Глава 1. Необходимые сведения из механики сплошной среды и термодинамики

1. Основные понятия

1.1. Основные гипотезы механики сплошной среды

Для начала определимся с терминологией. В названии главы фигурирует слово «жидкость». Давайте договоримся, что этот термин имеет широкое значение. Жидкость может быть несжимаемой (это собственно жидкость), сжимаемой (газ), проводящей и т.д.

Для построения математической модели любой задачи динамики жидкости, необходимо получить представление о такой науке, как «Механика сплошной среды». Наиболее полной монографией в этой области является книга Седова Л.И. [1]

Механика сплошной среды — часть механики, посвященная движению газообразных, жидких и твердых деформируемых тел.

Классическая теоретическая механика изучает движение материальной точки, дискретных систем материальных точек и абсолютно твердого тела. Механика сплошной среды изучает движение таких материальных тел, которые заполняют все пространство непрерывно, сплошным образом. Расстояния между точками этих тел во время движения меняются, т.е. тело постоянно деформируется - изменяет форму.

Механика сплошной среды строится на следующих основных гипотезах.

Гипотеза сплошности

Известно, что все тела представляют собой совокупности разного сорта молекул и атомов. Может показаться, что науку следует развивать на базе представления о материальном теле как совокупности элементарных частиц. Однако следить за движением каждой элементарной частицы из-за их весьма большого числа и неизвестности сил взаимодействия между ними невозможно. Кроме того, сложное строение молекул и удерживающие их электрические силы взаимодействия не всегда известны.

На самом деле для решения большинства практических задач требуются только некоторые средние, суммарные, или глобальные, характеристики.

Введем понятие сплошной среды. Все тела состоят их отдельных частиц, но их много в любом существенном для нас объеме, поэтому тело можно приближенно рассматривать как среду, заполняющую пространство сплошным образом. Воду, воздух, железо и т. д. будем рассматривать как тела, целиком заполняющие некоторую часть пространства.

Заметим, что эта идеализация необходима еще и потому, что мы хотим при исследовании движения деформируемых тел использовать аппарат непрерывных функций и дифференциальное исчисление.

Гипотеза о метрическом евклидовом пространстве.

Под пространством понимают совокупность точек, задаваемых с помощью чисел, которые называются координатами. Будем рассматривать эвклидово пространство, точки которого задаются с помощью единой для всего пространства декартовой системы координат x, y, z. Расстояние между двумя точками x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 определяется по формуле:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{1.1}$$

Гипотеза об абсолютности времени

Любое механическое явление всегда описывается с точки зрения какого-либо наблюдателя. Время, вообще говоря, может зависеть от системы отсчета наблюдателя.

Делаем допущение, что время течет одинаково для всех наблюдателей, т.е. мы будем пользоваться абсолютным временем. Такая идеализация пригодна только тогда, когда можно пренебречь эффектами теории относительности.

1.2. Системы координат и закон движения сплошной среды с точки зрения Лагранжа

Итак, под пространством понимается совокупность точек, задаваемых с помощью чисел, которые называются координатами.

Поэтому изучение вопросов, связанных с анализом систем координат, представляет большую важность.

Укажем особые причины.

Чаще всего в учебных пособиях основные уравнения динамики жидкости записываются в индексной форме в декартовой системе координат без разделения на ковариантные и контравариантные индексы. В то же время, многие задачи, особенно в авиационной и ракетно-космической технике, удобнее решать в цилиндрической системе координат. Перевод основных уравнений в цилиндрическую систему координат представляет нетривиальную задачу.

При построении расчетных сеток производится переход от ортогональной системы координат к криволинейной неортогональной системе, и наоборот.

Движение всегда определяется по отношению к некоторой системе отсчета - системе координат. С помощью системы координат устанавливается соответствие между числами и точками пространства. Для трехмерного пространства точкам ставятся в соответствие три числа $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$, которые называются координатами точки.

Линии, на которых какие-либо две координаты сохраняют постоянные значения, называются координатными линиями.

