2. Элементы тензорного исчисления

В предыдущих разделах были введены в рассмотрение некоторые векторы, например, скорость $\boldsymbol{v}$, перемещение $d\boldsymbol{r}$. Что же такое вектор? Вектор не скаляр, но в то же время, как и скаляр, является инвариантом, т.е. не зависящим от выбора системы координат, объектом.

Определяя вектор, часто говорят, что это — три числа, называемые компонентами вектора, преобразующиеся при переходе от одной системы координат к другой определенным образом. Однако, это определение недостаточно, так как вектор всегда задается в определенном базисе и, задавая вектор его компонентами, всегда надо указывать базис, в котором они заданы.

Давайте рассмотрим, как же меняются компоненты вектора при переходе от одного базиса к другому.

2.1. Преобразования координат

Рассмотрим наряду с системой координат $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ произвольную криволинейную систему координат $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$. Законы движения можно рассматривать как относительно системы $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$, так и относительно $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$. Между этими двумя системами существует соответствие:

$$\zeta^i = \zeta^i\left(\eta^1, \eta^2, \eta^3\right), \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.1}$$

Таким образом, имеется 3 функции, зависящие от 3-х аргументов. Для определения дифференциалов этих функций применяются обычные формулы:

$$\begin{aligned}
d\zeta^1 &= \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^1}d\eta^1 + \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^2}d\eta^2 + \frac{\partial\zeta^1}{\partial\eta^3}d\eta^3 \\
d\zeta^2 &= \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^1}d\eta^1 + \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^2}d\eta^2 + \frac{\partial\zeta^2}{\partial\eta^3}d\eta^3 \\
d\zeta^3 &= \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^1}d\eta^1 + \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^2}d\eta^2 + \frac{\partial\zeta^3}{\partial\eta^3}d\eta^3
\end{aligned} \tag{2.2}$$

или

$$d\zeta^i = \frac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j}d\eta^j \tag{2.3}$$

где по j идет суммирование от 1 до 3, а i пробегает значения 1,2, 3, что в дальнейшем не будет указываться, но будет подразумеваться.

Напомним, что $\{d\zeta^1, d\zeta^2, d\zeta^3\}$ можно рассматривать как компоненты элементарного перемещения $d\boldsymbol{r}$ в базисе $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$, то есть, справедлива формула разложения:

$$d\boldsymbol{r} = \mathbf{g}_j d\zeta^j \tag{2.4}$$

Этот же вектор $d\boldsymbol{r}$ можно разложить и в новом базисе $\{\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3\}$, который соответствует новой системе координат $\{\eta^1, \eta^2, \eta^3\}$:

$$d\boldsymbol{r} = \mathbf{g}'_j d\eta^j \tag{2.5}$$

Формулы (2.2) или (2.3) дают связь приращений координат $d\zeta^i$ и $d\eta^j$ вблизи любой заданной точки. Производные $\dfrac{\partial\zeta^i}{\partial\eta^j}$ образуют матрицу размером (3×3), которую мы обозначим через $\mathbf{A}$. Введем обозначения:

$$a^{i\bullet}_{\bullet j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} \tag{2.6}$$

$$\left\| a^{i\bullet}_{\bullet j} \right\| = \mathbf{A} \tag{2.7}$$

При таком обозначении важно расположение индексов: верхний индекс соответствует номеру строки матрицы, нижний - номеру столбца.

Считаем, что между двумя системами координат существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. определитель матрицы **A** не равен нулю и существует обратная ей матрица **B**, с помощью которых компоненты $d\eta^1, d\eta^2, d\eta^3$ выражаются через компоненты $d\zeta^1, d\zeta^2, d\zeta^3$:

$$d\eta^j = \frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^i} d\zeta^i \tag{2.8}$$

Соответствующие компоненты матрицы обозначаются как

$$b^{j\bullet}_{\bullet i} = \frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^i} \tag{2.9}$$

$$\left\| b^{i\bullet}_{\bullet j} \right\| = \mathbf{B} \tag{2.10}$$

По правилам умножения матриц получаем:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a^{i\bullet}_{\bullet j} b^{j\bullet}_{\bullet k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^j}{\partial \zeta^k} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \zeta^k} = \delta^{i\bullet}_{\bullet k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где

$$\delta^{i\bullet}_{\bullet k} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \text{ - символы Кронекера} \tag{2.12}$$

Таким образом, матрицы **A** и **B** действительно взаимно обратные.

