ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗОВ

Термодинамическая теория течения и истечения газов имеет большое прикладное значение в современной теплоэнергетике. Целый ряд технических расчетов основывается на закономерностях, которые вытекают из рассмотрения и исследования термодинамики процессов течения и истечения газов и паров. С этими закономерностями приходится сталкиваться при изучении процессов в тепловых двигателях, особенно в реактивных двигателях, газовых турбинах, рабочий процесс которых полностью основывается на закономерностях процессов течения и истечения газов.

12. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗОВ

12.1. Уравнение первого закона термодинамики для случая течения и истечения газов

Процесс течения и истечения газов и паров отвечает общему случаю, когда рабочее тело перемещается в пространстве под действием неравномерного поля давления. Поэтому для течения мы можем применить общее уравнение первого закона термодинамики. Будем рассматривать стационарный поток, у которого через любое сечение канала в единицу времени проходит одно и то же количество газа m=const, кг/с, т.е. $m_1=m_2=m_3$=const, кроме того, параметры газа в любой точке потока с течением времени не изменяются.

Расход газа определяется следующим образом:

$$m = fW\rho = f\frac{W}{\upsilon} \qquad (12.1)$$

где f - площадь поперечного сечения потока; W - скорость потока; ρ - плотность газа; υ - удельный объем газа.

Тогда

$$f_1W_1\rho_1 = f_2W_2\rho_2 = f_3W_3\rho_3, \qquad (12.2)$$

$$\frac{f_1W_1}{\upsilon_1} = \frac{f_2W_2}{\upsilon_2} = \frac{f_3W_3}{\upsilon_3}. \qquad (12.3)$$

Уравнения (12.2) и (12.3) называются уравнениями неразрывности или сплошности.

Введем упрощающее условие. Будем рассматривать одномерное течение, когда параметры текущего газа изменяются только вдоль одной оси (вдоль потока). Принимаем скорость потока по сечению канала одинаковой, равной некоторой средней скорости $W=W_{ср}$. В действительности течения газа в канале не одномерное, скорость потока не одинакова по его сечению. У стенки канала она равна нулю вследствие эффекта трения.

Для течения газа или пара уравнение первого закона термодинамики в общем виде будет иметь следующий вид при отнесении количества энергии к единице массы:

$$dq = du + d\left(\frac{W^2}{2}\right) + gdh + d(p\upsilon) + dl_{тех} \qquad (12.4)$$

Изменением внешней потенциальной энергии газа будем пренебрегать: $gdh=0$.

Кроме того, рассмотрим случай, когда сам канал с газом неподвижен и, следовательно, газ никакой внешней технической работы не совершает, т.е. $dl_{тех}=0$.

Тогда уравнение первого закона термодинамики примет вид, учитывая что $du+d(p\upsilon)=dh$,

$$dq = dh + d\left(\frac{W^2}{2}\right). \qquad (12.5)$$

В дальнейшем будем рассматривать течение и истечение газов и паров без учета трения и теплообмена с внешней средой, т.е. адиабатный процесс течения и истечения ($dq=0$). Для этого случая уравнение первого закона термодинамики в дифференциальной форме примет вид.

$$d\left(\frac{W^2}{2}\right) = -dh. \qquad (12.6)$$

Для конечного участка потока в интегральной форме получим

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = h_1 - h_2. \qquad (12.7)$$

Следовательно, для адиабатного течения увеличение внешней скорости движения потока газа определяется соответствующим уменьшением энтальпии этого газа.

12.2. Располагаемая работа потока

Для любого потока жидкости, в том числе газов и паров, существует общая связь между давлением и скоростью потока жидкости, которая выражается уравнением Бернулли.

Для потока без трения уравнение Бернулли имеет вид

$$-\upsilon dp = d\left(\frac{W^2}{2}\right). \qquad (12.8)$$

Из уравнения видно, что увеличение кинетической энергии движения массы жидкости соответствует уменьшению выражения υdp. В случае если жидкость несжимаема, уменьшение υdp достигается только за счет соответствующего понижения давления. Если же текущая жидкость сжимаема (газы и пары), то увеличение кинетической энергии потока может достигаться как за счет понижения давления при течении, так и за счет соответствующего увеличения удельных объемов газа (например, течение газа с горением, т.е. с подводом тепла). Таким образом, уравнение Бернулли одинаково справедливо для течения любой жидкости.

Различают два вида жидкости.

1. Жидкость с устойчивым объемом, т.е. капельная жидкость, у которой объем не изменяется (несжимаемая жидкость): $\upsilon \neq f(p)$; υ=const.

2. Жидкость с неустойчивым объемом, или сжимаемая жидкость (газы и пары), у которой объем претерпевает в общем случае значительное изменение при изменении давления: $\upsilon = f(p)$; $\upsilon \neq$ const.

Таким образом, в общем случае для стационарного течения любой жидкости уравнение Бернулли в интегральной форме примет вид

$$\int_{p_1}^{p_2} -\upsilon dp = \int_{W_1}^{W_2} d\left(\frac{W^2}{2}\right)$$

или

$$l' = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} \upsilon dp , \qquad (12.9)$$

где l' - располагаемая работа потока, идущая на увеличение внешней кинетической энергии потока (на увеличение скорости потока). Это и есть основное уравнение, связывающее изменение скорости и давления в интегральной форме и справедливое для любого потока жидкости. Получим выражения для располагаемой работы потока l' при течении различной жидкости.

1. Рассмотрим случай течения капельной, несжимаемой жидкости (рис. 12.1).

Для этой жидкости $\upsilon \neq f(p)$; υ=const. Согласно уравнения (12.9) для конечного участка процесса 1-2, получаем

$$l' = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \upsilon(p_1 - p_2). \tag{12.10}$$

Работа l' идет на увеличение кинетической энергии текущей жидкости.