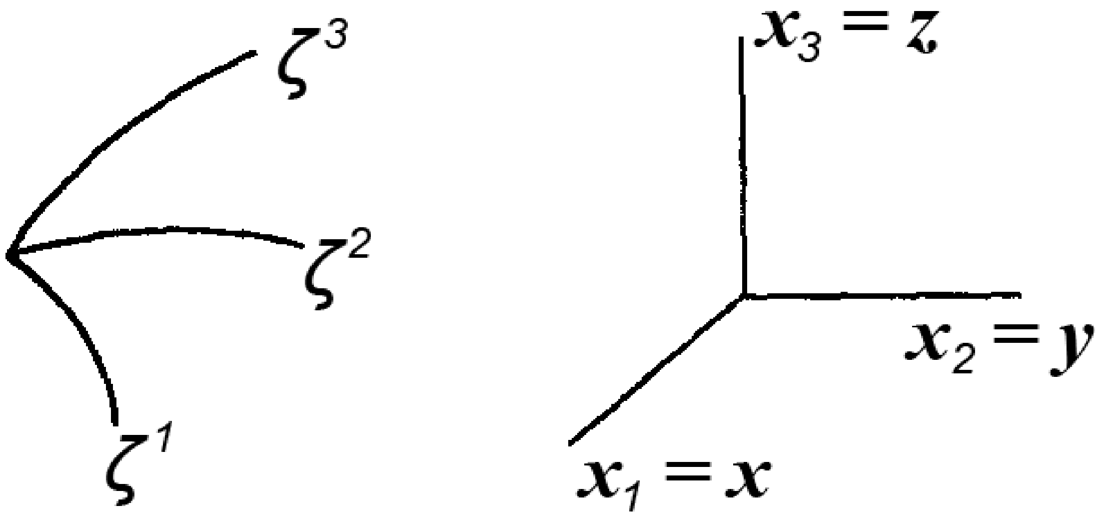

Рис.1. Криволинейная и декартова система координат

Например, линия, вдоль которой $\zeta^2 = const$, $\zeta^3 = const$, определяет координатную линию ζ^1, вдоль этой линии различные точки определяются значениями ζ^1, направление роста координаты ζ^1 определяет направление вдоль этой линии. Через каждую точку пространства можно провести три координатные линии. Касательные к координатным линиям в каждой точке не лежат в одной плоскости и образуют, вообще говоря, неортогональный триэдр.

Условимся обозначать через $\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\}$ координаты относительно любой произвольной системы координат (в том числе, и декартовой), а через $\{x_1, x_2, x_3\}$ или $\{x, y, z\}$ - координаты относительно ортогональной декартовой системы координат. Иногда для произвольной системы координат удобно использовать обозначения без индексов: $\{\xi, \eta, \zeta\}$.

Координаты каждой точки меняются во времени. Сплошная среда представляет собой непрерывную совокупность точек. По идее, чтобы задать движение среды, нужно задать координаты каждой точки в каждый момент времени. Если координаты точек в некоторый начальный момент времени t_0 обозначить как $\{\zeta_0^{\ 1}, \zeta_0^{\ 2}, \zeta_0^{\ 3}\}$, то координаты точек в любой момент времени t определяются как

$$\zeta^i = \zeta^i\left(\zeta_0^{\ 1}, \zeta_0^{\ 2}, \zeta_0^{\ 3}, t\right), \qquad i = 1,2,3 \tag{1.2}$$

Координаты $\zeta_0^1, \zeta_0^2, \zeta_0^3$, выделяющие конкретную точку, и время t называются переменными Лагранжа.

Основная задача механики сплошной среды заключается в определении функций (1.2).

1.3. Векторы базиса

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки P по отношению к началу координат *0* может быть выражен через координаты как:

$$\boldsymbol{r} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3\,, \tag{1.3}$$

где $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$ или $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ - единичные векторы по осям координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ соответственно. Альтернативная форма записи имеет вид

$$\boldsymbol{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1.4}$$

Делаем допущение, что между координатами в основной декартовой системе координат и координатами в произвольной системе координат существует взаимно-однозначное соответствие, т.е. существуют дифференцируемые функции

$$x_i = x_i\left(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\right), \quad i = 1,2,3, \tag{1.5}$$

а также, дифференцируемые функции, выражающие обратную связь:

$$\zeta^j = \zeta^j\left(x_1, x_2, x_3\right), \quad j = 1,2,3 \tag{1.6}$$

Дифференцируя уравнение (1.3) по ζ^j, получаем систему *ковариантных векторов базиса* в системе координат $\left\{\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3\right\}$:

$$\mathbf{g}_j \equiv \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial x_1}{\partial \zeta^j}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \zeta^j}\mathbf{i}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \zeta^j}\mathbf{i}_3, \quad j = 1,2,3, \tag{1.7}$$

