

ТЕПЛООБМЕН ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА

1. Вторая форма уравнения энергии

Для того чтобы лучше представить физическую картину теплообмена при переходе от малых скоростей к большим, приведем уравнение энергии к новому виду.

$$\rho u C_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v C_p \frac{\partial T}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} C_p \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

Умножим (2) на u и сложим с уравнением энергии (1)

$$u \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(u \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right) - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) = -u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right] - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4)$$

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(C_p T + \frac{u^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(C_p T + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left(C_p T + \frac{u^2}{2} \right) + \mu \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial y} (C_p T) + \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} - \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} - \mu \right) \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right] \quad (5)$$

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} \left(C_p T + \frac{u^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} \left(C_p T + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \left(C_p T + \frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right] \quad (6)$$

$$\rho u C_p \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho v C_p \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu C_p}{\text{Pr}} \frac{\partial T_0}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial y} \right], \text{ где } T_0 = T + \frac{u^2}{2C_p} \quad (7)$$

Наиболее интересный случай получается, когда $\text{Pr} = 1$

$$\rho u C_p \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho v C_p \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T_0}{\partial y} \right] \quad (8)$$

Уравнение (8) по форме полностью совпадает с уравнением энергии для малых скоростей

$$\rho u C_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v C_p \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right] \quad (9)$$

Только вместо температуры в нем стоит температура торможения.

При малых скоростях потока мы использовали понятие коэффициента теплоотдачи, записывая выражение для теплового потока в виде $q_w = \alpha (T_1 - T_w)$. Здесь отражен тот факт, что тепловой поток тела тем больше, чем больше перепад статических температур потока и стенки.

При больших скоростях (при $Pr = 1$) уравнение энергии (8) сохраняет такой же вид, как и при малых скоростях, но вместо температуры газа в нем стоит температура его торможения. Теплообмен в этом случае определяется перепадом между температурой заторможенного потока и температурой стенки $T_{01} - T_w$.

2. Распределение температуры и скорости при высоких скоростях набегающего потока

Рассмотрим в качестве примера течение вдоль плоской пластины. При этом $\frac{dp}{dx} = 0$.

При $Pr = 1$ и $C_p = const$ уравнения количества движения и энергии имеют вид:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (10)$$

$$\rho u \frac{\partial T_0}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial y} \right) \quad (11)$$

Граничные условия: при $y = 0$ $u = 0$, $T_0 = T_w$; $y \rightarrow \infty$ $u \rightarrow u_1$, $T_0 \rightarrow T_{01}$.

Уравнения (10) и (11) аналогичны по форме. Легко показать, что условие

$$(T_0 - T_w)/(T_{01} - T_w) = u/u_1 \quad (12)$$

является решением уравнения (11). Действительно, если разделить

$$T_0 = \frac{u}{u_1} (T_{01} - T_w) + T_w$$

и подставить в уравнение (11), то уравнение (11) и граничное условие для температуры торможения станут тождественны уравнению (10) с соответствующим граничным условием. Следовательно, в этом случае справедливо условие подобия профилей скорости и температуры торможения (12).

Полученное математическое условие имеет физический смысл и является следствием того, что перенос количества движения и энергии при $Pr = 1$ происходит с помощью одинаковых молекулярных процессов.

При малых скоростях $T_0 = T$ и, следовательно, профили скорости и статической температуры подобны: $(T - T_w)/(T_1 - T_w) = u/u_1$.

Распределения скорости и температуры при малых скоростях потока, когда энтальпия газа значительно больше кинетической энергии ($M < 1$), представлены на рис. Как видно, при приближении к стенке значения температуры газа в пограничном слое монотонно стремятся к значению, равному температуре стенки.

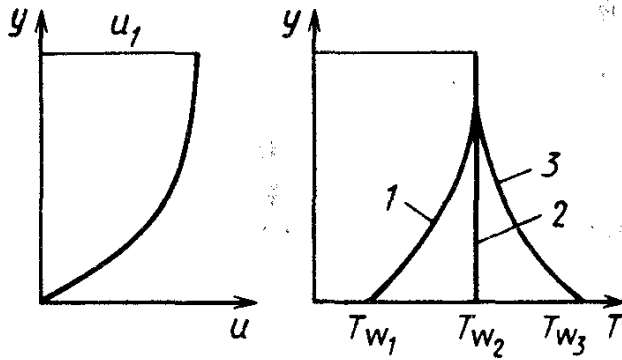


Рис. Кривые распределения скорости и температуры в пограничном слое при $M < 1$:

1 - $q_w > 0$; 2 - $q_w < 0$; 3 - $q_w = 0$

Частные случаи:

3. Теплоизолированная поверхность при $Pr = 1$

$$q_w = 0$$

$$q_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \lambda \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_w - u_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w / C_p = \lambda \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_w = 0$$

Уравнение (10) должно решаться при граничных условиях, когда при $y = 0$ $\partial T_0 / \partial y = 0$, а при $y \rightarrow \infty$ $T_0 = T_{01}$ и имеет тривиальное решение: $T_0 = T_{01}$.