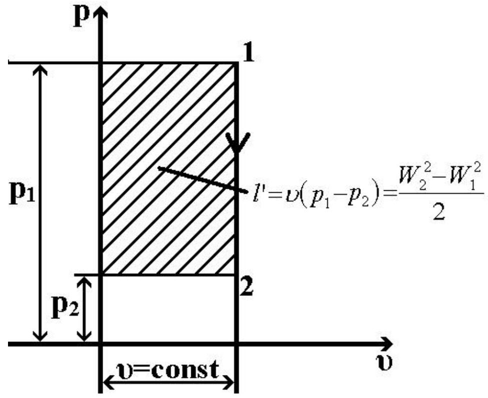

Рис. 12.1

2. Рассмотрим случай течения сжимаемой жидкости (газов и паров) (рис. 12.2). Для этой жидкости $\upsilon = f(p)$; $\upsilon \neq \text{const}$.

$$l' = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} \upsilon dp.$$

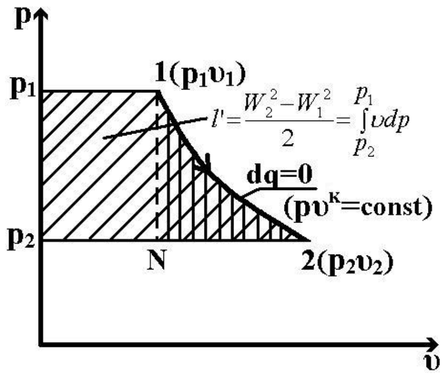

Рис. 12.2

Определение интеграла $\int_{p_2}^{p_1} \upsilon dp$ для течения газов требует определения связи между изменением давления и объема текущего газа. Для чего необходимо знать характер термодинамического процесса происходящего в текущем газе.

Будем по-прежнему считать течение газа адиабатным, т.е. без внешнего теплообмена (dq=0). Для адиабатного процесса имеем

$$p_1\upsilon_1^{\kappa} = p_2\upsilon_2^{\kappa} = \text{const}$$

или в общем виде $p\upsilon^{\kappa}$=const, $p^{\frac{1}{\kappa}}\upsilon = \text{const}^{\frac{1}{\kappa}}$, отсюда

$$\upsilon = \frac{\text{const}^{\frac{1}{\kappa}}}{p^{\frac{1}{\kappa}}}. \qquad (12.11)$$

Следовательно, работа l', пошедшая на увеличение кинетической энергии потока газа при его адиабатном течении, определится как

$$l' = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} \upsilon dp = \text{const}^{\frac{1}{\kappa}} \int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}}.$$

Интегрируя данное выражение и подставляя соответствующие пределы и значение const из (12.11), получаем:

$$l' = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} \upsilon dp = \frac{\kappa}{\kappa - 1}(p_1\upsilon_1 - p_2\upsilon_2)$$

или

$$l' = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1\upsilon_1 \left(1 - \frac{p_2\upsilon_2}{p_1\upsilon_1}\right).$$

Заменим отношение $\frac{p_2\upsilon_2}{p_1\upsilon_1}$ через отношения других параметров состояния:

$$\frac{p_2\upsilon_2}{p_1\upsilon_1} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

Окончательно получим следующее выражение:

$$l' = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} \upsilon dp = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1\upsilon_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]. \qquad (12.12)$$

Если рассмотреть процесс течения с термодинамической точки зрения, то работа l', пошедшая на увеличение кинетической энергии потока, изобразится в *pυ*- координатах площадью под адиабатным процессом расширения при проекции процесса на ось *P*.

Площадь N12N (рис. 12.2) представляет собой ту дополнительную работу, по сравнению с течением несжимаемой жидкости (рис. 12.1), которая получается за счет расширения газа при адиабатном течении и которая также идет на дополнительное увеличение кинетической энергии потока (на дополнительное увеличение скорости потока).

12.3. Термодинамическая теория истечения газов и паров из резервуара неограниченной емкости

Резервуаром неограниченной емкости называется сосуд, в котором в продолжении всего процесса истечения начальные параметры рабочего тела остаются неизменными ($p_1 \upsilon_1 T_1$=const).

Постоянство начальных параметров рабочего тела практически может иметь место при непрерывном восстановлении в резервуаре убыли рабочего тела (например, паровой котел). Итак, пусть имеется резервуар неограниченной емкости, из которого происходит процесс истечения (рис.12.3), где p_1 - давление газа в резервуаре; $p_н$ - давление среды, куда происходит истечение; p_2 - давление газа на срезе выходного отверстия (противодавление), где $p_2 \geq p_н$. Условие истечения $p_1 > p_н$.

Рис. 12.3

Пользуясь общим соотношением между W, p, и υ полученным по уравнению Бернулли, для случая адиабатного течения газов и паров имеем (12.12):

$$l' = \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} \upsilon dp = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 \upsilon_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right].$$

Применяя это уравнение для случая истечения газов и паров, будем полагать, что начальная скорость течения W_1=0 (газ в резервуаре неподвижен). Здесь p_1 - давление в резервуаре; p_2 – давление газа на срезе выходного отверстия.

Конечное значение скорости W_2=W будет представлять собой в этом случае скорость истечения, тогда согласно (12.12), получим

$$l' = \frac{W^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} \upsilon dp = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 \upsilon_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]. \qquad (12.13)$$

Из уравнения (12.13) скорость истечения будет равна

$$W = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 \upsilon_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}, \qquad (12.14)$$

где p_1- давление газа в резервуаре, Н/м^2 (Па); υ_1 - его удельный объем, м^3/кг; p_2 - давление газа на срезе выходного сечения, Н/м^2 (Па).

В дальнейшем, для упрощения написания формул скорости и расхода при истечении введем обозначение для отношения давлений $\beta = \frac{p_2}{p_1}$, тогда

$$W = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 \upsilon_1 \left[1 - \beta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}. \qquad (12.15)$$

Получим выражение скорости адиабатного истечения газа или пара через энтальпию.

Применим уравнение первого закона термодинамики, полученное для адиабатного течения газа или пара (12.7), к процессу истечения:

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2} = h_1 - h_2 .$$

Будем по-прежнему полагать, что для случая истечения начальная скорость газа в резервуаре равна нулю, т.е. W_1 =0, а W_2=W, при этих условиях получим

$$\frac{W^2}{2} = h_1 - h_2 ,$$

отсюда имеем

$$W = \sqrt{2(h_1 - h_2)}, \qquad (12.16)$$

где h_1 – значение энтальпии газа в резервуаре, Дж/кг; h_2 – значение энтальпии газа в выходном сечении канала, Дж/кг.

Если же h_1 и h_2 измеряется в кДж/кг, то

$$W = 44{,}72\sqrt{h_1 - h_2} . \qquad (12.17)$$

Скорость адиабатного процесса истечения может быть легко определена по *hs*-диаграмме (рис. 12.4).

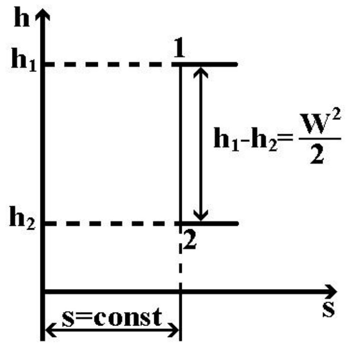

Рис. 12.4

Секундный расход газа или пара при истечении из резервуара неограниченной емкости может быть определен из уравнения (12.1):

$$m = fW\rho_2 = f\frac{W}{\upsilon_2},$$

где W - скорость истечения, м/с; f - площадь выходного сечения, м^2; ρ_2 - плотность газа в выходном сечении, кг/м^3; υ_2 - удельный объем газа в выходном сечении, м^3/кг.

