ТУРБУЛЕНТНЫЙ КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН

1. Ламинарный и турбулентный режимы течения

В 1883 г. Рейнольдс впервые показал, что существует два основных вида течения. Движение жидкости может быть ламинарным или турбулентным.

Ламинарным движением жидкости называется такое движение, при котором частицы жидкости следуют по траекториям, представляющим собой плавные кривые, определяемые видом твердых границ, ограничивающих движение жидкости.

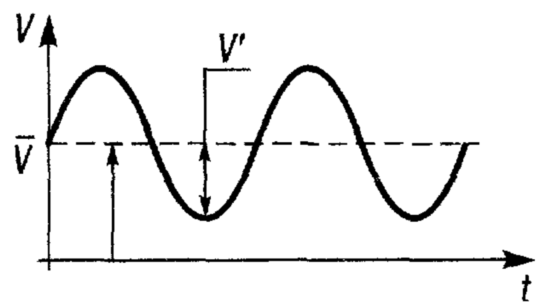
Движение жидкости, при котором траектории движения частиц быстро изменяются во времени, при этом изменение этих траекторий может иметь случайный характер, называется *турбулентным*.

Для турбулентного режима актуальное значение скорости в любой момент времени может быть записано как

$$V = \bar{V} + V' ,$$

где V — актуальное значение скорости; $\bar{V}$ — средняя во времени величина скорости; V' — колебание (флуктуация) скорости.

Турбулентный поток называется стационарным, когда $\bar{V}$ не меняется во времени, а среднее значение пульсаций скорости за достаточно длительный промежуток времени равно нулю: $\overline{V'} = 0$.



Зависимость актуальной скорости от времени

Конвективный теплообмен усиливается хаотическими движениями частиц газа или жидкости в турбулентном потоке. Поэтому теплообмен в турбулентном потоке происходит гораздо интенсивнее

Рейнольдсом был найден закон подобия, согласно которому переход происходит примерно при одном и том же значении числа Re, называемым критическим членом Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_{\text{кр}} = \left(\frac{u_{\text{ср}} d}{\nu}\right)_{\text{кр}}, \qquad (\ .1)$$

где $u_{\text{ср}}$ — средняя по сечению скорость течения; d — диаметр трубы; ν — коэффициент кинематической вязкости.

Значение критического числа Рейнольдса существенно зависит от условий входа в трубу, степени шероховатости и др. и может колебаться в диапазоне $2300 < \mathrm{Re}_{\text{кр}} < 20\,000$. Однако, если $\mathrm{Re} < 2300$, то течение всегда ламинарное.

Переход ламинарного течения в турбулентное происходит не мгновенно. При достижении значений Re, близких к критическим, наступает режим перемежающегося течения, когда течение в трубе становится попеременно то ламинарным, то турбулентным. Поэтому область перехода занимает очень большую часть, измеряющуюся иногда тысячами диаметров трубы.

Явление перехода было обнаружено также и в пограничном слое на обтекаемом теле. Наиболее просто переход наблюдать на плоской пластине. С увеличением расстояния x от передней кромки пластины увеличивается число Рейнольдса:

$$\mathrm{Re}_x = u_1 \rho_1 x / \mu_1. \qquad (\ 2)$$

При достижении некоторого критического значения ($\mathrm{Re}_x = \mathrm{Re}_{\text{кр}}$) наблюдается изменение режима течения, сопровождающееся резким утолщением пограничного слоя и деформацией распределения скорости и температуры. Одновременно возрастают коэффициенты теплоотдачи и трения, а также изменяется характер их зависимости от x

Тщательные измерения, проведенные на гладких пластинах при $M \cong 0$, позволили установить нижнюю границу критического числа Рейнольдса в диапазоне $3 \cdot 10^5 \ldots 5 \cdot 10^5$. Верхняя граница, достигнутая в специальных опытах в особенно равномерном потоке, находится в диапазоне $3 \cdot 10^6 \ldots 4 \cdot 10^6$.

