ТЕПЛООБМЕН ПРИ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

1. Определяющий размер и определяющая температура. Критериальное уравнение

В критерии Gr, Re, Pe, Nu, Fo, Ra входит характерный или определяющий размер l_0. Обычно при течении жидкости внутри трубы в качестве определяющего размера принимается внутренний диаметр трубы d.

Иногда при расчете теплообмена на начальном участке канала в качестве определяющего размера используют расстояние от входа x. Это же расстояние берется в качестве определяющего размера для внешнего обтекания тел. Часто для обозначения используемого определяющего размера критерии подобия снабжены соответствующими индексами. Например, $\mathrm{Nu}_{d_э}$ означает, что в качестве определяющего размера в Nu используется эквивалентный диаметр $d_э$; Re_x означает, что Re определяется по x.

Входящие в критерии подобия физические свойства жидкости или газа ρ, c_p, μ, ν, λ, a, β в общем случае зависят от температуры. Поэтому вводится понятие определяющей температуры, т. е. температуры, при которой определяются значения физических свойств, входящих в критерии. При этом критерий снабжается соответствующим индексом. Наиболее часто в качестве определяющей принимают среднемассовую температуру потока в рассматриваемом сечении T_f и среднюю для канала в целом $\overline{T}_f$, тогда соответствующие критерии обозначают Nu_f, Re_f, Pr_f (в литературе эту температуру обозначают также индексами: «ж» — жидкость, «г» — газ, «п» — поток). Иногда в качестве определяющей используется температура стенки T_w, тогда соответственно критерии обозначают Nu_w, Re_w, Pr_w (в литературе эту температуру обозначают также индексом «с» — стенка). При расчете свободной конвекции обычно в качестве определяющей принимается полусумма температур жидкости и стенки $T_m = \frac{1}{2}(T_w + T_f)$ и соответствующие критерии обозначают Nu_m, Gr_m, Pr_m (иногда эту температуру обозначают индексом «ср» — средний).

Так как введение одной определяющей температуры не может в общем случае учесть влияние переменности свойств среды на теплообмен, вводятся дополнительные безразмерные параметры ρ_f/ρ_w, c_{p_f}/c_{p_w}, μ_f/μ_w, λ_f/λ_w, составленные из физических свойств, взятых при температурах T_w и T_f.

Для газов эти свойства зависят в основном от температуры, и эти зависимости имеют вид

$$\frac{\rho_f}{\rho_w} = \left(\frac{T_f}{T_w}\right)^{n_\rho}; \qquad \frac{c_{p_f}}{c_{p_w}} = \left(\frac{T_f}{T_w}\right)^{n_c};$$

$$\frac{\lambda_f}{\lambda_w} = \left(\frac{T_f}{T_w}\right)^{n_\lambda}; \qquad \frac{\mu_f}{\mu_w} = \left(\frac{T_f}{T_w}\right)^{n_\mu},$$

где n_ρ, n_c, n_λ, n_μ — постоянные, зависящие от природы газа и интервала температур.

Для стационарного теплообмена и при изменении коэффициента теплоотдачи только вдоль продольной координаты x (например, для течения жидкости в круглой трубе, для продольно омываемой пластины и при продольном обтекании осесимметричного тела) зависимость между определяемым критерием Nu и определяющими кретериями можно представить в виде:

$$Nu = f(\mathrm{Re}_f, \mathrm{Pr}_f, M, Gr_f, T_w / T_f, n_c, n_\lambda, n_\mu, X) \quad (1)$$

При больших значениях числа Re влиянием свободной конвекции можно пренебречь, и уравнение (1) упрощается:

$$Nu = f(\mathrm{Re}_f, \mathrm{Pr}_f, M, T_w / T_f, n_c, n_\lambda, n_\mu, X) \quad (2)$$

2. Уравнения пограничного слоя

При обтекании тела потоком жидкости или газа с большими значениями числа Рейнольдса течение в окрестности тела можно разбить на две области.

Первая область (рис. 5.1) представляет собой тонкий слой, примыкающий к телу и называемый пограничным слоем. В пограничном слое вязкость и теплопроводность оказывают существенное влияние на течение. Непосредственно на стенке имеет место явление прилипания, в результате чего скорость и температура жидкости у поверхности равны скорости и температуре поверхности (исключая течение в разреженном газе). При удалении от поверхности скорость и температура асимптотически стремятся к своим значениям в обтекающем потоке.

