3. Элементы тензорного анализа

3.1. Ковариантная производная

Зададимся вопросом, как определить производные от вектора. Можно ли считать, что для вектора

$$\boldsymbol{w} = w^k \mathbf{g}_k$$

справедливо:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} \mathbf{g}_k \qquad ? \tag{3.1}$$

Оказывается, что, вообще говоря, это не так. Дело в том, что обычные производные от компонент вектора не определяют изменения самого вектора, так как при переходе от одной точки к другой изменяются и векторы базиса.

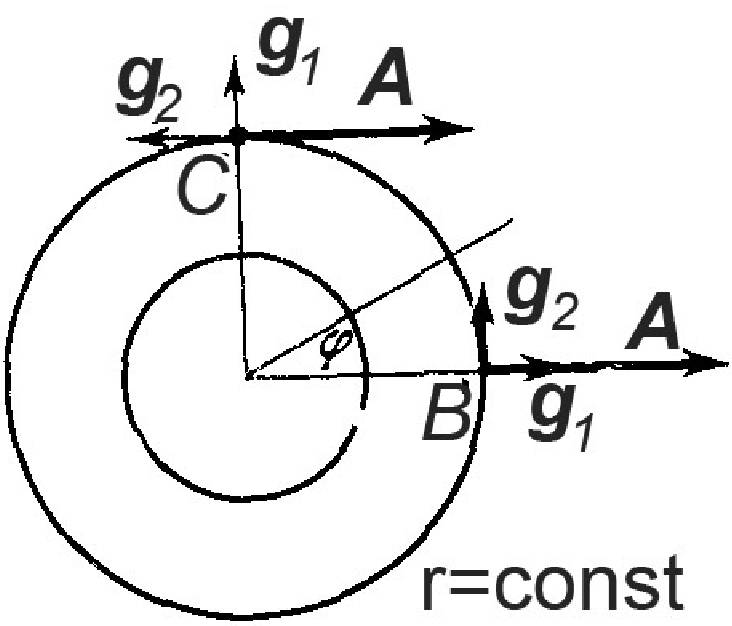

Рис.6. Полярная система координат на плоскости

В самом деле, возьмем, например, полярную систему координат на плоскости и рассмотрим поле постоянного как по величине, так и по направлению во всех точках плоскости вектора $\boldsymbol{A}$. Вектор $\boldsymbol{A}$ при переходе от точки к точке плоскости не меняется, и его производная, очевидно, должна равняться нулю. Координатами ζ^1 и ζ^2 будут радиус r и угол φ. Векторы базиса будут направлены следующим образом: $\mathbf{g}_1$ - по лучам, выходящим из начала координат, а $\mathbf{g}_2$ - по касательным к окружностям $r = const$. В разных точках плоскости $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ будут направлены по разному, и проекции постоянного вектора $\boldsymbol{A}$ на направления $\mathbf{g}_1$ и $\mathbf{g}_2$ в разных точках плоскости будут разными (см., например, точки В и С на рисунке), т. е. производные от компонент постоянного вектора не будут равны нулю. Таким образом, равенство (3.1) не выполняется.

На самом деле это равенство (3.1) выполняется только для декартовой системы координат, т.к. для нее так как базисные векторы $\mathbf{g}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{g}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{g}_3 = \mathbf{k}$ не изменяются от точки к точке.

В произвольной криволинейной системе координат $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ векторы базиса $\mathbf{g}_k$ переменны, и поэтому:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial \left(w^k \mathbf{g}_k \right)}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} \mathbf{g}_k + w^k \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} \tag{3.2}$$

Производная вектора базиса $\dfrac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i}$ представляет собой вектор, характеризующий свойства криволинейной системы координат. Из формулы (1.7) следует:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^k} \right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^i \partial \zeta^k} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \zeta^k} \tag{3.3}$$

Его можно разложить по тому же базису:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} = [ki, j]\mathbf{g}^j = \Gamma^j_{ki}\mathbf{g}_j \tag{3.4}$$

Компоненты разложения $[ki, j]$ и Γ^j_{ki} называются *символами Кристоффеля 1-го и 2-го рода*.