Так как мы рассматриваем адиабатный процесс истечения, то, используя соотношение параметров адиабатного процесса, получаем

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right)^{\kappa}$$

или

$$\left(\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\right) = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}},$$

тогда

$$\upsilon_2 = \upsilon_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\kappa}}. \qquad (12.18)$$

Подставляя значение υ_2 по (12.18) и W по (12.14) в уравнение расхода (12.1) получаем

$$m = f\frac{W}{\upsilon_2} = \frac{f}{\upsilon_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1}p_1\upsilon_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

или

$$m = f\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\upsilon_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]}. \qquad (12.19)$$

Заменяя $\frac{p_2}{p_1} = \beta$, уравнение расхода примет вид

$$m = f\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\upsilon_1}\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)}. \qquad (12.20)$$

Здесь p_1 - давление газа в резервуаре, Па; υ_1 - удельный объем газа в резервуаре, м^3/кг.

12.4. Исследование формулы секундного расхода газа при истечении

Из полученной формулы для определения расхода газа при истечении (12.20) следует, что расход $m = f\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = f(\beta)$ при постоянных значениях параметров газа в резервуаре (при заданных p_1 и T_1). Проведем исследование этой зависимости при условии, что величина $\beta = \frac{p_2}{p_1}$ будет изменяться за счет изменения только величины противодавления p_2, а давление газа в резервуаре p_1 будем считать неизменным, т.е. $\beta = \frac{p_2}{p_1} = \text{var}$ при p_1=const и p_2=var. Такое изменение аргумента $\beta = \frac{p_2}{p_1}$ в формуле (12.20) объясняется тем, что, во-первых, p_1=const должно быть по условию истечения газа из резервуара неограниченной емкости, в котором величина p_1 не меняется. Во-вторых, условие p_1=const исключает непосредственное влияние величины p_1 на расход газа *m*, который согласно основной формуле (12.20) зависит не только от отношения $\beta = \frac{p_2}{p_1}$, но непосредственно и от абсолютной величины p_1.

Предельными значениями $\beta = \frac{p_2}{p_1}$ являются:

1. $p_1 = p_2 = p_н$; $\beta = \frac{p_2}{p_1} = 1$.

Это условие говорит о равенстве наружного давления и давления газа внутри резервуара, что физически означает отсутствие процесса истечения, и согласно (12.20) m=0.

2. $p_2 = p_н$=0; $\beta = \frac{p_2}{p_1} = 0$.

Это условие отвечает истечению газа в абсолютную пустоту и в этом случае согласно (12.20) расход газа также должен быть равен нулю (m=0), что не соответствует действительности. При уменьшении β от единицы возникает разность давлений (p_1-p_2) и начинается процесс истечения, чем меньше β, тем больше перепад давлений (p_1-p_2) под которым происходит процесс истечения, и тем больше расход газа, который при некотором отношении давлений β достигает максимального значения, а затем согласно (12.20) начинает уменьшаться.

Следовательно, задаваясь различными значениями $\beta = \dfrac{p_2}{p_1}$, можно по формуле расхода (12.20) построить график зависимости расхода газа от β $m = f\left(\beta = \dfrac{p_2}{p_1}\right)$ (рис. 12.5), пунктирная часть которого не соответствует действительности.

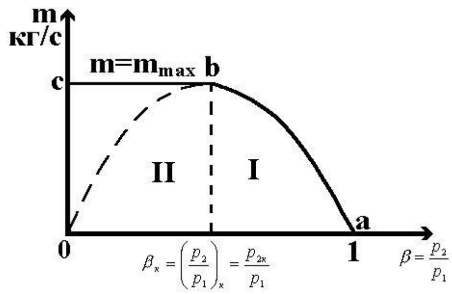

Рис. 12.5

Для определения отношения давлений β, при котором расход газа при истечении достигает максимума m=max, необходимо взять первую производную от этой величины по β и приравнять ее к нулю:

$$\frac{dm}{d\beta} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{dm}{d\left(\frac{p_2}{p_1}\right)} = 0.$$

Итак, по формуле расхода (12.20) имеем

$$m = f\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\upsilon_1}\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)}.$$

Здесь f, p_1, υ_1, κ - величины постоянные и при истечении из резервуара неограниченной емкости не меняются, поэтому выражение

$$A = f^2 2\frac{\kappa}{\kappa - 1}\frac{p_1}{\upsilon_1}$$

представляет собой некоторый постоянный коэффициент, стоящий под корнем вышеприведенного уравнения. Следовательно, формула расхода примет такой вид:

$$m = \sqrt{A\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)}. \qquad (12.21)$$

В уравнении (12.21) переменной величиной является выражение в скобках $\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)$, поэтому для отыскания максимума расхода m_{max} при истечении возьмем первую производную от этой величины и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{d\left(\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right)}{d\beta} = 0,$$

а отношения давлений $\beta = \frac{p_2}{p_1}$, при котором первая производная обращается в нуль, обозначим через β_κ, т.е.

$$\beta_\kappa = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)_\kappa = \frac{p_{2_\kappa}}{p_1}. \qquad (12.22)$$

Это отношение давлений называется критическим. Следовательно, дифференцируя выражение в скобках, получаем

$$\frac{2}{\kappa}\beta_\kappa^{\frac{2}{\kappa}-1} - \left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)\beta_\kappa^{\frac{1}{\kappa}} = 0;$$

$$\frac{2}{\kappa}\beta_\kappa^{\frac{2}{\kappa}-1} = \frac{\kappa+1}{\kappa}\beta_\kappa^{\frac{1}{\kappa}};\ \beta_\kappa^{\frac{1}{\kappa}-\frac{2}{\kappa}-1} = \frac{2}{\kappa+1};\ \beta_\kappa^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{2}{\kappa+1},$$

отсюда

$$\beta_\kappa = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \qquad (12.23)$$

При этом критическом отношении давлений $\beta_\kappa = \frac{p_{2_\kappa}}{p_1}$ расход будет максимальным $m{=}m_{max}$. Как видно, критическое отношение давлений β_κ является функцией лишь показателя адиабаты κ:

$$\beta_\kappa = f(\kappa).$$

Поэтому значение β_κ для газов будет зависеть от их атомности, влияющей на величину показателя адиабаты κ.