Теперь получим формулы, с помощью которых векторы нового базиса $\{\mathbf{g}'_1, \mathbf{g}'_2, \mathbf{g}'_3\}$ могут быть выражены через векторы базиса $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$. Для этого достаточно воспользоваться определением векторов базиса (см. формулу (1.7)), из которого следует:

$$\mathbf{g}'_j = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta^j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^i}\frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} = \mathbf{g}_i \frac{\partial \zeta^i}{\partial \eta^j} = a^{i\cdot}_{\cdot j}\mathbf{g}_i \tag{2.13}$$

Для новых компонент вектора $d\boldsymbol{r}$ согласно (2.8) имеем:

$$d\eta^j = b^{j\cdot}_{\cdot i} d\zeta^i \tag{2.14}$$

Таким образом, переход к новому базису осуществляется с помощью прямой матрицы **A**, а переход к новым компонентам - с помощью обратной матрицы **B**.

Введем определение.

Величины, преобразующиеся аналогично векторам базиса $\mathbf{g}_j$ (по формуле (2.13) с помощью прямой матрицы **A**, называются *ковариантными*. Величины, преобразующиеся аналогично компонентам $d\boldsymbol{r}$ (формула (2.14)) с помощью обратной матрицы **B**, называются *контравариантными*. Подчеркнем, что преобразования, образующие ковариантные и контравариантные величины, являются взаимно обратными.

Соответственно, компоненты $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ называются *контравариантными компонентами* вектора $d\boldsymbol{r}$, а базис $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ называется *ковариантным базисом*.

2.2. Определение вектора.

По примеру элементарного перемещения $d\mathbf{r}$, которое имеет в базисе $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ компоненты $d\zeta^1, d\zeta^2, d\zeta^3$, введем объект $\boldsymbol{A}$, который представляется через базис по формуле аналогичной (2.4):

$$\boldsymbol{A} = A^i \mathbf{g}_i \tag{2.15}$$

Его компоненты при преобразовании координат преобразуются как компоненты $d\boldsymbol{r}$ (см. формулу (2.14))

$$A'^j = b^{j\cdot}_{.i} A^i \tag{2.16}$$

Такой объект $\boldsymbol{A}$, инвариантный относительно преобразований координат:

$$\boldsymbol{A} = A^i \mathbf{g}_i = A'^j \mathbf{g}'_j \tag{2.17}$$

называется вектором, а компоненты A^j являются контравариантными компонентами этого вектора.

Вектор $\boldsymbol{A}$ может иметь любую геометрическую или физическую природу, но через векторы базиса он всегда определяется разложением (2.17), где числа A_j зависят от системы координат. Векторы базиса $\mathbf{g}_j$ управляют числами A_j и создают новый объект — вектор $\boldsymbol{A}$.

2.3. Понятие тензора.

Возникает вопрос, нельзя ли по аналогии с вектором ввести какие-то более сложные объекты, используя подход, описанный выше. Прежде всего, введем понятие диадного произведения двух векторов.

Матричное умножение вектора-столбца справа на вектор-строку даёт их диадное или тензорное произведение:

$$\boldsymbol{ab} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b^1, b^2, b^3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{pmatrix} \qquad (2.18)$$

Другое встречающееся в литературе обозначение диадного проиведения - $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$.

Диадное произведение линейно по каждому из сомножителей: если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ суть скаляры, то

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})(\gamma\boldsymbol{c} + \delta\boldsymbol{e}) = \alpha\gamma\boldsymbol{ac} + \alpha\delta\boldsymbol{ae} + \beta\gamma\boldsymbol{bc} + \beta\delta\boldsymbol{be} \qquad (2.19)$$

Диадное произведение подчиняется свойству дистрибутивности, но не подчиняется свойству коммутативности, т.е.

$$\boldsymbol{ab} \neq \boldsymbol{ba} \qquad (2.20)$$

По аналогии можно ввести диадные произведения векторов ковариантного базиса $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{g}_1\mathbf{g}_1, & \mathbf{g}_1\mathbf{g}_2, & \mathbf{g}_1\mathbf{g}_3, \\ \mathbf{g}_2\mathbf{g}_1, & \mathbf{g}_2\mathbf{g}_2, & \mathbf{g}_2\mathbf{g}_3, \\ \mathbf{g}_3\mathbf{g}_1, & \mathbf{g}_3\mathbf{g}_2, & \mathbf{g}_3\mathbf{g}_3 \end{array}$$