Таким образом,

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i}\mathbf{g}_k + w^k\Gamma^j_{ki}\mathbf{g}_j \tag{3.5}$$

Во втором члене этой формулы проводится двойное суммирование по индексам j и k. Меняем их местами и получаем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i}\mathbf{g}_k + w^j\Gamma^k_{ji}\mathbf{g}_k = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} + w^j\Gamma^k_{ji}\right)\mathbf{g}_k \tag{3.6}$$

Коэффициенты при $\mathbf{g}_k$ в этой формуле, зависящие от двух индексов, называются *ковариантными производными контравариантных компонент* вектора **w** и имеют специальное обозначение:

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial \zeta^i} + w^j\Gamma^k_{ji} \tag{3.7}$$

Таким образом

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i} = \nabla_i w^k \mathbf{g}_k \tag{3.8}$$

3.2. Свойства ковариантной производной

Можно легко доказать следующие полезные свойства.

1) В декартовой системе координат $\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \zeta^j} \equiv \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x_j} = 0$, $\Gamma^k_{ji} = 0$, и ковариантная производная совпадает с обычной:

$$\nabla_i w^k = \frac{\partial w^k}{\partial x_i} \tag{3.9}$$

2) Ковариантные производные образуют компоненты тензора.

Инвариантный объект

$$\boldsymbol{T} = \nabla_i w^k \mathbf{g}_k \mathbf{g}^i \tag{3.10}$$

является тензором, смешанные компоненты которого являются ковариантными производными.

3) Можно ввести ковариантные производные контравариантных компонент тензора $\boldsymbol{H}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial \left(H^{kj} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_j \right)}{\partial \zeta^i} = \frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_j + H^{kj} \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} \mathbf{g}_j + H^{kj} \mathbf{g}_k \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \zeta^i} = \\
&= \frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_j + H^{kj} \Gamma^m_{ki} \mathbf{g}_m \mathbf{g}_j + H^{kj} \mathbf{g}_k \Gamma^m_{ji} \mathbf{g}_m = \\
&= \frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_j + H^{mj} \Gamma^k_{mi} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_j + H^{km} \Gamma^j_{mi} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_j = \left(\frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} + H^{mj} \Gamma^k_{mi} + H^{km} \Gamma^j_{mi} \right) \mathbf{g}_k \mathbf{g}_j
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Величина

$$\nabla_i H^{kj} = \frac{\partial H^{kj}}{\partial \zeta^i} + H^{mj} \Gamma^k_{mi} + H^{km} \Gamma^j_{mi} \quad - \tag{3.12}$$

называется *ковариантной производной контравариантных компонент тензора* второго ранга $\boldsymbol{H}$.

4) Сумма ковариантных производных:

$$\nabla_i \left(u^k + v^k \right) = \nabla_i u^k + \nabla_i v^k \tag{3.13}$$

5) Произведение

$$\nabla_i \left(u^k v^k \right) = \left(\nabla_i u^k \right) \cdot v^k + u^k \nabla_i v^k \tag{3.14}$$

6) Ковариантная производная от ковариантных компонент вектора равна

$$\nabla_i w_k = \frac{\partial w_k}{\partial \zeta^i} - w_j \Gamma^j_{ki} \tag{3.15}$$

7) Заметим, что $\nabla_i w_k$ являются ковариантными, а $\nabla_i w^k$ смешанными компонентами одного и того же тензора

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \zeta^i}\mathbf{g}^i = \nabla_i w_k \mathbf{g}^k \mathbf{g}^i = \nabla_i w^k \mathbf{g}_k \mathbf{g}^i \tag{3.16}$$

Между этими компонентами тензора существует связь:

$$\nabla_i w^k = g^{kj} \nabla_i w_j \tag{3.17}$$

С другой стороны, для компонент вектора справедливо:

$$w^k = g^{kj} w_j \tag{3.18}$$

Отсюда следует, что

$$\nabla_i \left(g^{kj} w_j \right) = g^{kj} \nabla_i w_j \tag{3.19}$$

Т.е. компоненты метрического тензора g^{ij} и g_{ij}, несмотря на то, что они зависят от $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$, ведут себя по отношению к ковариантному дифференцированию как постоянные величины. Иначе говоря, не меняя результата, их можно вносить и выносить за знак ∇_i, т.е. $\nabla_i g^{jk} = 0$. Аналогично

$$\nabla_i g_{jk} = 0 \tag{3.20}$$

3.3. Свойства символов Кристоффеля

1) Символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^j_{ki} = \Gamma^j_{ik} \tag{3.21}$$

Это следует непосредственно из формулы (3.3).