2. Осредненное и пульсационное движение

Исследования турбулентного потока показывают, что в каждой фиксированной точке скорость, давление и температура не остаются постоянными по времени, а очень часто изменяются и притом неравномерно. Такие изменения скорости, давления и температуры называются пульсациями и являются наиболее характерным свойством турбулентного течения. Элементы жидкости, пульсирующие в потоке, представляют собой крупные макроскопические образования жидкие комки, или моли.

Значения пульсаций составляют, как правило, всего несколько процентов от средних значений скорости, но очень сильно влияют на развитие течения жидкости. Пульсационное движение, накладывающееся на главное движение, настолько сложно, что его теоретический расчет пока не представляется возможным. Поэтому закономерности развитого турбулентного течения приходится определять для осредненных по времени величин.

Для математического исследования течение делят на среднее и пульсационное. Обозначим осредненные по времени значения скорости $\bar{u}$, $\bar{v}$, давления $\bar{p}$, температуры $\overline{T}$*, а пульсационные соответственно — u', v', p', $\overline{T}'$ Тогда мгновенные значения можно записать в виде $u = \bar{u} + u'$; $v = \bar{v} + v'$; $p = \bar{p} + p'$; $T = \overline{T} + T'$.

Осредненное значение продольной составляющей скорости может быть определено как

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta\tau} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} u \, d\tau. \qquad (3)$$

Чтобы осреднение не зависело от времени, необходимо для осреднения брать достаточно большой интервал времени τ. Точно также определяются средние значения всех параметров потока

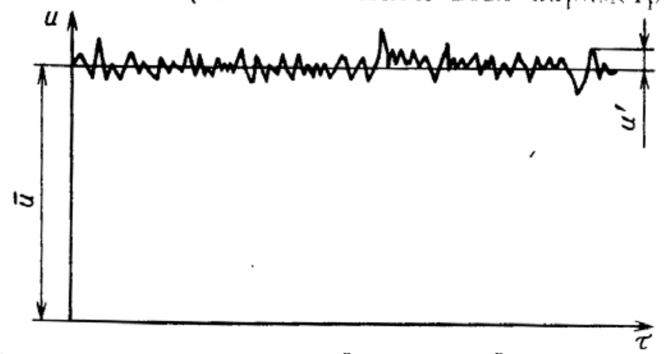
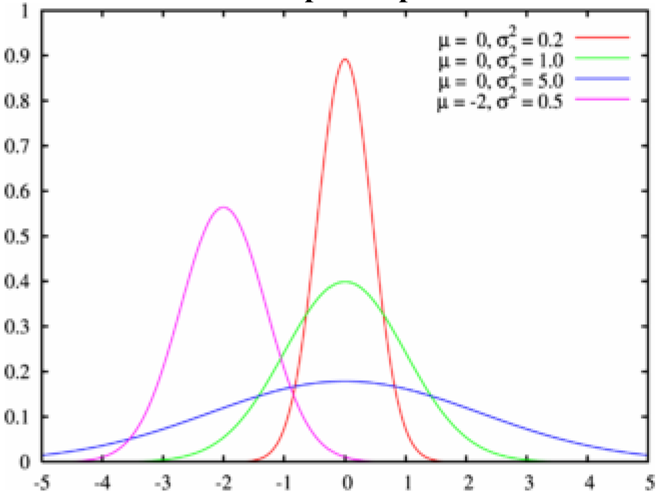


Рис. Вид осциллограммы пульсаций продольной составляющей скорости

3.Использование теории вероятностей



Функция плотности вероятностей $f_X(x)$. Например, нормальное распределение имеет вид:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4}$$

Вероятность того, что случайная величина x находится в пределах $x_1 < x < x_2$ равна

$$\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx \tag{5}$$

Осреднение по времени:

$$\bar{U} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} U(t)dt \tag{6}$$

где Δt - достаточно большой промежуток времени по сравнению с характерным временем турбулентных пульсаций, но много меньше характерного времени решения задачи.