Для одноатомного газа κ=1,66 и β_κ =0,49;

для двухатомного газа и воздуха κ=1,4 и $\beta_к$ =0,528;

для трехатомного газа, (и в том числе для перегретого водяного пара и большинства выхлопных газов двигателей) κ=1,3 и $\beta_к$=0,546;

для сухого насыщенного водяного пара κ=1,135 и $\beta_к$=0,577.

Обратимся к анализу зависимости $m = f\left(\beta = \frac{p_2}{p_1}\right)$. При $\beta = \frac{p_2}{p_1} = 1$, p_1=p_2=$p_н$, т.е. при равенстве наружного и внутреннего давлений секундный расход газа из резервуара равен нулю (m=0). В дальнейшем с понижением давления $p_н$ той среды, куда происходит истечение и, следовательно, с уменьшением отношения $\beta = \frac{p_2}{p_1}$, расход газа m увеличивается, что вполне согласуется с физической картиной истечения: расход при истечении должен увеличиваться с увеличением разности давлений (p_1-p_2), при котором происходит процесс истечения. Однако, согласно полученной формуле расхода (12.20), расход газа возрастает, достигает максимума при $\beta_к$, после чего с дальнейшим уменьшением отношения $\beta = \frac{p_2}{p_1}$ расход газа не только не возрастает, а начинает уменьшаться и при p_2=$p_н$=0, т.е. при $\beta = \frac{p_2}{p_1} = 0$, когда истечение происходит в абсолютную пустоту, становится равным нулю (m=0). По самым простым физическим рассуждениям эти результаты не соответствуют действительной физической картине истечения газов и паров. Совершенно ясно физически, что истечение газов и паров не может прекратиться, если давление окружающей среды $p_н$ упадет до нуля. И вообще является невероятным, чтобы при понижении противодавления p_2=$p_н$ расход газа становился бы меньше, чем при большем значении наружного давления.

Поэтому мы с очевидностью приходим к выводу, что в этой области, когда $0<\beta<\beta_к$ (пунктирная кривая 0*b* рис. 12.5), полученная формула расхода (12.20) не дает правильных результатов и не применима.

При экспериментальном исследовании истечения газов и паров через простые цилиндрические или суживающиеся сопла, многочисленный опыт показал, что значения расхода, вычисленные по формуле (12.20), совпадают с экспериментом только лишь для той части значений $\beta = \frac{p_2}{p_1}$, при которых с уменьшением противодавления расход увеличивается, т.е. для отношения $\beta = \frac{p_2}{p_1}$, лежащего в пределах $\beta_к < \beta < 1$. При этом давление p_2 на срезе сопла равно давлению окружающей среды $p_н (p_2 = p_н)$. На рис. 12.5 эта область отмечена как I область истечения. С дальнейшим же понижением давления $p_н$ и уменьшением отношения $\frac{p_2}{p_1} = \beta$ ниже значения $\beta_к$, т.е. когда $0 < \beta < \beta_к$, расход газа через простые цилиндрические или суживающиеся сопла не увеличивается, но и не уменьшается, а остается все время постоянным и равным максимальному m_{max}. Действительная кривая расхода при этом дается линией *a-b-c* , а не линией *a-b*-0 , как это следовало из теоретической формулы (12.20). Линия *a-b-c* дает действительную зависимость $m = f(\beta)$ (см. рис. 12.5) (II область истечения).

Для объяснения расхождения теории с действительным опытом еще в 1839 г. Сен-Венаном и Венцелем была высказана гипотеза, согласно которой в цилиндрическом или суживающемся сопле не может быть получено расширение газа ниже давления $p_{2к} = \beta_к p_1$, как бы не понижалось при этом давление $p_н$, той среды, куда происходит истечение (при p_1=const). То есть при истечении газа и пара через простые цилиндрические или суживающиеся сопла имеем следующее: при значении отношении давлений $\beta = \frac{p_2}{p_1}$ между единицей и $\beta_к$ ($\beta_к < \beta < 1$) давление на срезе сопла p_2 равно давлению окружающей среды $p_н (p_2 = p_н)$. Следовательно при p_1=const изменение β происходит только за счет изменения давления p_2, равного давлению окружающей среды $p_н$. Значит перепад давления (p_1-p_2), под которым происходит процесс истечения газа так же изменяется (p_1-p_2)=var, т.к. p_2=var. Чем больше перепад давлений (p_1-p_2), тем больше скорость и массовый расход газа при истечении. При отношении давлений $0 < \beta < \beta_к$ давление на срезе сопла больше давления окружающей среды ($p_2 > p_н$) и определяется соотношением (12.23)

$$\beta_к = \frac{p_{2_к}}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Следовательно

$$p_2 = p_{2к} = \beta_к p_1. \qquad (12.24)$$

Здесь при p_1=const, $p_н$=var, $p_{2к} = \beta_к p_1 = \text{const}$ и, следовательно, разность давлений, под которой происходит процесс истечения, тоже будет постоянной $(p_1 - p_{2к}) = \text{const}$. Дальнейшее понижение $p_н$ ниже значения $p_{2к}$ уже никакого влияния на этот перепад не оказывает, при этом и расход газа и скорость истечения изменяться не будут:

$$m = m_{max},$$

а скорость истечения становится равной так называемой критической скорости: $W = W_к$=const, равной местной скорости звука a,

$$W_к = \sqrt{кRT}\ .$$

Эта гипотеза впоследствии была подтверждена многочисленными опытами.

На рис 12.6. представлены графики скорости истечения и расхода газа через сужающееся сопло или простое цилиндрическое отверстие в зависимости от величины β.

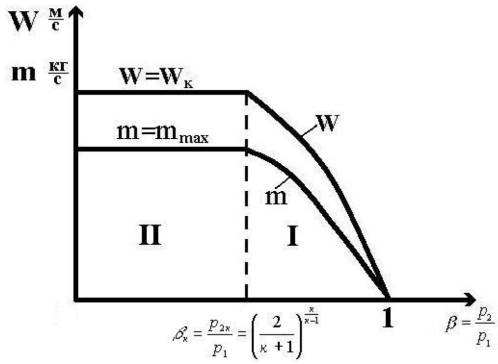

Рис. 12.6

Таким образом, основную формулу расхода (12.20) можно считать правильной и для II области истечения, когда $0<\beta<\beta_к$, если понимать в ней под p_2 давление $p_{2к} = \beta_к p_1$ и перепад давлений, под которым происходит процесс истечения, равный $(p_1 - p_{2к})$.

Физическое объяснение всего описанного явления лежит в характере распространения изменений (волн) давления в газовой среде.

Как известно из физики, всякое внезапное изменение давления, произведенное в какой-либо точке неподвижной газовой среды, распространяется в ней со скоростью W_k, равной скорости распространения звука в данной среде.