Компоненты диадных произведений $\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$ в соответствующей им системе координат можно записать в виде матриц, состоящих из одной единицы и остальных нулей. Например, компоненты $\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$ образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.21)$$

Диадные произведения векторов базиса $\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$, так же как и сами векторы базиса $\mathbf{g}_i$, зависят от системы координат. Формулы преобразования величин $\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$ легко получить, зная формулы преобразования $\mathbf{g}_i$ (2.13) и пользуясь свойством линейности диадного произведения. Эти формулы имеют вид:

$$\mathbf{g}'_m\mathbf{g}'_k = a^{i\bullet}_{\bullet m}a^{j\bullet}_{\bullet k}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \tag{2.22}$$

Всевозможные линейные комбинации диадных произведений образуют линейное пространство, его элементы называются *тензорами второго ранга*. Базисом в этом пространстве служат диадные произведения $\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$.

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ записать через компоненты по формуле (2.15), то диадное произведение выражается базис $\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$:

$$\boldsymbol{ab} = a^i b^j \mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \tag{2.23}$$

где T^{ij} можно рассматривать как компоненты некоторого объекта $\boldsymbol{T}$ в базисе $\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$.

Потребуем, чтобы объект $\boldsymbol{T}$ был инвариантен относительно преобразования системы координат, т.е.

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = T'^{mk}\mathbf{g}'_m\mathbf{g}'_k, \tag{2.24}$$

Подставляем в эту формулу выражение для нового базиса (2.22):

$$T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = a^{i\bullet}_{\bullet m}a^{j\bullet}_{\bullet k}T'^{mk}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$$

Домножив это выражение на $b^{q\bullet}_{\bullet j}b^{p\bullet}_{\bullet i}$, с учетом (2.11) получим:

$$T'^{mk} = b^{m\bullet}_{\bullet j}b^{k\bullet}_{\bullet i}T^{ij} \tag{2.25}$$

Таким образом, для обеспечения инвариантности при замене системы координат компоненты объекта $\boldsymbol{T}$ должны преобразовываться по формуле (2.25).

Инвариантный объект $\boldsymbol{T} = T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$ называется *тензором второго ранга* или второй валентности. Рангом или валентностью тензора называется число индексов его компонент. Очевидно, вектор есть тензор первого ранга.

Компоненты тензора T^{ij} преобразуются контравариантным образом и называются *контравариантными компонентами тензора*.

Как и в случае вектора $\boldsymbol{A}$, инвариантность тензора $\boldsymbol{T}$ обеспечивается взаимообратностью преобразований диадных произведений (2.22) и компонент тензора (2.25).

Как следует из (2.20), вообще говоря, $T^{ij} \neq T^{ji}$. Если же

$$T^{ij} = T^{ji}, \tag{2.26}$$

то такой тензор называется симметричным. Тензор, для которого

$$T^{ij} = -T^{ji}, \tag{2.27}$$

называется антисимметричным.

Тензоры одинакового ранга можно складывать и умножать на число. Пользуясь правилами сложения и умножения тензоров на число, любому тензору второго ранга $\boldsymbol{T} = T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j$ можно поставить в соответствие симметричный тензор

$$T_O = \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \tag{2.28}$$

и антисимметричный тензор

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(T^{ij} - T^{ji}\right)\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j \tag{2.29}$$

2.4. Контравариантный базис

В предыдущем разделе было введено понятие контравариантного базиса, заданного формулами (1.23), (1.29). Это понятие было введено без объяснения названия. Проверим, выполняются ли правило контравариантности для этого базиса.

