4.25) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right) + \nabla_i\left(\rho v^i v^k\right) = \rho F^k - g^{ki}\nabla_i\left(p\right) \tag{4.41}$$

Или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^k\right) + \nabla_i\left(\rho v^i v^k + g^{ki}p\right) = \rho F^k \tag{4.42}$$

4.5. Линейная вязкая жидкость

Вязкой жидкостью называется среда, в которой компоненты тензора напряжений представляются в виде

$$p^{ki} = -pg^{ki} + \tau^{ki}, \tag{4.43}$$

где

$$p = p\left(\rho, T, \ldots\right) \text{ -} \tag{4.44}$$

давление, а

$$\tau^{ki} = \varphi^{ki}\left(e_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}, T, ...\right) \text{ -} \tag{4.45}$$

тензор вязких напряжений, $e_{\alpha\beta}$ - компоненты тензора скоростей деформации, заданного формулой (3.64):

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\alpha} v_{\beta} + \nabla_{\beta} v_{\alpha}\right) \tag{4.46}$$

Чаще всего для тензора вязких напряжений используется линейная зависимость от тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \tau^{ki} &= 2\mu g^{k\alpha} g^{i\beta} e_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}\mu\, g^{ki} div\, \boldsymbol{v} = \\ &= \mu g^{k\alpha} g^{i\beta}\left(\nabla_{\alpha} v_{\beta} + \nabla_{\beta} v_{\alpha}\right) - \frac{2}{3}\mu\, g^{ki} div\, \boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{4.47}$$

Второй член в правой части этой формулы добавлен для того, чтобы скалярные инварианты тензоров слева и справа совпадали.

Уравнение количества движения для вязкой линейной жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^{k}\right) + \nabla_{i}\left(\rho v^{i} v^{k} + g^{ki} p\right) = \rho F^{k} + \nabla_{i}\tau^{ik} \tag{4.48}$$

В случае идеального газа в качестве зависимости (4.44) используется уравнение состояние в форме (4.37).

4.6. Уравнение энергии

Универсальное соотношение, выражающее собой закон сохранения энергии и следующее из первого начала термодинамики, можно представить в виде:

$$dE_{кин} + dU = dA + dQ \tag{4.49}$$

где dU - изменение внутренней энергии рассматриваемого тела, $dE_{кин}$ - изменение его кинетической энергии, dA - элементарная работа внешних макроскопических сил, dQ - элементарный приток тепла к телу извне.

Можно обобщить это уравнение на случай движения конечного объема V сплошной среды, ограниченного поверхностью Σ.

Полная энергия произвольного конечного объема V определяется следующим образом:

$$\int_V \rho\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + U\right)dV \tag{4.50}$$

Обозначим:

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + U = \frac{1}{2}v_k v^k + U \tag{4.51}$$

С учетом того, что масса M выбранного объема не меняется, получаем, что изменение полной энергии в единицу времени, т.е. ее производная по времени, равно:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho E dV = \frac{d}{dt}\int_M E dm = \int_M \frac{dE}{dt}dm = \int_V \rho\frac{dE}{dt}dV \tag{4.52}$$

Работа сил внутренних напряжений при перемещении границы выбранного объема на элементарное расстояние $d\boldsymbol{r}$ равна $\boldsymbol{p}_n \bullet d\mathbf{r} = \boldsymbol{p}_n \bullet \boldsymbol{v}dt$, а в единицу времени $\boldsymbol{p}_n \bullet \boldsymbol{v}$

С учетом (4.14), получаем:

$$\boldsymbol{p}_n \bullet \boldsymbol{v} = \left[p^{ki}\mathbf{g}_k\left(\mathbf{g}_i \cdot \boldsymbol{n}\right)\right]\bullet\left(v_j\mathbf{g}^j\right) = p^{ki}v_j\left(\mathbf{g}_i \cdot \boldsymbol{n}\right)\mathbf{g}_k \bullet \mathbf{g}^j = p^{ki}v_j\left(\mathbf{g}_i \cdot \boldsymbol{n}\right)g^{j\cdot}_{\cdot k} = v_k p^{ki} n_i \tag{4.53}$$

Нас интересует работа по внешней поверхности Σ объема V, т.е.

