КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ

1. Подобие физических процессов

Конвективный теплообмен представляет собой весьма сложный физический процесс, описываемый системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности. Решение этих уравнений встречает серьезные затруднения. Поэтому большое значение приобретают экспериментальные исследования конвективного теплообмена.

Экспериментальные исследования ведутся, как правило, на моделях. При постановке эксперимента необходимо выбрать параметры исследуемой модели, определить измеряемые величины и методику их обработки. Естественно, что исследователь должен знать, как перенести полученные с помощью модели данные на другие аналогичные натурные процессы. На все эти вопросы дает ответы теория подобия.

При исследовании сложных процессов теория подобия позволяет объединить размерные физические величины в безразмерные комплексы, число которых меньше, чем число размерных величин. При этом сокращается число величин, от которых зависит искомое значение коэффициента теплоотдачи, что упрощает эксперимент. Безразмерные переменные отражают влияние на теплообмен совокупности параметров, что облегчает обнаружение физических закономерностей.

Необходимо отметить, что теория подобия дает возможность определить только общий вид искомой функции и не позволяет найти ее конкретный вид. Тем не менее, теория подобия необходима как для экспериментальных, так и теоретических исследований для анализа процесса и обобщения полученных данных.

Кратко остановимся на самом понятии подобия. Обязательной предпосылкой подобия физических процессов является геометрическое подобие. Геометрически подобны фигуры, имеющие одинаковую форму и пропорциональные сходственные линейные размеры. Например, два треугольника со сторонами соответственно l_1, l_2, l_3 и l_1', l_2', l_3' будут подобны, если $l_1'/l_1 = l_2'/l_2 = l_3'/l_3 = C$, где C — константа подобия (в данном случае геометрического).

2. Критерии подобия

Для практического использования теории подобия необходимо знать, как привести уравнения рассматриваемых процессов к безразмерному виду. Это можно сделать различными способами. В следующем разделе дифференциальные уравнения конвективного теплообмена и условие однозначности будут приведены к безразмерному виду методом масштабных преобразований.

$$L, t_1, U, \rho_0, T_0, p_0$$

$$\overline{x_j} = \frac{x_j}{L}, \overline{V_j} = \frac{V_j}{U}, \bar{t} = \frac{t}{t_1}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \bar{p} = \frac{p}{p_0}, \bar{T} = \frac{T}{T_0} \qquad (1)$$

$$x_j = \overline{x_j}L, V_j = \overline{V_j}U, t = \bar{t}t_1, \rho = \bar{\rho}\rho_0, p = \bar{p}\rho_0 RT_0, T = \bar{T}T_0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_j)}{\partial x_j} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\rho_0}{t_1}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_0 U}{L}\frac{\partial(\rho V_j)}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{L}{t_1 U}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\rho V_j)}{\partial x_j} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_j V_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu \cdot \delta_{ij} div\vec{V}\right] \tag{5}$$

$$\rho F_i = (\rho - \rho_0) g_i \tag{6}$$

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) = -\rho_0 \beta \Delta T \quad \text{, где } \beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\bigg|_{p=const} \tag{7}$$

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_j V_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho_0 \beta \Delta T g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu \cdot \delta_{ij} div\vec{V}\right] \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_0 U}{t_1}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_i)}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_0 U^2}{L}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_j \overline{V}_i)}{\partial \overline{x}_j} = -\frac{p_0}{L}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}_i} - \rho_0 \beta \Delta T g \overline{g}_i + \\ \frac{\mu_0 U}{L^2}\frac{\partial}{\partial \overline{x}_j}\left[\overline{\mu}\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial \overline{x}_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial \overline{x}_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{div\vec{V}}\right)\right]\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\frac{L}{t_1 U}\frac{\rho_0 UL}{\mu_0}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_i)}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho_0 UL}{\mu_0}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_j \overline{V}_i)}{\partial \overline{x}_j} = -\frac{\rho_0 UL}{\mu_0}\frac{p_0}{\rho_0 U^2}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}_i} - \\ \frac{\mu_0}{\rho_0 UL}\frac{\rho_0^2 L^3 \beta \Delta T g}{\mu_0^2}\overline{g}_i + \frac{\partial}{\partial \overline{x}_j}\left[\overline{\mu}\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial \overline{x}_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial \overline{x}_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{div\vec{V}}\right)\right]\end{gathered} \tag{10}$$