Таким образом, волны повышенного или пониженного давления распространяются по газовой среде со скоростью звука.

Теперь рассмотрим газодинамическую картину развития процесса истечения.

Процесс истечения начинается при понижении $p_2 = p_н$, когда $p_1 > p_2$ (рис. 12.7).

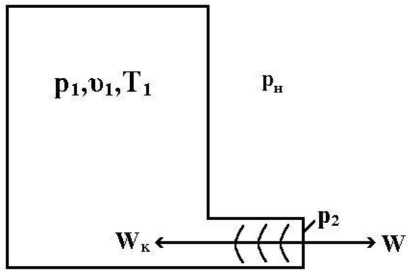

Рис. 12.7

При этом волна пониженного внешнего давления распространяется по газу, находящемуся в резервуаре, со скоростью $W_к$ и в результате возникает разность давления (p_1-p_2), из-за которой и происходит процесс истечения.

Так как распространение изменений давления происходит в движущейся среде, то надо различать частные скорости распространения волн пониженного давления по газу. Как только волна пониженного давления начинает распространяться по газу в резервуаре со звуковой скоростью $W_к$, сейчас же возникает разность давления (p_1-p_2), из-за которой начинается обратное движение газа из устья сопла со скоростью истечения W, стремящееся унести волну пониженного давления в обратном направлении к устью сопла. Значит, $W_к$ в этом случае будет *относительной* скоростью распространения волны пониженного давления по газу, а скорость истечения W будет *переносной* скоростью этой волны. *Абсолютная* же скорость распространения волны пониженного давления W_{abc} относительно неподвижного выходного сечения сопла будет равна разности относительной скорости $W_к$ и переносной скорости W:

$$W_{abc}=W_к-W. \qquad (12.25)$$

При дальнейшем уменьшении p_2 переносная скорость истечения газа будет возрастать, так что W_{abc}, будет уменьшаться, поскольку уменьшается разность $W_к$-W.

Наконец, когда давление p_2 понизится до величины, при которой $W=W_к$, абсолютная скорость волны пониженного давления относительно неподвижного выходного сечения сопла станет равна нулю W_{abc}=0, что физически означает невозможность распространения волны пониженного давления внутри сопла и, следовательно, дальнейшее уменьшение внешнего давления $p_н$ уже не будет влиять на процесс истечения. При этом давление в выходном сечении сопла станет равно критическому, т.е. $p_{2к}=\beta_к p_1$.

Таким образом, критическое отношение давлений $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)_к = \beta_к$ отвечает условию равенства переносной скорости истечения W и относительной местной скорости звука $W_к$ в выходном сечении сопла (W=$W_к$). Это критическое отношение давлений можно также вычислить из указанного равенства.

С одной стороны, местная скорость звука в выходном сечении сопла определится по формуле

$$W_к = \sqrt{\kappa p_{2к} \upsilon_{2к}} = \sqrt{\kappa R T_{2к}}, \qquad (12.26)$$

с другой стороны, согласно сказанному выше, при W=$W_к$

$$W_к = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1} R T_1 \left(1 - \beta_к^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}. \qquad (12.27)$$

Следовательно, согласно (12.26) и (12.27):

$$\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1} R T_1 \left(1 - \beta_к^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} = \sqrt{\kappa R T_{2к}};$$

$$2\frac{\kappa}{\kappa - 1} R T_1 \left(1 - \beta_к^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right) = \kappa R T_{2к}.$$

Решая это алгебраическое уравнение относительно $\beta_к$ и учитывая, что

$$\frac{T_{2к}}{T_1} = \left(\frac{p_{2к}}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \beta_к^{\frac{\kappa-1}{\kappa}},$$

получаем

$$\beta_к = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}},$$

т.е. то же самое значение, которое мы получили ранее, решая общую задачу математического нахождения точки максимума расхода.

Таким образом, из всего сказанного следует, что полученное критическое отношение давления при истечении $\beta_к = \frac{p_{2_к}}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$ делит весь процесс истечения на две принципиально различные области.

I область - область малых перепадов давления $\beta_к$<β<1. Эта область называется подкритической или дозвуковой областью истечения.

II область - область больших перепадов давлений $0<\beta<\beta_к$. Эта область называется надкритической или сверхзвуковой областью истечения.

12.5. Истечения из сужающихся сопел

I область – подкритическая (дозвуковая) область истечения. В этой области $\beta_к < \beta = \frac{p_2}{p_1} < 1$ (область малых перепадов давлений). Здесь при истечении происходит полное расширение газов, давление на срезе сопла равно давлению окружающей среды $p_2=p_н$, т.е. весь перепад давлений (p_1-p_2) целиком срабатывается в кинетическую энергию вытекающей струи газа $(p_1 - p_2) \rightarrow \frac{W^2}{2}$. На рис. 12.8 в *pυ*-, *hs*- координатах показана располагаемая работа при истечении газа в данной области.

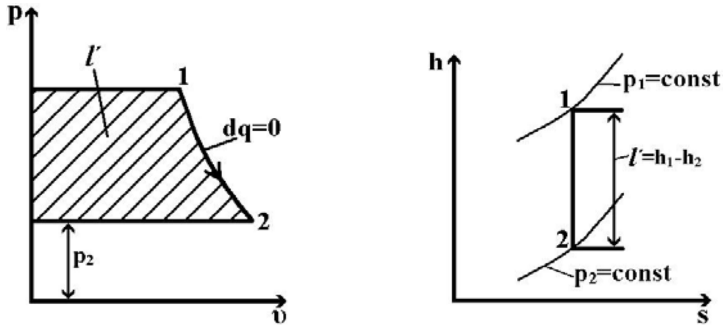

Рис. 12.8

Характер изменения параметров газа по длине сопла показан на рис. 12.9.