которые в базовой декартовой системе координат имеют следующие компоненты

$$\left(\mathbf{g}_j\right)_i = \frac{\partial x_i}{\partial \zeta^j}, \quad i = 1,2,3 \tag{1.8}$$

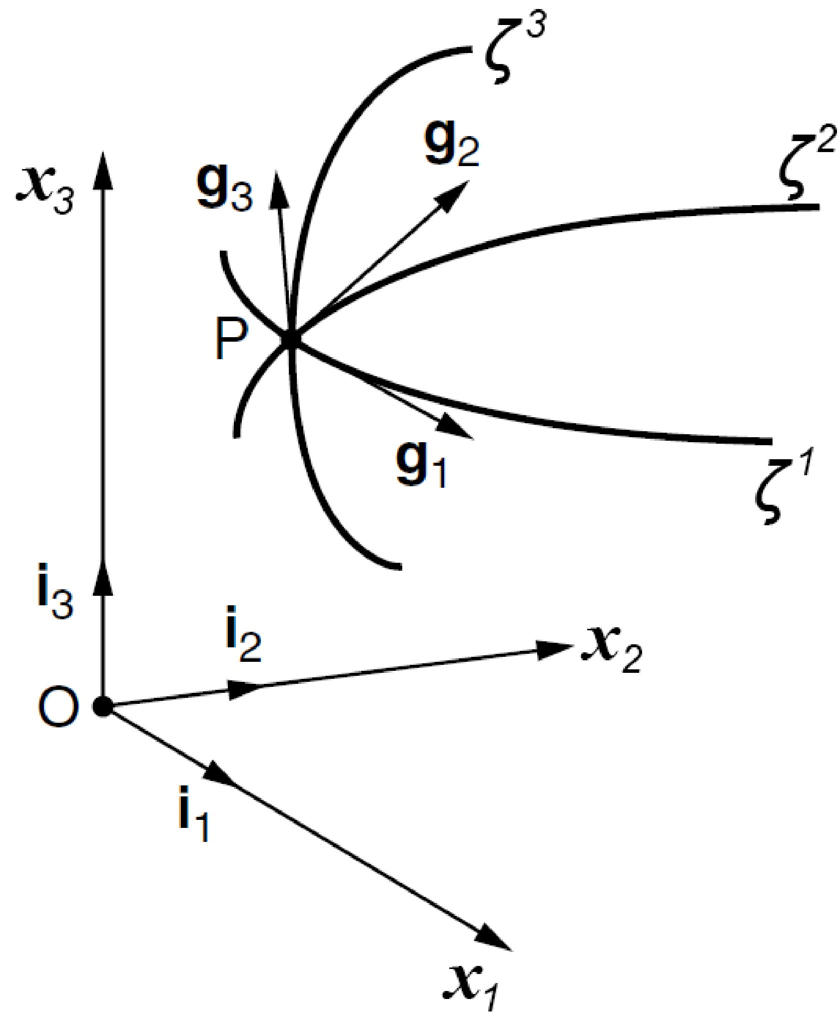

Рис.2. Ковариантные векторы базиса в точке *P*

1.4. Вектор скорости

Бесконечно малое перемещение $d\boldsymbol{r}$ точки P можно разложить по ковариантным векторам базиса $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$, взятым в точке P:

$$d\boldsymbol{r} = \mathbf{g}_1 d\zeta^1 + \mathbf{g}_2 d\zeta^2 + \mathbf{g}_3 d\zeta^3 \tag{1.9}$$

где $d\zeta^1, d\zeta^2, d\zeta^3$ являются компонентами перемещения $d\boldsymbol{r}$.

Данное разложение удобно записать в компактном виде:

$$d\boldsymbol{r} = \mathbf{g}_j d\zeta^j \tag{1.10}$$

где знак суммы опущен. В дальнейшем мы обычно будем опускать знак суммы, подразумевая суммирование всякий раз, когда в выражениях типа (1.10) будут встречаться два одинаковых индекса, один из которых стоит вверху, а другой внизу.