2) Домножив скалярно выражения (3.4) на соответствующие базисные векторы, получим следующие формулы:

$$\Gamma_{ki}^{j} = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} \bullet \mathbf{g}^j, \tag{3.22}$$

$$[ki, j] = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} \bullet \mathbf{g}_j \tag{3.23}$$

3) Подставим в формулы (3.22) и (3.23) выражения базисных векторов через декартовы компоненты

$$\Gamma_{ki}^{j} = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} \bullet \mathbf{g}^j = \frac{\partial}{\partial \zeta^i}\left(\frac{\partial x_m}{\partial \zeta^k}\mathbf{i}_m\right) \bullet \left(\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_l}\mathbf{i}_l\right) = \frac{\partial^2 x_m}{\partial \zeta^i \partial \zeta^k}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_l}\mathbf{i}_m \bullet \mathbf{i}_l = \frac{\partial^2 x_m}{\partial \zeta^i \partial \zeta^k}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_m} \tag{3.24}$$

$$[ki, j] = \frac{\partial^2 x_m}{\partial \zeta^i \partial \zeta^k}\frac{\partial x_m}{\partial \zeta^j} \tag{3.25}$$

4) Продифференцируем компоненты метрического тензора:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \zeta^k} &= \frac{\partial}{\partial \zeta^k}\left(\mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_j\right) = \mathbf{g}_i \bullet \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \zeta^k} + \mathbf{g}_j \bullet \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \zeta^k} = [jk, m]\mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}^m + [ik, m]\mathbf{g}_j \bullet \mathbf{g}^m \\ &= [jk, i] + [ik, j]\end{aligned} \tag{3.26}$$

Из этой формулы следует важное соотношение:

$$[ij, k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial \zeta^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \zeta^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \zeta^k}\right) \tag{3.27}$$

Для доказательства этой формулы достаточно подставить соответствующие производные компонент метрического тензора, получаемые по формуле (3.26).

5) Из формулы (3.22) с учетом (2.41) следует:

$$\Gamma_{ki}^{j} = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} \bullet \mathbf{g}^j = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \zeta^i} \bullet \mathbf{g}_m g^{mj} = [ki, m]\, g^{mj} \tag{3.28}$$

Отсюда с учетом (3.27) выражаем символы Кристоффеля через компоненты метрического тензора:

$$\Gamma_{ki}^{j} = \frac{1}{2} g^{mj} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial \zeta^k} + \frac{\partial g_{km}}{\partial \zeta^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial \zeta^m} \right) \tag{3.29}$$

6) Символы Кристоффеля не являются компонентами какого-либо тензора. Это видно, например, из того, что в одном и том же пространстве они в декартовой системе координат равны нулю, а в криволинейной отличны от нуля. Очевидно, что компоненты тензора таким свойством обладать не могут.

Определим, как меняются символы Кристоффеля при переходе от одной системы координат $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ к другой - $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$. Из формулы (3.22) следует:

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}_{ij}^{k} &= \frac{\partial \mathbf{g}'_i}{\partial \eta^j} \bullet \mathbf{g}'^k = \frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\mathbf{g}_m \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^i} \right) \bullet \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^l} \mathbf{g}^l \right) = \frac{\partial^2 \zeta^m}{\partial \eta^j \partial \eta^i} \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^l} \mathbf{g}_m \bullet \mathbf{g}^l + \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^i} \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^l} \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial \eta^j} \bullet \mathbf{g}^l = \\ &= \frac{\partial^2 \zeta^m}{\partial \eta^j \partial \eta^i} \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} + \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^i} \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^l} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^j} \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial \zeta^n} \bullet \mathbf{g}^l = \frac{\partial^2 \zeta^m}{\partial \eta^j \partial \eta^i} \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^m} + \frac{\partial \eta^k}{\partial \zeta^l} \frac{\partial \zeta^m}{\partial \eta^i} \frac{\partial \zeta^n}{\partial \eta^j} \Gamma_{mn}^{l} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Очевидно, что символы Кристоффеля не преобразуются по правилам тензоров из-за наличия первого члена в правой части выражения (3.30).

7) Большой интерес представляет случай, когда в качестве системы координат $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$ используется декартова система координат $\{x_1, x_2, x_3\}$, для которой, как указывалось ранее, все символы Кристоффеля равны нулю, т.е.