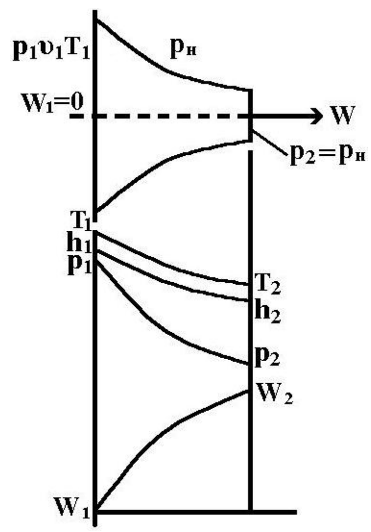

Рис. 12.9

Для этой области истечения будут справедливы все полученные ранее формулы скорости (12.14), (12.15) и расхода газа (12.19), (12.20) при истечении. Скорость истечения будет определяться так:

$$W = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa-1}p_1\upsilon_1\left(1-\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$$

или

$$W = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa-1}RT_1\left(1-\beta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)},$$

т.е. в данной области истечения

$$W \sim \left(\sqrt{RT_1};\frac{1}{\beta}\right). \qquad (12.28)$$

Скорость истечения W в этой области возрастает при увеличении газовой постоянной R и температуры газа в резервуаре T_1, и уменьшении $\beta = \frac{p_2}{p_1}$. Секундный расход газа определяется

$$m = f\sqrt{2\frac{\kappa}{k-1}\frac{p_1}{\upsilon_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]}.$$

Так как

$$\frac{p_1}{\upsilon_1} = \frac{p_1^2}{p_1\upsilon_1} = \frac{p_1^2}{RT_1},$$

то

$$m = f\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p_1^2}{RT_1}\left[\beta^{\frac{2}{\kappa}} - \beta^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}\right]}. \qquad (12.29)$$

Следовательно,

$$m \sim \left(\frac{p_1}{\sqrt{RT_1}};\frac{1}{\beta}\right), \qquad (12.30)$$

т.е. расход газа уменьшается при возрастании температуры газа T_1 в резервуаре и газовой постоянной R, увеличивается при росте p_1 и уменьшении $\beta = \frac{p_2}{p_1}$.

На рис. 12.10 представлена зависимость скорости истечения и секундного расхода от отношения давлений (W, $m=f(\beta)$), в исследуемой области истечения.

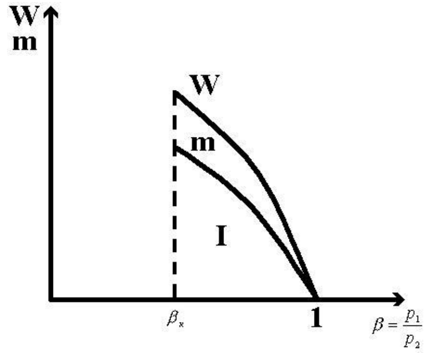

Рис. 12.10

Рассмотрим пример качественного анализа процесса истечения. Сопоставим скорости и расходы газа при истечении из трех сосудов неограниченной емкости, площадь выходного сечения сопла во всех сосудах одинакова (рис. 12.11.). Сначала выясним, в какой области происходит процесс истечения. Для этого определим отношение давлений $\frac{p_2}{p_1}$ в каждом сосуде и сравним с $\beta_к$. Для воздуха $\beta_к$=0,528. Во всех трех сосудах $\beta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$, следовательно, $\beta_к<\beta<1$ - I область истечения (подкритическая).

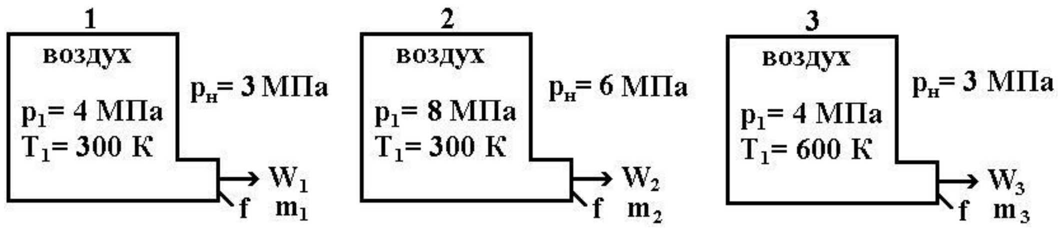

Рис. 12.11

Для этой области истечения

$$W \sim \left(\sqrt{RT_1}; \frac{1}{\beta} \right);$$

$$m \sim \left(\frac{p_1}{\sqrt{RT_1}}; \frac{1}{\beta} \right).$$

Сопоставим скорости и расходы в сосудах 1, 2 и 1, 3. Согласно (12.28) и (12.30) имеем

$$m_1<m_2; \; m_1>m_3;$$

$$W_1=W_2; \; W_1<W_3.$$

<u>II область - надкритическая (сверхзвуковая) область истечения</u>. В этой области $0 \le \beta \le \beta_k$ (область больших перепадов давлений). В этом случае при истечении не происходит полного расширения газов в сужающемся сопле, давление в выходном сечении сопла p_2 больше давления окружающей среды $p_н (p_2 > p_н)$ и равно $p_{2_к} = p_1 \beta_к$, процесс истечения идет под постоянным перепадом давлений (p_1-$p_{2к}$). Характерным для этой области истечения является установление критических параметров $p_{2к}$, $T_{2к}$, $\upsilon_{2к}$, $h_{2к}$ на срезе сопла, не зависящих от параметров окружающей среды. Скорость истечения при этом постоянна и равна местной скорости звука $W_к$, а секундный расход газа достигает своего максимального значения $m = m_{max}$ и тоже остается постоянным при p_1 и T_1=const.

Итак, в этой области больших перепадов давления в кинетическую энергию вытекающей струи срабатывается не весь перепад давления (p_1-$p_н$), а только критический перепад:

$$\left(p_1 - p_{2_к}\right) \to \frac{W_к^2}{2}.$$

Поскольку $p_{2_к} = p_1 \beta_к$, а $\beta_к = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = \mathrm{const}$, то при заданном p_1=const, $p_{2к}$=const. Если p_1 возрастает, то и $p_{2к}$ возрастает, но так, что отношение $\frac{p_{2_к}}{p_1} = \beta_к$ всегда будет равно критическому.

На рис. 12.12 в $p\upsilon$-, hs- координатах показана располагаемая работа сопла в данной области истечения. Так как в надкритической области истечения давление в выходном сечении сопла $p_{2к} > p_н$, то газ или пар выходит из выходного отверстия не строго параллельными струями, как это было в подкритической области, когда в выходном сечении устанавливается давление p_2, равное давлению окружающей среды, а под некоторыми углами δ (рис. 12.13). Эти углы δ пропорциональны разности давлений ($p_{2к}$-$p_н$). В этом случае газ дополнительно расширяется от давления $p_{2к}$ до давления внешней среда $p_н$ за пределами выходного отверстия в атмосфере. Это расширение уже является бесполезным с точки зрения превращения его в кинетическую энергию вытекающей струи. Работа расширения от $p_{2к}$ до $p_н$ идет, по существу, на создание вихревых и турбулентных движений газа в окружающей среде.