Математическое ожидание случайной величины (Среднее по ансамблю)

$$M(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} U \cdot f_U(U)dU \tag{7}$$

Существует так называемая эргодическая теорема (или в более мягкой форме гипотеза), гласящая, что среднее по ансамблю частиц и среднее по времени для одной частицы равны.

$$M(U) \approx \bar{U} \tag{8}$$

Мы не будем в дальнейшем различать эти величины

Пульсация

$$U=\bar{U}+U' \text{ , } U' \text{ - пульсационная составляющая} \tag{9}$$

Дисперсия случайной величины

$$D(U)=M\left[\left(M(U)-U\right)^2\right]=M\left(U'^2\right)=\overline{U'^2} \tag{10}$$

Две случайные величины независимы, если

$$M(uv)=M(u)M(v) \text{ , т.е. } \overline{uv}=\bar{u}\cdot\bar{v} \tag{11}$$

Ковариация двух случайных величин

$$\operatorname{cov}(u,v)=M\left[\left(u-M(u)\right)\left(v-M(v)\right)\right]=M(uv)-M(u)M(v)=\overline{u'v'} \tag{12}$$

Очевидно, что для независимых случайных величин ковариация равна 0
Из (12) следует:

$$M(uv)=\operatorname{cov}(u,v)+M(u)M(v) \text{ или } \overline{uv}=\overline{u'v'}+\overline{uv} \tag{13}$$

4. Пример несжимаемого течения в пограничном слое

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{14}$$

Осредним с учетом (13)

$$\frac{\partial(\rho\bar{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\overline{u'^2})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\overline{u'v'})}{\partial y}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right), \tag{15}$$

Величиной $\overline{u'^2}$ в пограничном слое можно пренебречь, а $\overline{u'v'}$ имеет физический смысл дополнительного трения, возникающего в турбулентном пограничном слое.
Одна из основных гипотез, используемых в теории турбулентных течений, предполагает, что турбулентное трение по своей сути аналогично молекулярному. Отсюда:

$$\rho\overline{u'v'}=-\mu_T\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}, \tag{16}$$

где μ_T - коэффициент дополнительной турбулентной вязкости.

Окончательно:

$$\frac{\partial(\rho\bar{u}^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{v})}{\partial y}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_T)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right), \tag{17}$$

или

$$\rho\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\rho\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mu+\mu_T)\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right), \tag{18}$$

5. **Турбулентная вязкость**

Использование турбулентной вязкости

$$\overline{\rho \widetilde{U_i''U_j''}} = -\mu_T \left(\frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x_i} \right), \qquad (19)$$

Аналогия с молекулярной

$$\mu \sim \rho \bar{v} l, \qquad (20)$$

$$\mu_T \sim \rho \sqrt{k} L, \qquad (21)$$

k - кинетическая энергия турбулентности

Скорость диссипации

Достаточно мелкомасштабная структура турбулентных потоков обладает рядом универсальных закономерностей, установленных в 1941 г. А.Н. Колмогоровым и А.М. Обуховым.

Если ср. скорость потока U существенно меняется на масштабе L, то для масштабов $r \ll L$, согласно первой гипотезе подобия Колмогорова, статистич. характеристики разностей полей в двух точках, разделенных расстоянием r, будут однородны и изотропны, а структура потока определяется лишь кинематич. вязкостью и скоростью диссипации кинетич. энергии ε на ед. массы (величину можно оценить как $k^{3/2}/L$)

$$\mu_T = C_D \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \qquad (22)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\left[\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right]\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right]} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dk}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\mu_T}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + \mu_T \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho\varepsilon, \\ \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + \frac{C_{\varepsilon 1}\mu_T \varepsilon}{k}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\rho C_{\varepsilon 2}\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \qquad (24)$$

6. Расчет теплообмена в турбулентном пограничном слое

$$\mathrm{Nu}_w = 0{,}0296\, \mathrm{Re}_w^{0,8}\, \mathrm{Pr}^{0,43} (T_w/T_e)^{0,4} (1 + r\omega)^{0,11}.$$

7. Порядок расчета теплообмена.

Подведем итог.

Как правило, заданы: температура стенки T_w, параметры внешнего потока – скорость u_1 (или число Маха M_1), температура T_1, давление p_1. Если задана высота полета, давление и температура внешнего потока определяются по стандартной атмосфере (см. , например, http://k204.net/exams/test/calculator.htm)

Для расчета плотности теплового потока при течении вдоль плоской поверхности в точке с продольной координатой x необходима следующая последовательность шагов.