Поделив (1.10) на элемент времени *dt*, соответствующий перемещению точки сплошной среды из точки *P* в точку *P′*, получим по определению *скорость точки* сплошной среды:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \mathbf{g}_j \frac{\partial \zeta^j}{\partial t} = \mathbf{g}_j v^j \tag{1.11}$$

откуда

$$v^j = \left(\frac{\partial \zeta^j}{\partial t} \right)_{\zeta_0^k}, \tag{1.12}$$

где индексы ζ_0^k внизу указывают на то, что производные берутся при постоянных параметрах $\{\zeta_0^1, \zeta_0^2, \zeta_0^3\}$, индивидуализирующих точку среды. Величины $\{v^1, v^2, v^3\}$ называются компонентами вектора скорости $\boldsymbol{v}$ в базисе $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$.

Компоненты скорости в базовой декартовой системе координат будем обозначать $\{u_1, u_2, u_3\}$

1.5. Скалярное и векторное произведение векторов в декартовой системе координат.

Пусть имеется два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, заданные в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3, \\ \boldsymbol{b} &= b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + b_3\mathbf{i}_3 \end{aligned} \qquad (1.13)$$

Скалярное произведение этих векторов является скаляром и определяется по формуле:

$$c = \boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\left(\widehat{\boldsymbol{ab}}\right) \qquad (1.14)$$

Векторное произведение этих векторов является вектором $\boldsymbol{c}$ и определяется по формуле:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{i}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{i}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (1.15)$$

Справедливы следующие правила: вектор $\boldsymbol{c}$ ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; вектор $\boldsymbol{c}$ направлен так, что тройка векторов $\boldsymbol{abc}$ является правой.

1.6. Тензорная форма записи и соглашение Эйнштейна

Компактный вид записи уравнений (1.10) и (1.11) является примером так называемой *тензорной формы записи* основных уравнений.

В тензорном анализе, при записи выражений из многокомпонентных величин, пронумерованных верхними и нижними индексами (тензоров), для экономии записи бывает удобно использовать правило, называемое *соглашением Эйнштейна*: если одна и та же буква в обозначении индекса встречается и сверху, и снизу, то такой член полагается просуммированным по всем значениям, которые может принимать этот индекс. Например, в выражении

$$a_k = b_i c_k^i \tag{1.16}$$

буква i встречается и сверху, и снизу, поэтому это выражение считается эквивалентным сумме

$$a_k = \sum_{i=1}^{N} b_i c_k^i \,, \tag{1.17}$$

где N - размерность пространства. Для трёхмерных задач $N=3$, для четырёхмерных (задачи теории относительности) $N=4$ и т.д. Для обозначения индексов используют латинские буквы из середины алфавита ($i, j, k, l, m, n, p, q, r$). Так же в качестве индексов могут быть использованы греческие буквы α, β, γ.

Это правило распространяется не только на алгебраические формулы, но и на дифференциальные выражения. Например, запись $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ подразумевает суммирование

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{1.18}$$

В декартовой системе координат нет разницы между индексами, находящимися внизу и вверху в компонентных выражениях.

Поэтому к декартовым координатам и векторам базиса в декартовой системе координат можно применить соглашением Эйнштейна в форме: если одна и та же буква в обозначении индекса встречается *два раза*, то такой член полагается просуммированным по всем значениям, которые может принимать этот индекс.

1.7. Точка зрения Эйлера на изучение движения сплошной среды

Движение, с точки зрения Эйлера, считается известным, если скорость, давление, температура и другие интересующие величины заданы как функции $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ и t.

Функции $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\left(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t\right)$, $p = p\left(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t\right)$, $T = T\left(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, t\right)$, и т. д. при фиксированных $\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ и переменном t определяют изменения со временем скорости, температуры и т. д. в данной точке пространства для разных приходящих в эту точку частиц.

Таким образом, с точки зрения Лагранжа, мы интересуемся законами изменения скорости, давления, температуры и других величин для данной индивидуальной точки сплошной среды, а с точки зрения Эйлера — скоростью, давлением, температурой и т. д. в данном месте. С точки зрения Эйлера, мы выделяем некоторую область пространства и хотим знать все данные о частицах, которые в нее приходят.

1.8. Скалярные и векторные поля и их характеристики

При изучении движения сплошной среды необходимо вводить в рассмотрение скалярные и векторные величины: температуру T, давление p, плотность ρ, скорость $\boldsymbol{v}$ и др.