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = 0, \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta^m}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^m} + \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^l} \frac{\partial \zeta^m}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta^n}{\partial x_j} \Gamma_{mn}^{l} = 0 \tag{3.32}$$

Умножая последнюю формулу на $\dfrac{\partial \zeta^p}{\partial x_k}$ (применяя таким образом суммирование по k), получаем:

$$\frac{\partial^2 \zeta^p}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial \zeta^m}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta^n}{\partial x_j} \Gamma^p_{mn} = 0 \tag{3.33}$$

Свертываем это выражение по i и j (т.е. полагаем $i = j$ и суммируем по i) и получаем:

$$\frac{\partial^2 \zeta^p}{\partial x_i^{\ 2}} = -\frac{\partial \zeta^m}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta^n}{\partial x_i} \Gamma^p_{mn} \tag{3.34}$$

С учетом (2.37):

$$\nabla^2 \zeta^p = -g^{mn} \Gamma^p_{mn} \tag{3.35}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^{\ 2}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \text{-} \tag{3.36}$$

- оператор Лапласа

И наконец, с учетом (3.24) получаем формулу

$$\nabla^2 \zeta^p = -g^{ki} \frac{\partial^2 x_q}{\partial \zeta^i \partial \zeta^k} \frac{\partial \zeta^p}{\partial x_q} \tag{3.37}$$

Если домножить эту формулу на $\frac{\partial x_j}{\partial \zeta^p}$ (суммирование по индексу p), то

$$\nabla^2 \zeta^p \frac{\partial x_j}{\partial \zeta^p} = -g^{ki} \frac{\partial^2 x_j}{\partial \zeta^i \partial \zeta^k} \tag{3.38}$$

Эта формула очень важна и в дальнейшем будет использоваться для построения конечно-объемных сеток.

8) Для ортогональной системы координат справедливо:

$$g_{ij} = 0 \ \text{при} \ i \neq j \tag{3.39}$$

Для ортогональной системы с учетом (3.29) получаем:

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{ij} &= \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}, \\
\Gamma^i_{jj} &= -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}, \\
\Gamma^i_{ii} &= \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

и

$$\Gamma^i_{jk} = 0 \text{ при } i \neq j,\ j \neq k, i \neq k \tag{3.41}$$

Отметим, что в формулах (3.40) суммирование повторяющимся индексам не проводится.

В частности, для цилиндрической системы координат, в которой

$$\xi = r, \quad \eta = \theta, \quad \zeta = z$$

(см. Рис. 4) справедливо: $g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = 1$ и $g^{11} = 1,\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = 1$. Отсюда

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2} 2r = \frac{1}{r} \\
\Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} 2r = -r
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Все остальные коэффициенты Кристоффеля равны нулю.

Для сферической системы координат:

$x^1 = r,\ x^2 = \varphi,\ x^3 = \theta$

Где r - расстояние до начала координат, а φ и θ — зенитный и азимутальный угол соответственно. Компоненты метрического тензора равны

$g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2 \sin^2(\varphi)$ и $g^{11} = 1,\ g^{22} = \frac{1}{r^2},\ g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2(\varphi)}$

Ненулевые символы Кристоффеля равны:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{21}^{2}=\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{1}}=\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{31}^{3}=\Gamma_{13}^{3}=\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{1}}=\frac{1}{r},\\
&\Gamma_{32}^{3}=\Gamma_{23}^{3}=\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{2}}=\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}\\
&\Gamma_{22}^{1}=-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{1}}=-r, \quad \Gamma_{33}^{1}=-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{1}}=-r\sin^{2}(\varphi),\\
&\Gamma_{33}^{2}=-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^{2}}=-\sin(\varphi)\cos(\varphi)
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

т.к.

$$
\frac{\partial g_{22}}{\partial x^{1}}=2r, \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^{1}}=2r\sin^{2}(\varphi), \quad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^{2}}=2r^{2}\sin(\varphi)\cos(\varphi)
$$