Из (1.29) следует, что

$$\mathbf{g}^k = \frac{\partial \zeta^k}{\partial x_j}\mathbf{i}_j, \quad k = 1,2,3, \tag{2.30}$$

$$\mathbf{g}'^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\mathbf{i}_j, \quad i = 1,2,3 \tag{2.31}$$

Преобразуя (2.31), получаем:

$$\mathbf{g}'^i = \frac{\partial \eta^i}{\partial x_j}\mathbf{i}_j = \frac{\partial \eta^i}{\partial \zeta^k}\frac{\partial \zeta^k}{\partial x_j}\mathbf{i}_j = b^{i\bullet}_{\bullet k}\frac{\partial \zeta^k}{\partial x_j}\mathbf{i}_j = b^{i\bullet}_{\bullet k}\mathbf{g}^k, \quad i = 1,2,3 \tag{2.32}$$

Отсюда следует, что векторы базиса $\left\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\right\}$, преобразующиеся с помощью обратной матрицы **B**, являются *контравариантными*.

2.5. Метрический тензор

В приведенных выше рассуждениях нигде не использовалось понятие длины. Для определения длины вектора достаточно определить скалярные произведения векторов базиса

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_j, \tag{2.33}$$

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \bullet \mathbf{g}^j \tag{2.34}$$

Нетрудно показать, что матрицы g_{ij} и g^{ij} являются взаимно обратными.

Кроме того, из формулы (2.32) следует, что

$$g'^{km} \equiv \mathbf{g}'^k \bullet \mathbf{g}'^m = \left(b^{k\bullet}_{\bullet i}\mathbf{g}^i\right)\bullet\left(b^{m\bullet}_{\bullet j}\mathbf{g}^j\right) = b^{k\bullet}_{\bullet i} b^{m\bullet}_{\bullet j}\mathbf{g}^i \bullet \mathbf{g}^j = b^{k\bullet}_{\bullet i} b^{m\bullet}_{\bullet j} g^{ij} \tag{2.35}$$

Сравнивая это выражение с формулой (2.25), получаем, что матрица g^{ij} состоит их контравариантных компонентов некоторого тензора.

Назовем этот тензор *метрическим тензором* $\mathbf{g}$.

Из определений базисных векторов $\mathbf{g}_i$ (1.7) и $\mathbf{g}^j$ (1.29) следует, что:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_j = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}\frac{\partial x_m}{\partial \zeta^i}\mathbf{i}_k \bullet \mathbf{i}_m = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}\frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}, \tag{2.36}$$

$$g^{ij} \equiv \mathbf{g}^i \bullet \mathbf{g}^j = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_m}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_k}\mathbf{i}_m \bullet \mathbf{i}_k = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_m}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_m} \tag{2.37}$$

Из этого следует, что

$$g_{ij}\mathbf{g}^j = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}\frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}\mathbf{g}^j = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}\left(\frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}\frac{\partial \zeta^j}{\partial x_m}\right)\mathbf{i}_m = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}\frac{\partial x_k}{\partial x_m}\mathbf{i}_m = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^i}\mathbf{i}_k = (\mathbf{g}_i)_k\,\mathbf{i}_k = \mathbf{g}_i \tag{2.38}$$

Т.е. ковариантные векторы базиса выражаются через контравариантные по формуле:

$$\mathbf{g}_i = g_{ij}\mathbf{g}^j \tag{2.39}$$

Домножим эту формулу на g^{ki}:

$$g^{ki}\mathbf{g}_i = g^{ki}g_{ij}\mathbf{g}^j = \delta^{k\bullet}_{\bullet j}\mathbf{g}^j = \mathbf{g}^k \tag{2.40}$$

Т.е.

$$\mathbf{g}^k = g^{ki}\mathbf{g}_i \tag{2.41}$$

Формулы (2.39) и (2.41) задают связь между ковариантным и контравариантным базисами.

Если использовать обозначения $\{x, y, z\}$ для координат относительно ортогональной декартовой системы координат, а для координат относительно любой произвольной системы координат обозначения $\{\xi, \eta, \zeta\}$, то формулы для компонент метрического тензора (2.36) примут вид:

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2 + z_\xi^2 \\
g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2 + z_\eta^2 \\
g_{33} &= x_\zeta^2 + y_\zeta^2 + z_\zeta^2 \\
g_{12} &= g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta + z_\xi z_\eta \\
g_{23} &= g_{32} = x_\eta x_\zeta + y_\eta y_\zeta + z_\eta z_\zeta \\
g_{31} &= g_{13} = x_\zeta x_\xi + y_\zeta y_\xi + z_\zeta z_\xi
\end{aligned}
\qquad (2.42)
$$

Условимся обозначать через $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ координаты относительно любой произвольной системы координат (в том числе, и декартовой), а через $\{x_1, x_2, x_3\}$ или $\{x, y, z\}$ - координаты относительно ортогональной декартовой системы координат. Иногда для произвольной системы координат удобно использовать обозначения без индексов: $\{\xi, \eta, \zeta\}$.