Совокупность значений той или иной величины, заданных в каждой точке рассматриваемой области, называется полем этой величины. Если рассматриваемая величина — скаляр, т. е. число, значение которого в данной точке не зависит от выбора системы координат, то поле называется скалярным. Примеры: температура, давление, плотность и др. Если же рассматриваемая величина — вектор, как, например, скорость, то поле называется векторным.

Если распределение скалярной величины, например, температуры T, задано с точки зрения Лагранжа $T\left(\zeta_0^{\,1},\zeta_0^{\,2},\zeta_0^{\,3},t\right)$, то подсчитать изменение температуры T в единицу времени t для индивидуальной частицы сплошной среды $\left(\zeta_0^{\,1},\zeta_0^{\,2},\zeta_0^{\,3}\right)$ очень просто. Оно будет равно производной

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta_0^{\,i}} \qquad (1.19)$$

Если же распределение температуры задано в зависимости от переменных Эйлера $T=T\left(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3,t\right)$, то надо перейти от переменных Эйлера к переменным Лагранжа

$$T=T\left(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3,t\right)=T\left(\zeta^1\left(\zeta_0^{\,1},\zeta_0^{\,2},\zeta_0^{\,3},t\right),\zeta^2\left(\zeta_0^{\,1},\zeta_0^{\,2},\zeta_0^{\,3},t\right),\zeta^3\left(\zeta_0^{\,1},\zeta_0^{\,2},\zeta_0^{\,3},t\right),t\right) \quad (1.20)$$

и взять производную по времени, как производную сложной функции:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta_0^{\,j}}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta^i}+\frac{\partial T}{\partial \zeta^1}\left(\frac{\partial \zeta^1}{\partial t}\right)_{\zeta_0^{\,j}}+\frac{\partial T}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \zeta^2}{\partial t}\right)_{\zeta_0^{\,j}}+\frac{\partial T}{\partial x^3}\left(\frac{\partial \zeta^3}{\partial t}\right)_{\zeta_0^{\,j}} \qquad (1.21)$$

Учитывая введенные определения компонент вектора скорости (1.12), получаем:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta_0^{\,j}}=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta^i}+\frac{\partial T}{\partial \zeta^1}v^1+\frac{\partial T}{\partial \zeta^2}v^2+\frac{\partial T}{\partial \zeta^3}v^3=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta^i}+\frac{\partial T}{\partial \zeta^j}v^j \qquad (1.22)$$

Производная $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta_0^{\,j}}$ характеризует изменение температуры со временем в данной точке сплошной среды и называется индивидуальной, или субстанциональной, или полной производной температуры T по времени t. Она часто обозначается символом $\frac{dT}{dt}$. Производная $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\zeta^i}$ характеризует изменение температуры T в единицу времени в данной точке пространства $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$. Она называется местной или локальной производной и обозначается $\dfrac{\partial T}{\partial t}$. В общем случае индивидуальная производная $\dfrac{dT}{dt}$ не равна местной $\dfrac{\partial T}{\partial t}$, а отличается от нее на величину, зависящую от движения частицы и называемую конвективной производной.

1.9. Контравариантный базис

Имея базис $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$, мы можем сформировать в точке P систему контравариантных базисных векторов $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$, используя для их определения систему уравнений

$$\mathbf{g}^i \bullet \mathbf{g}_j = \delta^{i\bullet}_{\bullet j}, \tag{1.23}$$

где точкой обозначено скалярное произведение векторов, $\delta^{i\bullet}_{\bullet j}$ - символ Кронекера, определяемый как

$$\delta^{i\bullet}_{\bullet j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{1.24}$$

По правилам скалярного умножения (см. формулу (1.14)):

$$\mathbf{g}^i \bullet \mathbf{g}_j = (\mathbf{g}^i)_1 (\mathbf{g}_j)_1 + (\mathbf{g}^i)_2 (\mathbf{g}_j)_2 + (\mathbf{g}^i)_3 (\mathbf{g}_j)_3, \tag{1.25}$$

где $(\mathbf{g}^i)_k$ - компоненты вектора $\mathbf{g}^i$ в базовой декартовой системе координат.