$$\int_{\Sigma} \boldsymbol{p}_n \bullet \boldsymbol{v} d\sigma = \int_{\Sigma} v_k p^{ki} n_i d\sigma = \int_{\Sigma} A^i n_i d\sigma \,, \tag{4.54}$$

где $A^i = v_k p^{ki}$

По теореме Гаусса — Остроградского:

$$\int_{\Sigma} A^i n_i d\sigma = \int_{V} \nabla_i A^i dV = \int_{V} \nabla_i \left(v_k p^{ki} \right) dV = \int_{V} div\left(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{P} \right) dV \tag{4.55}$$

Работа внешних массовых сил при перемещении на элементарное расстояние $\boldsymbol{dr}$ равна $\rho \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{dr} = \rho \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{v} dt$, а в единицу времени $\rho \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{v}$. Для всего объема V получаем:

$$\int_{V} \rho \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{v} dV = \int_{V} \rho F^k v_k dV \tag{4.56}$$

И наконец, приток тепла к объему V извне равен:

$$-\int_{\Sigma} \boldsymbol{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma = -\int_{V} div \boldsymbol{q} dV = -\int_{V} \nabla_i q^i dV \tag{4.57}$$

Знак «минус» обусловлен тем, что вектор нормали направлен от поверхности тела, а нас интересует приток тепла, а не отток.

Таким образом, закон сохранения энергии для конечного объема V сплошной среды имеет вид:

$$\int_{V} \rho \frac{dE}{dt} dV = \int_{V} div\left(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{P} \right) dV + \int_{V} \rho \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{v} dV - \int_{V} div \boldsymbol{q} dV \tag{4.58}$$

В силу произвольности выбора объема V:

$$\rho \frac{dE}{dt} = div\left(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{P} \right) + \rho \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{v} - div \boldsymbol{q} \tag{4.59}$$

В индексной записи уравнение сохранения энергии имеет вид:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \nabla_i \left(v^i E \right) = \nabla_i \left(v_k p^{ki} \right) + \rho F^k v_k - \nabla_i q^i \tag{4.60}$$

Домножим уравнение неразрывности (4.4) на E

$$E\frac{\partial\rho}{\partial t}+E\nabla_i\left(\rho v^i\right)=0, \tag{4.61}$$

сложим его с (4.60) и получим уравнение энергии в консервативной форме:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\nabla_i\left(\rho v^i E\right)=\nabla_i\left(v_k p^{ki}\right)+\rho F^k v_k-\nabla_i q^i \tag{4.62}$$

Для вязкой жидкости имеем:

$$p^{ki}=-pg^{ki}+\tau^{ki} \tag{4.63}$$

Откуда:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\nabla_i\left[\rho v^i\left(E+\frac{p}{\rho}\right)\right]=\nabla_i\left(v_k\tau^{ki}\right)+\rho F^k v_k-\nabla_i q^i \tag{4.64}$$

или

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}+\rho v^i\nabla_i E=\nabla_i\left(v_k\tau^{ki}\right)-\nabla_i\left(v^i p\right)+\rho F^k v_k-\nabla_i q^i \tag{4.65}$$

Для теплового потока в идеальном газе справедлива формула Фурье:

$$\boldsymbol{q}=-\lambda\cdot grad\left(T\right) \tag{4.66}$$

или

$$q^i=-\lambda g^{ij}\nabla_j T \tag{4.67}$$

Здесь λ - коэффициент теплопроводности, который, также как и коэффициент динамической вязкости μ, зависит только от температуры идеального газа.

Можно ввести понятия полной энтальпии газа H и удельной энтальпии h:

$$H=E+\frac{p}{\rho}, \tag{4.68}$$

$$h = U + \frac{p}{\rho} = H - \frac{1}{2} v_k v^k = E - \frac{1}{2} v_k v^k + \frac{p}{\rho} \tag{4.69}$$

Нетрудно получить различные формы уравнения энергии, записанные для этих величин:

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} + \rho v^i \nabla_i H = \rho F^k v_k + \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla_i \left(q^i - v_k \tau^{ki} \right), \tag{4.70}$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v^i \nabla_i h = \frac{dp}{dt} - \nabla_i q^i + \tau^{ki} \nabla_i v_k \tag{4.71}$$

где

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + v^i \nabla_i p \tag{4.72}$$