2.6. Длина вектора

Для определения длины вектора используются компоненты метрического тензора.

Квадрат длины вектора $\boldsymbol{dr}$ по определению будет равен

$$
|\boldsymbol{dr}|^2 = \boldsymbol{dr} \bullet \boldsymbol{dr} = d\zeta^i d\zeta^j \mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_j = d\zeta^i d\zeta^j g_{ij} \qquad (2.43)
$$

а квадрат длины любого вектора

$$
|\boldsymbol{A}|^2 = A^i A^j g_{ij} \qquad (2.44)
$$

Условие инвариантности длины $\boldsymbol{dr}$ относительно выбора системы координат имеет вид:

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = g'_{km} d\eta^k d\eta^m = g_{ij} d\zeta^i d\zeta^j = g_{ij} a^{i\cdot}_{\cdot m} a^{j\cdot}_{\cdot k} d\eta^k d\eta^m \,, \tag{2.45}$$

2.7. Примеры метрических тензоров

Рассмотрим конкретные примеры.

В декартовой системе координат матрица тензора $\boldsymbol{g}$ имеет вид:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Квадрат длины вектора $d\boldsymbol{r}$ задается формулой:

$$|d\boldsymbol{r}|^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \tag{2.47}$$

В цилиндрической системе точка M задается координатами (r, θ, z):

$$\xi = r, \quad \eta = \theta, \quad \zeta = z \tag{2.48}$$

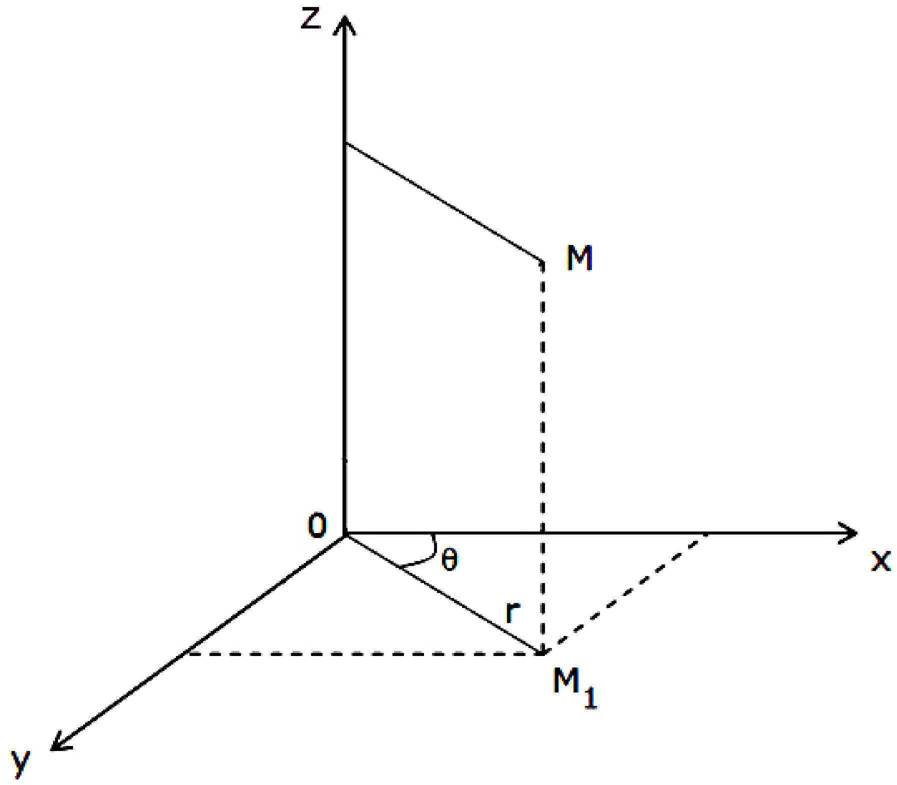

Рис.4. Цилиндрическая система координат.