Всюду в пограничном слое при $Pr = 1$ устанавливается постоянная температура торможения, равная температуре заторможенного набегающего потока. На стенке $T_0 = T_w$ и, следовательно, температура теплоизолированной поверхности также равна температуре торможения внешнего потока. Распределение статической температуры определяется из формулы $T = T_0 - \frac{u^2}{2c_p}$.

Отсюда

$$T = T_1 + \frac{u_1^2}{2C_p} \left(1 - \frac{u^2}{u_1^2} \right) \quad (13)$$

Температура плавно изменяется от температуры внешнего потока T_1 до температуры T_{01} у стенки. На рис. приведены зависимости безразмерных величин

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1}; \quad \bar{T} = \frac{T - T_1}{u_1^2 / (2c_p)} \quad \text{и} \quad \bar{T}_0 = \frac{T_0 - T_1}{u_1^2 / (2c_p)}$$

от безразмерной координаты y/δ . При больших скоростях потока температура газа в пограничном слое выше, чем вне его. Работа сил трения в каждой точке внутри слоя порождает тепло. Выделение тепла уравновешивается непрерывным отводом тепла из области с высокой температурой в область с меньшей температурой. При $Pr = 1$ оба процесса уравновешиваются, когда $T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p} = T_{01}$.

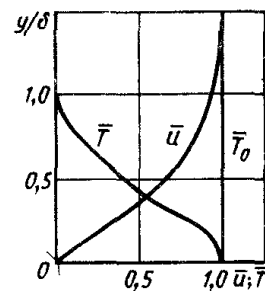


Рис. Распределения безразмерной скорости статической температуры и температуры торможения в пограничном слое при $q_w = 0$; $Pr = 1$

4. Теплоизолированная поверхность при $Pr < 1$

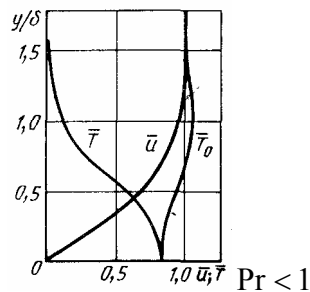
Если число Прандтля $Pr \neq 1$, то на теплоизолированной стенке устанавливается температура, отличная от температуры торможения внешнего потока. Для газов $Pr < 1$ (например для воздуха $Pr \approx 0,71$). В этом случае температура теплоизолированной стенки ниже температуры торможения внешнего потока.

Обозначим температуру, которую принимает теплоизолированная стенка, через T_e . При $Pr < 1$ процессы выделения тепла вследствие трения и отвода тепла теплопроводностью и конвективным переносом находятся в равенстве, при этом $T_e < T_0$.

Введем понятие — коэффициент восстановления температуры $r = (T_e - T_1)/(T_{01} - T_1)$ или иначе $r = \frac{T_e - T_1}{u_1^2/(2c_p)}$; $T_e = T_1 + r \frac{u_1^2}{2c_p} = T_1 \left(1 + r \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)$.

Коэффициент восстановления температуры r показывает, какая доля кинетической энергии внешнего потока затрачена на повышение теплосодержания газа у стенки. При ламинарном течении вдоль плоской пластины $r \approx \sqrt{Pr}$. Для воздуха $r \approx 0,84$ и

Распределение скорости, статической температуры и температуры торможения на теплоизолированной поверхности при $Pr < 1$ показано на рис. Как видно, температура торможения у стенки ниже температуры торможения внешнего потока. Из этой области часть энергии передалась во внешнюю часть пограничного слоя, вследствие чего температура торможения в этой части стала больше температуры торможения внешнего потока.



5. Распределение температуры в пограничном слое сжимаемого газа на пластине при теплообмене

Рассмотрим сначала случай $Pr = 1$. Тогда $(T_0 - T_w)/(T_{01} - T_w) = u/u_1$. Учитывая, что $T_0 = T + u^2/(2c_p)$, после преобразования получим

$$T = T_w + (T_1 - T_w) \frac{u}{u_1} + \frac{u_1^2}{2c_p} \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right). \quad (14)$$

Так как $\frac{u_1^2}{2c_p} = \frac{k-1}{2} M_1^2 T_1$, то

$$\frac{T}{T_1} = \frac{T_w}{T_1} + \left(\frac{T_1 - T_w}{T_1}\right) \frac{u}{u_1} + \frac{k-1}{2} M_1^2 \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right). \quad (15)$$

Если число M мало ($M \rightarrow 0$), то получается известное соотношение для малых скоростей

$$(T - T_w)/(T_1 - T_w) = u/u_1.$$

Распределение температуры и скорости поперек пограничного слоя показано на рис. Для случая $Pr = 1$, если $T_w < T_{01}$, стенка будет нагреваться. При $T_w > T_{01}$ стенка будет охлаждаться; при $T_w = T_{01}$ тепловой поток $q_w = \lambda_w (\partial T/\partial y)_w = 0$.