$$Sh = \frac{L}{t_1 U} \text{-критерий Струхаля} \quad Ho = \frac{t_1 U}{L} \text{-критерий гомохромности} \tag{11}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_0 UL}{\mu_0} = \frac{UL}{\nu_0} \text{-критерий Рейнольдса} \quad Eu = \frac{p_0}{\rho_0 U^2} \text{-критерий Эйлера} \tag{12}$$

$$Gr = \frac{\rho_0^2 L^3 \beta \Delta T g}{\mu_0^2} = \frac{L^3 \beta \Delta T g}{\nu_0^2} \quad \text{-критерий Грасгофа} \tag{13}$$

$$\frac{1}{Ho}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial(\rho V_j)}{\partial x_j} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{Re}}{Ho}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_i)}{\partial \bar{t}} + \mathrm{Re}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_j \overline{V}_i)}{\partial \overline{x}_j} = -\mathrm{Re}\cdot Eu\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}_i} - \frac{Gr}{\mathrm{Re}}\overline{g}_i + \frac{\partial}{\partial \overline{x}_j}\left[\overline{\mu}\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial \overline{x}_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial \overline{x}_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{div\vec{V}}\right)\right] \tag{15}$$

$$\rho\frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho F_i V_i + \frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij} V_j) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho\varepsilon, \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\rho H)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_j H)}{\partial x_j}=\frac{\partial p}{\partial t}-\rho_0\beta\Delta T g_j V_j+\\ \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}div\vec{V}\right)V_j\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\frac{\rho_0 C_p T_0}{t_1}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{H})}{\partial\overline{t}}+\frac{\rho_0 U C_p T_0}{L}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_j\overline{H})}{\partial\overline{x}_j}=\frac{p_0}{t_1}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{t}}-gU\cdot\rho_0\beta\Delta T\overline{g}_j\overline{V}_j+\\ \frac{\mu_0 U_0^2}{L^2}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left[\overline{\mu}\left(\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial\overline{x}_j}+\frac{\partial\overline{V}_j}{\partial\overline{x}_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{div\overline{\vec{V}}}\right)\overline{V}_j\right]+\frac{\lambda_0 T_0}{L^2}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left(\overline{\lambda}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{x}_i}\right)\end{gathered} \tag{18}$$

$$\overline{H}=\frac{H}{C_p T_0},\qquad \overline{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda_0} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\frac{L}{\rho_0 U C_p T_0}\frac{\rho_0 C_p T_0}{t_1}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{H})}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_j\overline{H})}{\partial\overline{x}_j}=\frac{L}{\rho_0 U C_p T_0}\frac{p_0}{t_1}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{t}}-\\ \frac{L}{\rho_0 U C_p T_0}gU\cdot\rho_0\beta\Delta T\overline{g}_j\overline{V}_j+\\ \frac{L}{\rho_0 U C_p T_0}\frac{\mu_0 U_0^2}{L^2}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left[\overline{\mu}\left(\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial\overline{x}_j}+\frac{\partial\overline{V}_j}{\partial\overline{x}_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{div\overline{\vec{V}}}\right)\overline{V}_j\right]+\\ \frac{L}{\rho_0 U C_p T_0}\frac{\lambda_0 T_0}{L^2}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left(\overline{\lambda}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{x}_i}\right)\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\frac{L}{Ut_1}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{H})}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_j\overline{H})}{\partial\overline{x}_j}=\frac{L}{Ut_1}\frac{p_0}{\rho_0 C_p T_0}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{t}}-\\ \frac{L}{C_p T_0}g\cdot\beta\Delta T\overline{g}_j\overline{V}_j+\\ \frac{1}{\rho_0 C_p T_0}\frac{\mu_0 U}{L}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left[\overline{\mu}\left(\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial\overline{x}_j}+\frac{\partial\overline{V}_j}{\partial\overline{x}_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{div\overline{\vec{V}}}\right)\overline{V}_j\right]+\\ \frac{\lambda_0}{\rho_0 U C_p L}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left(\overline{\lambda}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{x}_i}\right)\end{gathered} \tag{21}$$