Преобразование координат от цилиндрических к декартовым осуществляется по формулам:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\theta) = \xi\cos(\eta) \\
y &= r\sin(\theta) = \xi\sin(\eta) \\
z &= z = \zeta
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Используя формулы (2.42), получаем:

$$
\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\tag{2.50}
$$

Обратная ей матрица контравариантных компонент тензора $\boldsymbol{g}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

Аналогично можно получить основные соотношения для сферической системы координат, для которой:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\varphi)\cos(\theta), \\ y &= \rho \sin(\varphi)\sin(\theta), \\ z &= \rho \cos(\varphi) \end{aligned} \tag{2.52}$$

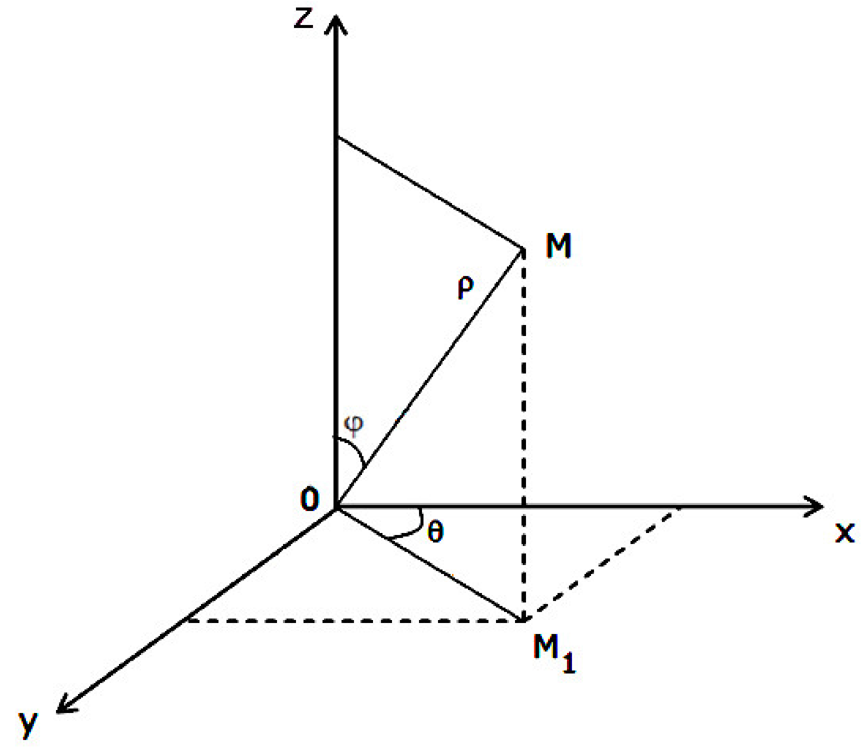

Рис.5. Сферическая система координат.

В этом случае

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2(\varphi)} \end{pmatrix} \qquad (2.53)$$

2.8. Ковариантные компоненты вектора и тензора

Используя формулы (2.39) и (2.41), введем ковариантные компоненты вектора и тензора.

$$\boldsymbol{A} = A^i \mathbf{g}_i = A^i g_{ij} \mathbf{g}^j = A_j \mathbf{g}^j, \qquad (2.54)$$

где

$$A_j = A^i g_{ij} \qquad (2.55)$$

Видно, что у контравариантных компонент A^j вектора $\boldsymbol{A}$, как и у контравариантных векторов базиса $\mathbf{g}^j$ индекс опускается с помощью ковариантных компонент тензора g_{ij}.

Следовательно, A_i преобразуются так же, как и $\mathbf{g}_j$, т. е. ковариантным образом:

$$A_j' = a^{i\bullet}_{\bullet j} A_i \qquad (2.56)$$

A_j называются ковариантными компонентами вектора $\boldsymbol{A}$ в контравариантном базисе $\mathbf{g}^j$. Следовательно, для каждого вектора $\boldsymbol{A}$ можно ввести компоненты A^j, преобразующиеся с помощью матрицы **B**, называемые контравариантными компонентами, и компоненты A_i

преобразующиеся с помощью матрицы **A**, называемые ковариантными компонентами. В общем случае ковариантные и контравариантные компоненты вектора отличаются друг от друга, $A^j \neq A_j$.

Рассуждения, проведенные для вектора, можно применить к тензорам любого ранга.