8) Свертывание формулы (3.29) по индексам j и k для *произвольной* системы координат дает следующую формулу:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ji}^{j}&=\frac{1}{2}g^{mj}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial\zeta^{j}}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial\zeta^{i}}-\frac{\partial g_{ji}}{\partial\zeta^{m}}\right)=\frac{1}{2}\left(g^{mj}\frac{\partial g_{im}}{\partial\zeta^{j}}+g^{mj}\frac{\partial g_{jm}}{\partial\zeta^{i}}-g^{mj}\frac{\partial g_{ji}}{\partial\zeta^{m}}\right)=\\
&=\frac{1}{2}\left(g^{mj}\frac{\partial g_{im}}{\partial\zeta^{j}}+g^{mj}\frac{\partial g_{jm}}{\partial\zeta^{i}}-g^{mj}\frac{\partial g_{im}}{\partial\zeta^{j}}\right)=\frac{1}{2}g^{mj}\frac{\partial g_{jm}}{\partial\zeta^{i}}
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Здесь использовалась симметрия матриц g^{mj}, g_{ji} и смена индексов суммирования:

$$
g^{mj}\frac{\partial g_{ji}}{\partial\zeta^{m}}=g^{jm}\frac{\partial g_{mi}}{\partial\zeta^{j}}=g^{mj}\frac{\partial g_{im}}{\partial\zeta^{j}}
$$

Без доказательства приведем еще одну полезную формулу:

$$
\Gamma_{ij}^{i}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial\zeta^{j}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\zeta^{j}}, \tag{3.45}
$$

где g - определитель матрицы g_{ij}

Заметим, что в формуле (3.45) подразумевается суммирование по индексу i.

В цилиндрической системе координат:

$$\sqrt{g} = r\,, \tag{3.46}$$

В сферической:

$$\sqrt{g} = r^2 \sin(\varphi) \tag{3.47}$$

3.4. **Дивергенция. Градиент. Тензор скоростей деформаций. Теорема Остроградского-Гаусса.**

В разделе 1 данной главы уже были введены понятия этих векторных функций для декартовой системы координат. Сделаем то же самое в произвольной системе координат.

1) Дивергенция.

Введем понятие дивергенции вектора скорости $\boldsymbol{v}$, контравариантные компоненты которого равны v^1, v^2, v^3. По определению инвариантная величина

$$div\, \boldsymbol{v} = \nabla_i v^i \tag{3.48}$$

называется дивергенцией вектора скорости.

В декартовой системе координат, в которой компоненты скорости равны u, v, w, имеем:

$$div\, \boldsymbol{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.49}$$

С механической точки зрения дивергенция скорости представляет собой скорость относительного изменения бесконечно малого индивидуального объема сплошной среды:

$$div\,\boldsymbol{v} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ V_0 \to 0}} \frac{V - V_0}{V_0 \Delta t} \tag{3.50}$$

Если представить ковариантную производную как некий вектор, заданный ковариантными компонентами в контравариантном базисе

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{g}^i \nabla_i\,, \tag{3.51}$$

то для дивергенции можно использовать представление в виде скалярного произведения:

$$div\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{v} \tag{3.52}$$

Действительно

$$\boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{v} = \left(\mathbf{g}^i \nabla_i\right)\bullet\left(v^j \mathbf{g}_j\right) = \nabla_i v^j \mathbf{g}^i \bullet \mathbf{g}_j = \nabla_i v^i \tag{3.53}$$

С учетом формулы (3.8) можно получить еще одно полезное представление дивергенции:

$$div\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{v} = \left(\mathbf{g}^i \nabla_i\right)\bullet\left(v^j \mathbf{g}_j\right) = \mathbf{g}^i \bullet \left(\nabla_i v^j \mathbf{g}_j\right) = \mathbf{g}^i \bullet \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \zeta^i} \tag{3.54}$$

Существует обобщение операции дивергенции на действие не только на векторы, но и на тензоры более высокого ранга:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\bullet\boldsymbol{T} &= \left(\mathbf{g}^i \nabla_i\right)\bullet\left(T^{jk} \mathbf{g}_j \mathbf{g}_k\right) = \nabla_i T^{jk} \left(\mathbf{g}^i\right)\bullet\left(\mathbf{g}_j \mathbf{g}_k\right) = \nabla_i T^{ik} \mathbf{g}_k \\ &= \left(\frac{\partial T^{ik}}{\partial \eta^i} + T^{mk}\Gamma^i_{mi} + T^{im}\Gamma^k_{mi}\right)\mathbf{g}_k \end{aligned} \tag{3.55}$$

Очевидно, что в общем случае, дивергенция понижает ранг тензора на 1.