1) Определяем, какой режим течения в данной точке, ламинарный или турбулентный. Для этого рассчитываем значение критерия Re

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho_1 u_1 x}{\mu_1}, \tag{25}$$

При этом плотность ρ_1 и вязкость μ_1 определяются по температуре и давлению внешнего потока. Для воздуха можно использовать онлайновый расчет свойств воздуха: http://k204.net/exams/test/air_prop3.htm

2) Если значение Re_x меньше критического, то режим течения принимается ламинарным, больше критического – турбулентным.
Значение $\mathrm{Re}_{кр}$, как правило, принимается равным

$$\mathrm{Re}_{кр} = 5 \cdot 10^5, \tag{25}$$

3) Определяем T_e температуру теплоизолированной стенки или эффективную температуру

$$T_e = T_1 + r\frac{u_1^2}{2C_p} = T_1\left(1 + r\frac{k-1}{2}M_1^2\right) = T_1\left(1 + r\omega\right), \tag{26}$$

где $\omega = \dfrac{(k-1)}{2}M_1^2 = \dfrac{u_1^2}{2C_p T_1}$;

r - коэффициент восстановления температуры, для ламинарного пограничного слоя $r = \sqrt{\mathrm{Pr}}$, для турбулентного - $r = \mathrm{Pr}^{1/3}$;

$M_1 = \dfrac{u_1}{a_z}$ число, a_z - скорость звука

4)Критериальное уравнение для расчета теплообмена на пластине имеет вид:
при ламинарном режиме течения

$$Nu_w = 0.332\sqrt{\mathrm{Re}_w}\,\mathrm{Pr}_w^{1/3}\,K \tag{26}$$

при турбулентном режиме течения

$$Nu_w = 0.0296\,\mathrm{Re}_w^{0.8}\,\mathrm{Pr}_w^{0.43}\,K_T \tag{27}$$

где K, K_T - факторы, учитывающие сжимаемость;
в качестве определяющей температуры используется T_w, определяющего размера - координата x ,т.е.

$$\mathrm{Re}_w = \frac{\rho_w u_1 x}{\mu_w} \tag{28}$$

Приближенные формулы для K, K_T могут быть получены разными способами.

Например,

$$K = \left(\frac{\mu^* \rho^*}{\mu_w \rho_w}\right)^{1/3} \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu^* \rho^*}\right)^{1/15 \cdot T_w / T_e}, \tag{28}$$

где индекс «*» означает, что данная температура относится к T^* - максимальной температуре в пограничном слое.

Если $T_w > T_e$, $T^* = T_w$;

если $T_w < T_e$

$$T^* = T_w + \frac{1}{4}\left(T_{01} - T_{we}\right)\left(\frac{1 - T_w / T_1}{\omega} + 1\right) \tag{29}$$

Для турбулентной поправки можно использовать формулу:

$$K_T = \left(T_w / T_e\right)^{0.4} \left(1 + r\omega\right)^{0.11} \tag{30}$$

5) После определения Nu_w вычисляем коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = \frac{Nu_w \lambda_w}{x} \tag{31}$$

6) Окончателтная формула для определения местного значения плотности иеплового потока имеет вид

$$q_w = \alpha\left(T_e - T_w\right) \tag{32}$$

Для тел произвольной формы можно использовать такую же методику расчета, только вместо реальной продольной координаты x использовать эффективную длину $x_{эф}$, которая приблизительно может быть подсчитана по следующим формулам.

Для ламинарного пограничного слоя:

$$x_{эф} = \frac{\int_0^x \rho_w u_1 R^2 dx}{\rho_w u_1 R^2}, \tag{33}$$

где R - текущий радиус осесимметричного тела; для плоских тел $R = 1$.

Для турбулентного пограничного слоя:

$$x_{эф} = \frac{\int_0^x \rho_w u_1 R^{5/4} dx}{\rho_w u_1 R^{5/4}}, \tag{34}$$