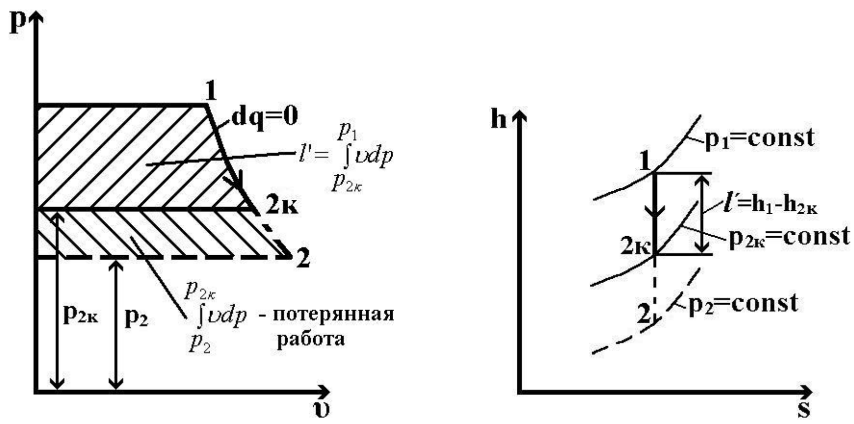

Рис. 12.12

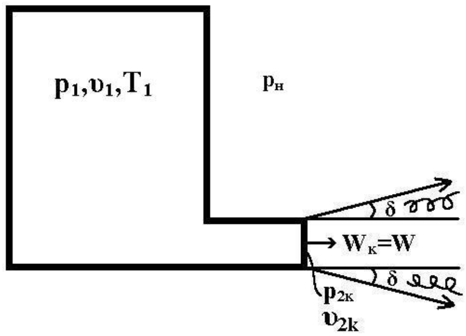

Рис. 12.13

В координатах *pυ* эта не использованная, потерянная работа, пошедшая на завихрение газа в окружающей среде, представится площадью, лежащей между давлениями $p_{2к}$ и p_2 (рис.12.12).

Изменение параметров газа по длине сопла в этой области истечения представлено на рис 12.14.

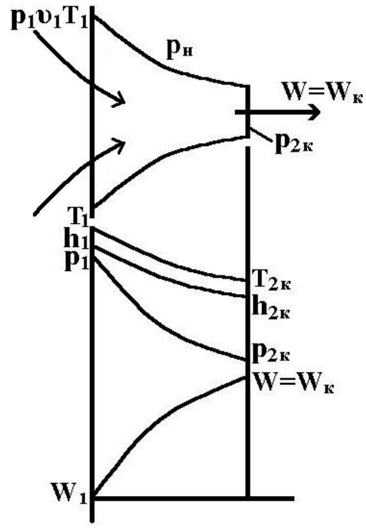

Рис. 12.14

Для получения расчетных формул для скорости истечения и расхода газа в надкритической области истечения в соответствующие выражения скорости истечения

(12.15) и секундного расхода (12.20) вместо отношения давлений $\frac{p_2}{p_1}$ надо подставить критический перепад давлений $\beta_к$ согласно соотношению

$$\beta_к = \frac{p_{2_к}}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Следовательно, скорость истечения в надкритической области определится следующим образом: в уравнение скорости истечения газа (12.15) подставляем вместо отношения давлений β значение $\beta_к$, получаем

$$W = W_к = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa+1}p_1\upsilon_1} \tag{12.31}$$

или

$$W_k = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa+1}RT_1}\,. \tag{12.32}$$

Итак,

$$W_к \sim \left(\sqrt{RT_1}\right), \tag{12.33}$$

т.е. в надкритической области истечения скорость истечения зависит лишь от рода рабочего тела (величины R) и начальной температуры газа T_1; с увеличением газовой постоянной и начальной температуры газа скорость истечения возрастает.

Аналогичным образом получим формулу расхода газа. В ранее полученную формулу (12.20) подставим вместо отношений β значение $\beta_к$, т.к. при

$$\beta_к = \frac{p_{2_k}}{p_1} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$m = m_{max},$$

получим

$$m_{\max} = f\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa+1}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}}\frac{p_1}{\upsilon_1}}\,. \tag{12.34}$$

По-прежнему заменяя

$$\frac{p_1}{\upsilon_1} = \frac{p_1 p_1}{\upsilon_1 p_1} = \frac{p_1^2}{RT_1},$$

получаем

$$m_{\max} = f\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa+1}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}}\frac{p_1^2}{RT_1}}\,. \qquad (12.35)$$

Здесь

$$m \sim \left(\frac{p_1}{\sqrt{RT_1}}\right), \qquad (12.36)$$

т.е. в данной области истечения расход газа зависит от начального давления p_1, начальной температуры газа T_1 и рода рабочего тела R, причем расход будет возрастать с увеличением p_1 и уменьшением R и T_1.

На рис. 12.15 представлена общая зависимость скорости истечения и секундного расхода от отношения давлений W, $m=f(\beta)$.

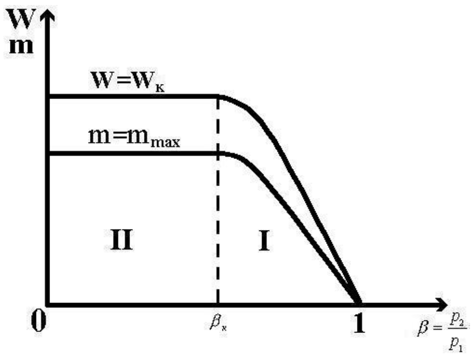

Рис. 12.15

Рассмотрим пример качественного анализа процесса истечения. Сопоставим скорости и расходы газа при истечении из двух сосудов неограниченной емкости, площадь выходного сечения в обоих сосудах одинакова (рис. 12.16). Определим область истечения: в первом сосуде $\beta_1 = \frac{p_н}{p_1} = \frac{1}{10}$; во втором сосуде $\beta_2 = \frac{p_н}{p_1} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$, но т.к. для азота $\beta_к$=0,528, то в обоих сосудах имеем надкритический случай истечения $(\beta_1\ и\ \beta_2) < \beta_к$, при котором β уже не влияет на скорость истечения и расход.