Выражение для дивергенции любого вектора в произвольной системе координат можно теперь записать следующим образом с учетом (3.45):

$$\nabla_i v^i = \frac{\partial v^i}{\partial \zeta^i} + v^j \Gamma^i_{ji} = \frac{\partial v^i}{\partial \zeta^i} + v^j \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial v^i}{\partial \zeta^i} + v^i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \zeta^i} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} \frac{\partial v^i}{\partial \zeta^i} + v^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \zeta^i} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \left(v^i \sqrt{g} \right)}{\partial \zeta^i} \tag{3.56}$$

Напомним, что v^i являются компонентами вектора $\boldsymbol{v}$ при разложении его по векторам ковариантного базиса $\mathbf{g}_i$, которые не являются, вообще говоря, единичными векторами.

Для вектора скорости $\boldsymbol{v}$ можно написать формулу:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = v^i \mathbf{g}_i = \frac{u^1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{g}_1 + \frac{u^2}{\sqrt{g_{22}}} \mathbf{g}_2 + \frac{u^3}{\sqrt{g_{33}}} \mathbf{g}_3 = u^i \mathbf{e}_i = \\ = v^i \mathbf{g}_i = v^1 \sqrt{g_{11}} \mathbf{e}_1 + v^2 \sqrt{g_{22}} \mathbf{e}_2 + v^3 \sqrt{g_{33}} \mathbf{e}_3 \end{aligned}, \tag{3.57}$$

где

$\mathbf{e}_i = \dfrac{\mathbf{g}_{ii}}{\sqrt{g_{ii}}}$ - единичные векторы (суммирование по i отсутствует).

Если система координат ортогональная, то компоненты

$u^i = v^i \sqrt{g_{ii}}$

(суммирование по i отсутствует) равны проекциям скорости $\boldsymbol{v}$ на касательные к координатным линиям и называются физическими компонентами вектора скорости. Очевидно, что для ортогональных систем координат величины $u_i = v_i \sqrt{g^{ii}}$ (суммирование по i отсутствует) совпадают с введенными физическими компонентами u^i. Аналогично можно ввести физические компоненты любого вектора, например ускорения или градиента давления, и вообще тензора любого ранга.

С учетом вышесказанного, например, в цилиндрической системе координат дивергенция скорости выражается через физические компоненты следующим образом:

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(v^i\sqrt{g}\right)}{\partial\eta^i} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(v^r r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(v^\theta r\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(v^z r\right)}{\partial z}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(u^r r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(u^\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(u^z r\right)}{\partial z}\right] =$$
$$= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{3.58}$$

Для сферической системы координат:

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(v^i\sqrt{g}\right)}{\partial\eta^i} = \frac{1}{r^2\sin(\varphi)}\left[\frac{\partial\left(v^r r^2\sin(\varphi)\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(v^\varphi r^2\sin(\varphi)\right)}{\partial\varphi} + \frac{\partial\left(v^\theta r^2\sin(\varphi)\right)}{\partial\theta}\right] =$$
$$= \frac{1}{r^2\sin(\varphi)}\left[\frac{\partial\left(u^r r^2\sin(\varphi)\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{u^\varphi}{r} r^2\sin(\varphi)\right)}{\partial\varphi} + \frac{\partial\left(\frac{u^\theta}{r\sin(\varphi)} r^2\sin(\varphi)\right)}{\partial\theta}\right] =$$
$$= \frac{1}{r^2\sin(\varphi)}\left[\sin(\varphi)\frac{\partial\left(u^r r^2\right)}{\partial r} + r\frac{\partial\left(u^\varphi\sin(\varphi)\right)}{\partial\varphi} + r\frac{\partial u^\theta}{\partial\theta}\right] =$$
$$= \frac{\partial u^r}{\partial r} + 2\frac{u^r}{r} + \frac{\cos(\varphi)}{r\sin(\varphi)}u^\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial u^\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial u^\theta}{\partial\theta} \tag{3.59}$$

2) Градиент

Из определения ковариантной производной следует, что ковариантные производные от скалярной величины φ совпадают с обычными производными

$$\nabla_i\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^i} \tag{3.60}$$

и определяют вектор, который является вектором-градиентом скалярного поля φ.