С учетом того, что по определению

$$\left(\mathbf{g}_j\right)_k = \frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j}, \quad k = 1,2,3\,,$$

получаем:

$$\delta^{i\cdot}_{\cdot j} \equiv \mathbf{g}^i \bullet \mathbf{g}_j = \left(\mathbf{g}^i\right)_1 \frac{\partial x_1}{\partial \zeta^j} + \left(\mathbf{g}^i\right)_2 \frac{\partial x_2}{\partial \zeta^j} + \left(\mathbf{g}^i\right)_3 \frac{\partial x_3}{\partial \zeta^j} \qquad (1.26)$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\delta^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \zeta^j} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \zeta^j} + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial \zeta^j} \qquad (1.27)$$

Сравнивая выражения (1.26) и (1.27), получаем:

$$\left(\mathbf{g}^i\right)_k = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_k}, \quad k = 1,2,3 \qquad (1.28)$$

Отсюда мы получаем, что вектор $\mathbf{g}^i$ в декартовой системе координат определяется как

$$\mathbf{g}^i = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_1}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_2}\mathbf{i}_2 + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_3}\mathbf{i}_3, \quad i = 1,2,3 \qquad (1.29)$$

Можно показать, что справедливы следующие формулы:

$$\mathbf{g}^1 = \frac{\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3}{V}, \quad \mathbf{g}^2 = \frac{\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1}{V}, \quad \mathbf{g}^3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{V}\,, \qquad (1.30)$$

где $V = \mathbf{g}_1 \bullet \left(\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3\right)$ - объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ (см. рис.3).

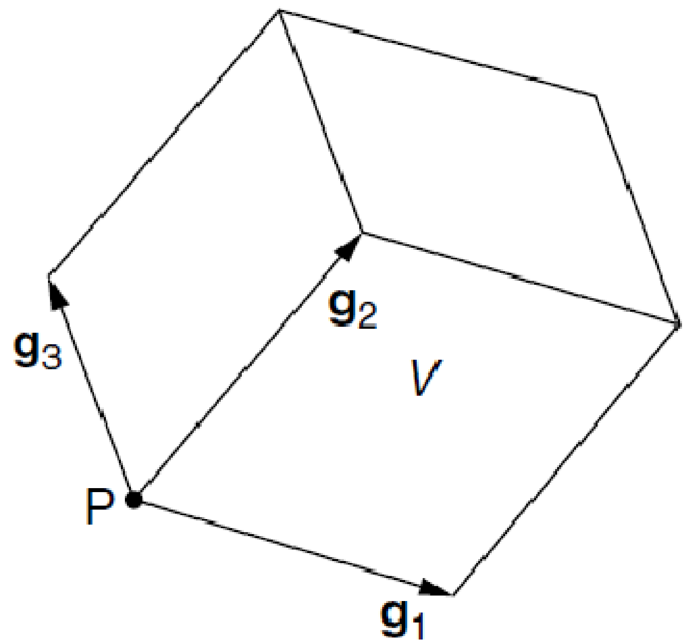

Рис. 3. Параллелепипед, построенный на базисных векторах

Таким образом, вектор $\mathbf{g}^1$ перпендикулярен векторам $\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$, которые являются касательными к координатным линиям ζ^2, ζ^3 соответственно. Следовательно, вектор $\mathbf{g}^1$ расположен на нормали к поверхности, на которой координата ζ^1 постоянна.

Упражнение. Доказать формулы (1.30).

1.10. Оператор набла, градиент скалярной величины, дивергенция вектора, ротор вектора.

Формулу (1.29) можно записать в форме

$$\mathbf{g}^i = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_1}\mathbf{i}_1 + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_2}\mathbf{i}_2 + \frac{\partial \zeta^i}{\partial x_3}\mathbf{i}_3 = \nabla \zeta^i, \tag{1.31}$$

где через ∇ обозначен так называемый векторный дифференциальный *оператор набла* или *оператор Гамильтона*:

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.32}$$

Используя этот оператор, удобно задать в декартовой системе координат такие важные векторные функции как:

градиент скалярной величины *T*:

$$grad\ T = \nabla T = \mathbf{i}_i \frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{1.33}$$

дивергенция векторной величины ***V***:

$$div\ \boldsymbol{v} = \nabla \bullet \boldsymbol{v} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{1.34}$$

и ротор (или вихрь) векторной величины ***v***

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \tag{1.35}$$