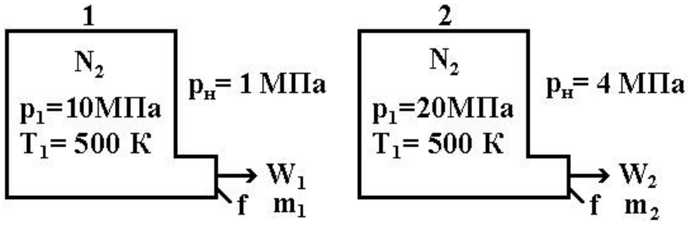

Рис. 12.16

Согласно (12.33) и (12.36) имеем

$$W_1=W_2;$$

$$m_1 < m_2.$$

12.6. Использование полного перепада давлений в надкритической области истечения. Истечение из сопла Лаваля

Из изложенного было видно, что при истечении газа или пара из простых цилиндрических или сужающихся сопел в случае больших перепадов давлений и, следовательно, малых значений β, когда $\beta = \frac{p_н}{p_1} < \beta_к$, скорость истечения не может превышать местной скорости звука и при этом только часть энергии вытекающей струи газа или пара, соответствующая перепаду давлений от p_1 до $p_{2к}$, может быть превращена в полезную кинетическую энергию этой струи:

$$\left(p_1 - p_{2_к}\right) \rightarrow \frac{W_к^2}{2}.$$

Разность же давлений ($p_{2к}$-p_2), - где давление p_2 равно давлению окружающей среды $p_н$ является потерянной и идет на вихреобразования газа в окружающей среде и не может быть превращена в полезную для реактивного двигателя кинетическую энергию вытекающей струи. Это явление долгое время тормозило развитие паровых турбин, т.е. тех тепловых двигателей, у которых рабочий процесс основан на истечении пара. Так термодинамические расчеты показывают, что при истечении водяного пара в паровой турбине через простые суживающиеся сопла, только $\frac{1}{25} \div \frac{1}{35}$ часть всей располагаемой энергии пара превращается в кинетическую энергию вытекающей струи пара, остальная же часть энергии пара остается неиспользованной. Вопрос о повышении работоспособности пара и газа при истечении при больших перепадах давления был решен шведским инженером Лавалем, который присоединил к простому цилиндрическому насадку расширяющееся сопло.

Присоединение расширяющейся части к сужающейся предоставляет газу или пару возможность дальнейшего расширения от давления $p_{2к}$ до давления окружающей среды p_2=$p_н$. Таким образом, в этой расширяющейся части и происходит требующиеся для увеличения скорости истечения дальнейшее падение давления и разность давлений ($p_{2к}$-p_2) срабатывается в дополнительное увеличение скорости истечения выше критической скорости, т.е. выше скорости звука в наиболее узком сечении сопла (W>$W_к$). Таким образом, расширяющаяся часть сопла создает те условия для получения сверхзвуковых скоростей, которые не могут быть созданы одним понижением давления в среде, куда происходит истечение. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь расчетный режим работы сопла Лаваля, т.е. когда давление в выходном сечении сопла p_2 равно давлению $p_н$ окружающей среды. Итак, при истечении из сопла Лаваля происходит процесс полного расширения, давление на срезе сопла p_2 равно давлению $p_н$ окружающей среды $p_2=p_н$.

На рис. 12.17 показана располагаемая работа сопла Лаваля в *pυ*-, *hs*- координатах. Характер изменения параметров газа по длине сопла Лаваля показан на рис. 12.18.

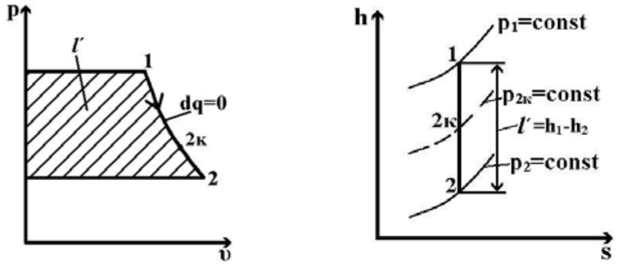

Рис. 12.17

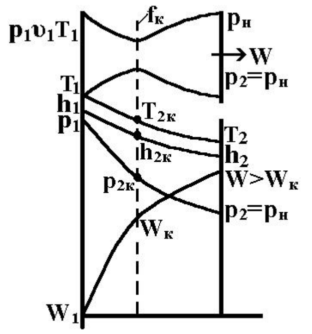

Рис. 12.18

Скорость истечения в выходном сечении сопла определится по общей формуле (12.14) или (12.15), когда весь перепад давлений срабатывается в кинетическую энергию вытекающей струи:

$$W=\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa-1}p_1\upsilon_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}$$

или

$$W=\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa-1}RT_1\left[1-\beta^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]}.$$

Следовательно,

$$W \sim \left(\sqrt{RT_1}; \frac{1}{\beta} \right), \tag{12.37}$$

т.е скорость истечения из сопла Лаваля зависит от рода рабочего тела (R) начальной температуры газа T_1 и отношения давлений $\beta = \frac{p_2}{p_1}$ и увеличивается с ростом газовой постоянной R и начальной температуры газа T_1 и уменьшением отношения давлений β. При уменьшении давления окружающей среды $p_н$ скорость истечения из сопла Лаваля будет возрастать и при $p_н$=0 (истечение в вакуум p_2=0) скорость достигнет максимального значения:

$$W_{\max} = \sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa - 1} RT_1}\,. \tag{12.38}$$

С термодинамической точки зрения постановка расширяющегося сопла позволяет получить дополнительную работу $l'_{con} = \int_{p_2}^{p_{2к}} \upsilon dp$, которая идет на дополнительное увеличение скорости истечения газа или пара. Конечно, постановка расширяющегося сопла может увеличивать только скорость истечения газа или пара и тем самым повысить кинетическую энергию каждого килограмма вытекающего газа. Расход же газа от постановки расширяющегося сопла не изменяется, т.к. лимитирующее узкое сечение $f_к$ остается при этом без изменения. Расход газа остается постоянным и равным максимальному расходу m=m_{max} согласно формуле (12.36):

$$m_{\max} = f\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa+1}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{2}{\kappa-1}} \frac{p_1^2}{RT_1}}\,.$$

Следовательно, для случая истечения из сопла Лаваля

$$m \sim \left(\frac{p_1}{\sqrt{RT_1}} \right), \tag{12.39}$$

т.е. при истечении из сопла Лаваля расход газа зависит от начального значения давления p_1 и начальной температуры газа T_1 и рода рабочего тела R; увеличивается с увеличением начального давления p_1 газа в резервуаре и уменьшением газовой постоянной R и начальной температуры газа T_1. Зависимость скорости истечения и расхода газа от отношения давлений β при истечении из сопла Лаваля показана на рис. 12.19.

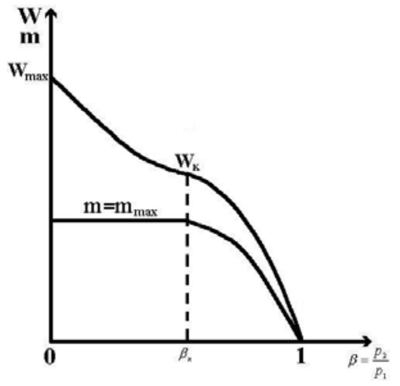

Рис. 12.19