Компоненты $\nabla_i\varphi$ являются ковариантными, т.е. градиент определяется формулой

$$\nabla\varphi = \mathbf{g}^i\nabla_i\varphi \tag{3.61}$$

Для получения контравариантных компонент этого вектора используем жонглирование индексами:

$$\nabla\varphi = \nabla_i\varphi\mathbf{g}^i = \mathbf{g}^i\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^i} = g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^i}\mathbf{g}_j = (\nabla\varphi)^j\,\mathbf{g}_j, \tag{3.62}$$

где $(\nabla\varphi)^j = g^{ij}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\zeta^i}$

Используя формулу (3.56), определяем *лапласиан (оператор Лапласа)* скалярной функции φ:

$$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = div\left(grad\ \varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\zeta^j}\left[(\nabla\varphi)^j\sqrt{g}\right] = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\zeta^j}\left[\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta^i}\right] \tag{3.63}$$

3) Тензор скоростей деформаций.

Симметричный тензор

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right) \tag{3.64}$$

называется тензором скоростей деформаций. Если поле скоростей $\boldsymbol{v}$ известно, то компоненты e_{ij} можно вычислить по формуле (3.64).

Тензор скоростей деформаций обладает следующим свойством: для него существуют так называемые главные оси. В этой системе он содержит только так называемые диагональные члены. В этой системе координат деформация объёма среды сводится лишь к растяжению вдоль главных осей. Например, объём жидкости, имевшей первоначально сферическую форму, с течением времени будет деформироваться в эллипсоид.

4) Теорема Гаусса — Остроградского и некоторые связанные с ними свойства.

Это формула, которая выражает поток векторного поля $\boldsymbol{A}$ через замкнутую поверхность S интегралом от дивергенции этого поля по объёму V, замкнутого под поверхностью.

$$\iint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}ds=\iiint\limits_V div\,\boldsymbol{A}dV \tag{3.65}$$

Под интегралами в формуле Гаусса – Остроградского как справа, так и слева стоят инвариантные, не зависящие от выбора системы координат величины. Если они известны в декартовой системе координат, то их легко вычислить в любой другой системе координат. А именно, пусть в любой системе ζ_1,ζ_2,ζ_3

$$\boldsymbol{A}=A^k\mathbf{g}_k,\quad \boldsymbol{n}=n_j\mathbf{g}^j \tag{3.66}$$

тогда

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=A^k n_j\mathbf{g}_k\cdot\mathbf{g}^j=A^k n_k \tag{3.67}$$

и

$$div\,\mathbf{A}=\nabla_i A^i \tag{3.68}$$

Теперь теорему Гаусса — Остроградского можно написать в следующем виде:

$$\iint\limits_S A^k n_k ds=\iiint\limits_V \nabla_i A^i dV\ , \tag{3.69}$$

который справедлив в произвольной криволинейной системе координат. Заметим, что число измерений пространства при выводе теоремы Гаусса —

Остроградского может быть произвольным. В механике и в физике эта теорема часто применяется для двумерных, трехмерных и четырехмерных областей.

Кроме того, так как в декартовой системе координат любые три величины *P, Q, R* можно трактовать как компоненты вектора, теорему Гаусса — Остроградского можно написать для любых трех непрерывных и дифференцируемых функций *P, Q, R* от x, y, z, а именно:

$$\iint\limits_S \left[P\cos(n,x)+Q\cos(n,y)+R\cos(n,z)\right]ds=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV \qquad (3.70)$$

5) Формула дифференцирования по времени интеграла, взятого по подвижному объему.

Пусть имеется произвольная функция $f(x,y,z,t)$, зависящая от координат точек пространства и от времени t. Рассмотрим интеграл

$$\iiint\limits_V f(x,y,z,t)\,dV$$

по подвижному объему *V*. Определим производную по времени от этого интеграла. При этом учитываем тот факт, что от времени *t* зависит не только подынтегральная функция, но и область интегрирования *V*.