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j = g_{ik}g_{jm}T^{ij}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^m = T_{km}\mathbf{g}^k\mathbf{g}^m, \tag{2.57}$$

где

$$T_{km} = g_{ik}g_{jm}T^{ij} \tag{2.58}$$

Аналогично

$$\boldsymbol{T} = T^{i\bullet}_{\bullet j}\mathbf{g}_i\mathbf{g}^j \tag{2.59}$$

Компоненты T_{ij} называются ковариантными, а $T^{i\bullet}_{\bullet j}$ смешанными (ковариантным по индексу j и контравариантными по индексу i) компонентами тензора $\boldsymbol{T}$. Формулы преобразования для смешанных компонент осуществляется так, что преобразование ковариантное идет по нижним индексам, а контравариантное по верхним индексам.

Мы видим, что с помощью тензора $\boldsymbol{g}$ у компонент любого тензора можно опускать и поднимать индексы. Эта операция носит название операции жонглирования индексами. Например,

$$T = T_{ij}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j = T_{ij}g^{ik}\mathbf{g}_k\mathbf{g}^j = T^{k\cdot}_{\bullet j}\mathbf{g}_k\mathbf{g}^j \tag{2.60}$$

т.е. вместо записи тензора $\boldsymbol{T}$ с помощью ковариантных компонент мы получили его выражение через смешанные компоненты. При этом

$$T^{k\cdot}_{\bullet j} = g^{ik}T_{ij} \tag{2.61}$$

Ясно, что опускание индексов проводится с помощью g_{ij}, а поднятие - с помощью g^{ik}.

Заметим, что складывать и вычитать можно только компоненты тензоров с одинаковыми строениями индексов. Свойства симметрии и антисимметрии тензоров также определялись нами относительно одинаково расположенных индексов.

2.9. Скалярные инварианты тензора

Компоненты тензора зависят от выбора системы координат, но можно отыскать такие функции $\Phi\left(T^{i\bullet}_{\bullet j}\right)$ от компонент тензора, которые будут инвариантными относительно выбора системы координат, т. е.

$$\Phi\left(T^{i\bullet}_{\bullet j}\right) = \Phi\left(T'^{i\bullet}_{\bullet j}\right) \tag{2.62}$$

Такие функции компонент тензора называются инвариантами тензора. Они являются числами или функциями точек пространства. Именно такие функции компонент тензоров и векторов должны, наряду с другими инвариантными объектами, входить в математическую запись физических законов, которая должна быть инвариантной относительно способов описания физического явления и, в частности, не должна зависеть от системы координат.

Укажем простые правила образования инвариантов вектора и тензора. Возьмем вектор

$$\boldsymbol{A} = A^j \mathbf{g}_j = A_i \mathbf{g}^i = A^j g_{ij} \mathbf{g}^i$$

и составим скалярное произведение

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{A} = A^i A^j \mathbf{g}_i \bullet \mathbf{g}_j = A^i g_{ij} A^j = A^i A_i \tag{2.63}$$

Полученное выражение является инвариантом (квадратом длины вектора $\boldsymbol{A}$), так как преобразования разноименных компонент вектора взаимно обратны. У вектора только один независимый инвариант - его длина, все остальные инварианты являются ее функциями.

Теперь возьмем любой тензор второго ранга

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$$

и образуем свертку по обоим индексам с метрическим тензором $T^{ij}g_{ij}$ (сверткой называется операция суммирования по верхнему и нижнему индексам), которая даст число, не зависящее от системы координат, так как преобразования компонент с верхними и нижними индексами взаимно обратны. Можно записать

$$T^{ij}g_{ij} = T^{i\bullet}_{\bullet i} = T^{1\bullet}_{\bullet 1} + T^{2\bullet}_{\bullet 2} + T^{3\bullet}_{\bullet 3} \tag{2.64}$$

Можно сделать двойную свертку

$$T^{ik}g_{jk}T^{jm}g_{im} = T^{i\bullet}_{\bullet j}T^{j\bullet}_{\bullet i} \tag{2.65}$$

и тройную

$$T^{i\bullet}_{\bullet j}T^{j\bullet}_{\bullet k}T^{k\bullet}_{\bullet i}, \tag{2.66}$$

которые тоже будут инвариантами. Для тензора второго ранга мы получили три инварианта: линейный, квадратичный и кубичный относительно компонент. Можно показать, что в случае симметричного тензора второго ранга, особенно важного для приложений, все остальные скалярные инварианты будут функциями этих трех.