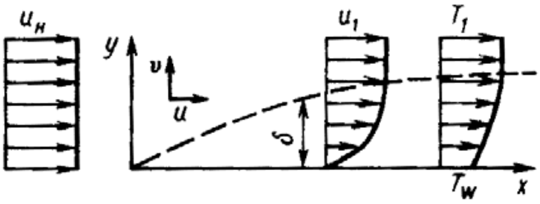
Толщина пограничного слоя (δ) намного меньше размера обтекаемого тела l: $\delta/l \ll 1$ при $\mathrm{Re} \gg 1$.

Вторая область — внешний поток, идеальное течение вне пограничного слоя. Здесь градиенты скорости и температуры малы, а влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь.

Между этими двумя областями нет резкой границы. Разделение течения на две области существенно упрощает исследование и расчет обтекания тел при больших числах Re.

Благодаря тому, что пограничный слой тонкий, давление поперек его сохраняется практически постоянным. При этом расчет обтекания тела, т. е. определение параметров потока вне пограничного слоя, можно производить так, как будто пограничного слоя не существует. Найденные при этом параметры внешнего потока: давление p_1, плотность ρ_1, скорость u_1 и температура T_1 могут быть затем использованы для расчета распределения скорости и температуры в пограничном слое.

Если эти распределения известны, то легко вычисляются значения касательных напряжений трения на поверхности и удельных тепловых потоков, идущих в стенку:



Схематическое изображение пограничного слоя ($u_н$ — скорость набегающего потока)

$$\tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w;$$

$$q_w = \lambda_w \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w,$$

где y — координата по нормали к поверхности тела; индекс «w» означает, что все величины берутся при значении $y = 0$.

Таким образом, расчет трения и конвективного теплообмена на поверхности обтекаемых тел сводится к расчету пограничного слоя при заданных параметрах идеального течения вне слоя.

Рассмотрим некоторые характеристики пограничного слоя.

Распределение скорости в пограничном слое характеризуется профилем скорости $\bar{u} = u/u_1 = f(y/\delta)$, где δ — условная толщина динамического пограничного слоя, равная, например, значению y, при котором $u = 0{,}99$. Соответствующее выражение для профиля температуры имеет вид $\overline{T} = (T - T_w)/(T_1 - T_w) = f_1(y/\delta_т)$, где $\delta_т$ — толщина теплового пограничного слоя. В общем случае распределения скорости и температуры, так же как и толщины теплового и динамического слоев, не совпадают.

Практическое определение толщины пограничного слоя затруднено, так как нельзя точно установить границу между пограничным слоем и внешним потоком и точность определения толщины слоя в большой степени зависит от точности самих измерений. Поэтому в рассмотрение вводят некоторые интегральные характеристики, определяемые более точно, ибо на их величину не оказывает заметного влияния тот факт, что значения параметров течения в пограничных слоях асимптотически стремятся к значениям параметров внешнего потока.

Рассмотрим уравнения, описывающие стационарное течение в двухмерном пограничном слое. Для простоты предположим вначале, что плотность постоянная.
Основные уравнения:

$$\rho\frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\cdot\delta_{ij} div\vec{V}\right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\cdot\delta_{ij} div\vec{V}\right] = \mu\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) = \quad (4)$$

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\right) = \mu\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2}$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (5)$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\bar{u}=u/u_f;\quad \bar{v}=v/u_f;\quad \bar{x}=x/l;\quad \bar{y}=y/l;\\ \bar{p}=p/(\rho_f u_f^2);\quad \bar{\delta}=\delta/l;\quad \mathrm{Re}=\frac{\rho u_f l}{\mu}\end{gathered} \tag{8}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) \tag{9}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) \tag{10}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}=0;\quad v/u\sim\delta/l \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\sim\frac{1}{\bar{\delta}^2};\quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}\sim 1;\quad \frac{1}{\mathrm{Re}\,\bar{\delta}^2}\sim 1\Rightarrow \bar{\delta}^2\sim\frac{1}{\mathrm{Re}},\quad \frac{\delta}{l}\sim\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}\sim\frac{\delta}{l} \tag{13}$$

Основные выводы:

1) Вертикальная составляющая скорости мала по сравнению с продольной составляющей
2) Давление поперек пограничного слоя можно считать постоянным $p=p(x)$

В общем случае, когда плотность переменная, система уравнений пограничного сло имеет вид:

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{13}$$

$$\rho u C_p\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v C_p\frac{\partial T}{\partial y}=u\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\tau_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)-\frac{2}{3}\mu\cdot\delta_{ij}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right]\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\mu\left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\cdot\delta_{ij}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right]=\\ \mu\left[\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)^2+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right)^2\right]\end{gathered} \tag{15}$$

$$\rho u C_p\frac{\partial T}{\partial x}+\rho v C_p\frac{\partial T}{\partial y}=u\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}C_p\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,\quad \mathrm{Pr}=\frac{\mu C_p}{\lambda} \tag{16}$$

$$p=\rho RT;\ \mu=\mu(T);\ \lambda=\lambda(T) \tag{17}$$

Эта система уравнений справедлива для так называемого совершенного газа. Вязкость μ и теплопроводность λ для совершенного газа являются функциями только температуры. Наиболее распространенной является формула Саттерленда. Например, для вязкости

$$\frac{\mu}{\mu^*} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{3/2} \frac{1+(T_s/T^*)}{(T/T^*)+(T_s/T^*)},$$

где T_s — постоянная Саттерленда, равная для воздуха 102 K; T^*, μ^* — значения температуры и вязкости, соответствующие некоторому начальному состоянию. Широко применяются также и степенные формулы $\mu/\mu^* = (T/T^*)^{n_1}$ и $\lambda/\lambda_0 = (T/T^*)^{n_2}$, где n_1 и n_2 — постоянные, подбираемые для заданного диапазона изменения температуры и изменяющиеся в пределах от 0,5 до 1.

$$q = \alpha(T_f - T_W) = \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_W, \quad \alpha = \frac{\lambda}{l}\left(\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)_W$$
$$\left(\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)_W \sim \frac{1}{\delta / l} \sim \sqrt{\mathrm{Re}}, \quad \frac{\alpha l}{\lambda} \sim \sqrt{\mathrm{Re}}, \quad т.е. \quad Nu \sim \sqrt{\mathrm{Re}} \tag{15}$$

$$Nu = 0.332\sqrt{\mathrm{Re}}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{16}$$

3. Связь между трением и теплообменом при малых скоростях (плоская пластина)

Для такого течения справедливо:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{18}$$

$$\bar{u} = u / u_f; \quad \bar{T} = \frac{T - T_W}{T_f - T_W}, \text{ гр.условия: } \begin{array}{l} y = 0: \quad \bar{u} = 0; \quad \bar{T} = 0 \\ y = \delta: \quad \bar{u} = 1; \quad \bar{T} = 1 \end{array} \tag{19}$$

$$\rho u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right), \tag{20}$$

$$\rho u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}\right) \tag{21}$$

Трение на стенке определяется по формуле:

$$\tau_W = \mu_W \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_W \tag{22}$$

Введем критерий подобия

$$C_f = \frac{\tau_W}{\rho_1 u_1^2 / 2} = \frac{2\mu_W}{\rho_1 u_1^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_W = \frac{2\mu_W}{\rho_1 u_1 l}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)_W = \frac{2}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)_W \tag{23}$$

Исходя из оценок, только что полученных для пограничного слоя (формула (12)), величина $\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)$ имеет порядок:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \sim \frac{1}{\bar{\delta}} = \frac{l}{\delta} \sim \sqrt{\mathrm{Re}} \tag{24}$$

Подставляя эту оценку в (23), получаем:

$$C_f \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad (25)$$

Численное решение уравнений пограничного слоя дает точную формулу для C_f :

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \qquad (26)$$

Рассмотрим теперь решение уравнений (20) и (21) для случая $\mathrm{Pr} = 1$. Очевидно, что с учетом совпадения граничных условий (см. (19)), получается совпадение решений:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \qquad (27)$$

$$q = \alpha(T_f - T_W) = \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_W, \quad Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right)_W = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)_W \qquad (28)$$

Из (23) следует:

$$Nu = \frac{C_f \,\mathrm{Re}}{2} \qquad (29)$$

Это и есть связь трения и теплообмена при $\mathrm{Pr} = 1$
В общем случае эта связь имеет вид:

$$\mathrm{Pr} \neq 1: \quad \frac{Nu}{C_f} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad (30)$$

С учетом (26), получаем важную формулу:

$$Nu = 0.332\sqrt{\mathrm{Re}}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \qquad (31)$$