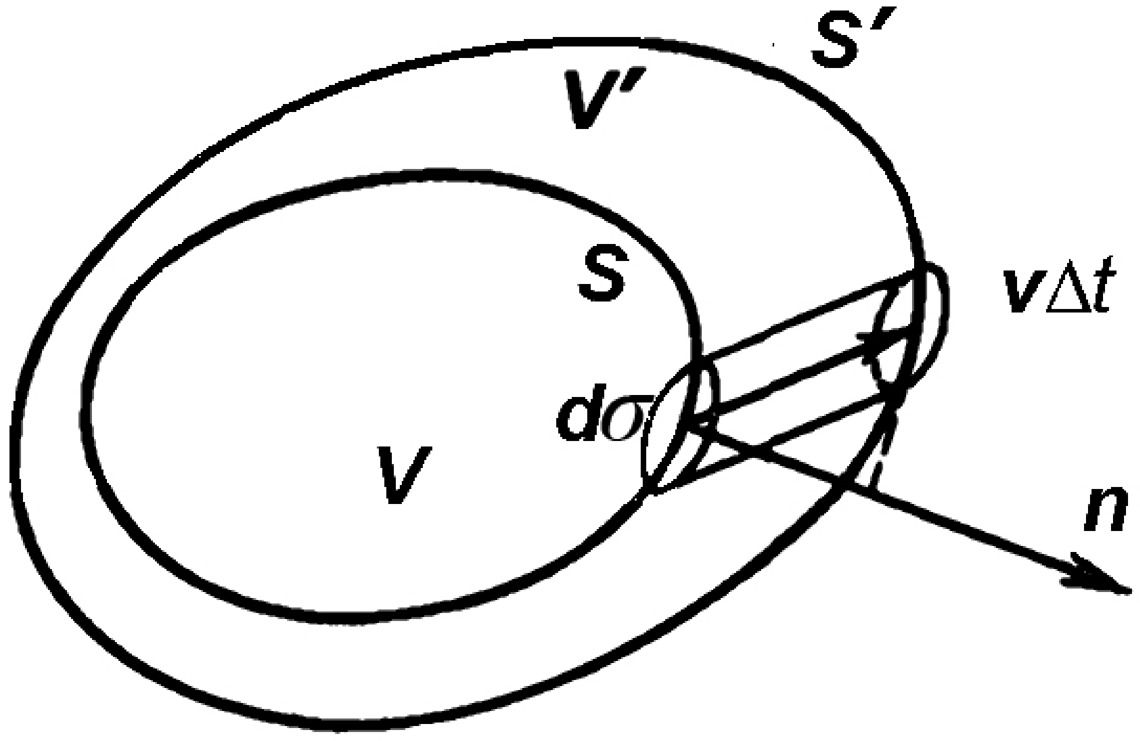

Рис.7. К выводу формулы для дифференцирования интеграла, взятого по подвижному объему

Выберем в движущейся среде в момент времени t индивидуальный объем V сплошной среды, ограниченный поверхностью S. В каждой точке поверхности S выберем внешний по отношению к V единичный вектор нормали $\boldsymbol{n}$. В момент $t+\Delta t$ этот объем перейдет в объем V', а поверхность S - в поверхность S', ограничивающую V' (см. рис. 7).

По определению производной:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\iiint_V f(x,y,z,t)\,dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\iiint_{V'} f(x,y,z,t+\Delta t)\,dV - \iiint_V f(x,y,z,t)\,dV}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\iiint_V \left[f(x,y,z,t+\Delta t) - f(x,y,z,t)\right]dV + \iiint_{V'-V} f(x,y,z,t+\Delta t)\,dV}{\Delta t} = \\
&= \iiint_V \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}\,dV + \iint_S f(x,y,z,t)\,v_n\,d\sigma
\end{aligned} \tag{3.71}$$

т.к. объем $V' - V$ складывается объемов элементарных цилиндров

$$dV = v_n d\sigma \Delta t\,,$$

а при $\Delta t \to 0$ поверхность S' стягивается к поверхности S и

$$f\left(x, y, z, t + \Delta t\right) \to f\left(x, y, z, t\right)$$

Применим ко второму члену в правой части выражения (3.71) формулу Гаусса — Остроградского (3.69), рассматривая вектор $\boldsymbol{A} = f\boldsymbol{V}$.

В результате получаем следующую формулу:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_V f\left(x, y, z, t\right) dV = \iiint\limits_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i\left(fv^i\right)\right] dV \qquad (3.72)$$

Подынтегральное выражение можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_i\left(fv^i\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f + f \nabla_i v^i = \frac{df}{dt} + f \nabla_i v^i \qquad (3.73)$$

где

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \nabla_i f \ \ - \qquad (3.74)$$

полная производная величины f в произвольной системе координат.

Отсюда получается еще одна формула для рассматриваемой производной

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_V f\left(x, y, z, t\right) dV = \iiint\limits_V \left[\frac{df}{dt} + f \nabla_i v^i\right] dV \qquad (3.75)$$