Если $T_w < T_{01}$, то кривая распределения температуры имеет максимум. Во внешней части пограничного слоя газ нагревается от трения. Внутри пограничного слоя температура газа может быть значительно выше температуры потока. Нагретый газ далее передает тепло к стенке. Из-за отвода тепла в стенку температура газа вблизи стенки понижается и непосредственно на охлаждаемой стенке $(\partial T/\partial y)_w > 0$.

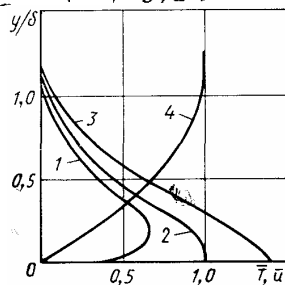


Рис. Распределение безразмерной скорости и температуры при наличии теплообмена ($Pr = 1$):
1 — $T_w < T_{01}$; 2 — $T_w = T_{01}$; 3 — $T_w > T_{01}$; 4 — u/u_1

6. Коэффициент теплоотдачи при больших скоростях потока

$$q_w = \alpha(T_0 - T_w) \quad (16)$$

$$q_w = \alpha(T_e - T_w), \quad Pr < 1 \quad (17)$$

7. Связь между трением и теплообменом

Напряжение трения определяется по формуле

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu_w u_1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_w; \quad \bar{u} = \frac{u}{u_1}.$$

Для случая течения вдоль плоской пластины при $Pr = 1$ справедливо условие (12). Тогда $\tau_w = \frac{\mu_w u_1}{T_{01} - T_w} \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_w$, а при $y = 0 \left(\frac{\partial T_0}{\partial y} \right)_w = \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w$, $\tau_w = \frac{\mu_w u_1}{(T_{01} - T_w) \lambda_w} \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w$.

Поскольку

$$Pr = \frac{\mu_w c_p}{\lambda_w} = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = q_w,$$

то
$$\frac{\tau_w}{u_1} = \frac{q_w}{c_p (T_{01} - T_w)}.$$

Переходя к безразмерным величинам, получаем $\frac{q_w}{\rho_1 u_1 c_p (T_{01} - T_w)} = \frac{\tau_w}{\rho_1 u_1^2}$, откуда

$$St = \frac{1}{2} C_f. \quad (18)$$

Используя условие $Nu = St Re Pr$, можно записать вместо (18)

$$Nu = \frac{1}{2} C_f Re. \quad (19)$$

$$Pr \neq 1: \quad Nu = \frac{1}{2} C_f Re Pr^{1/3} \quad (20)$$

8. Расчет теплообмена в пограничном слое на плоской пластине

$$Nu = 0.332 K \sqrt{Re} Pr^{1/3} \quad (21)$$

$$K = f(\omega, T_w/T_1, n_1, n_2). \quad (22)$$

$$\omega = \frac{k-1}{2} M_1^2$$

$$K = \left(\frac{\mu^* \rho^*}{\mu_w \rho_w} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu^* \rho^*} \right)^{1/15} T_w/T_e \quad (23)$$

9. Метод эффективной длины

Такая длина плоской пластины, на которой при внешнем течении с постоянными параметрами $\rho_1 u_1$ такими же, как в рассматриваемой точке тела, нарастает такой же тепловой пограничный слой, как и на длине x рассматриваемого тела с переменными параметрами $\rho_1 u_1$ вне слоя.

$$x_{эф} = \frac{\int_0^x \left(\frac{Nu_w}{\sqrt{Re_w}} \right)^2 R^2 \rho_w \mu_1 \mu_w c_p^2 (T_e - T_w)^2 Pr^{-2} dx}{\left(\frac{Nu_w}{Re_w} \right)^2 \mu_w R^2 \rho_w \mu_1 c_p^2 (T_e - T_w)^2 Pr^{-2}} \quad (24)$$

$$x_{эф} = \frac{\int_0^x \rho_w \mu_1 R^2 dx}{\rho_w \mu_1 R^2} \quad (25)$$

$$x_{эф} = \frac{\int_0^x x^2 \sin^2 \Theta_h dx}{x^2 \sin^2 \Theta_h} = \frac{1}{3} x. \quad (26)$$

$$x_{эф} = \frac{\int_0^x \beta x dx}{\beta x} = \frac{1}{2} x \quad (27)$$