$C_p - C_v = R,\quad k=\frac{C_p}{C_v},\quad C_p-\frac{C_p}{k}=R,\quad C_p=\frac{k}{k-1}R$, $a=\sqrt{kRT}$ - скорость звука (22)

$$\frac{p_0}{\rho_0 C_p T_0}=\frac{U^2}{C_p T_0}Eu=\frac{U^2}{\frac{k}{k-1}RT_0}Eu=(k-1)\frac{U^2}{a_0^2}Eu \tag{23}$$

$$\frac{\lambda_0}{\rho_0 U C_p L}=\frac{\mu_0}{\rho_0 U L}\frac{\lambda_0}{\mu_0 C_p} \tag{24}$$

$\Pr=\dfrac{\mu_0 C_p}{\lambda_0}$ - критерий Прандтля, $M=\dfrac{U}{a_0}$ - критерий или число Маха (25)

$$\frac{1}{\rho_0 C_p T_0}\frac{\mu_0 U}{L}=\frac{(k-1)U^2}{a_0^2}\frac{\mu_0}{\rho_0 L U}=\frac{(k-1)M^2}{\mathrm{Re}} \tag{26}$$

$$\beta\Delta T g=\frac{Gr\cdot\mu_0^2}{\rho_0^2 L^3}=\frac{Gr\cdot\nu_0^2}{L^3} \tag{27}$$

$$\frac{L}{C_p T_0}g\cdot\beta\Delta T=\frac{L}{C_p T_0}\frac{Gr\cdot\nu_0^2}{L^3}=\frac{(k-1)}{a_0^2}\cdot\frac{Gr\cdot\nu_0^2}{L^2}=\frac{(k-1)U^2}{a_0^2}\cdot\frac{Gr\cdot\nu_0^2}{U^2 L^2}=\frac{(k-1)M^2 Gr}{\mathrm{Re}^2} \tag{28}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{Ho}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{H})}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_j\overline{H})}{\partial\overline{x}_j}=\frac{(k-1)M^2 Eu}{Ho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{t}}-\frac{(k-1)M^2 Gr}{\mathrm{Re}^2}\overline{g}_j\overline{V}_j+\\&\frac{(k-1)M^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left[\overline{\mu}\left(\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial\overline{x}_j}+\frac{\partial\overline{V}_j}{\partial\overline{x}_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\overline{div\overline{V}}\right)\overline{V}_j\right]+\frac{1}{\mathrm{Re}\cdot\Pr}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left(\overline{\lambda}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{x}_i}\right)\end{aligned}} \tag{29}$$

При M<<1

$$\boxed{\frac{1}{Ho}\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{H})}{\partial\overline{t}}+\frac{\partial(\overline{\rho}\overline{V}_j\overline{H})}{\partial\overline{x}_j}=\frac{1}{\mathrm{Re}\cdot\Pr}\frac{\partial}{\partial\overline{x}_i}\left(\overline{\lambda}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{x}_i}\right)} \tag{30}$$

$$q=\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w,\ q=\alpha(T_f-T_w) \tag{31}$$

$$\alpha=\frac{\lambda}{T_f-T_w}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w \tag{32}$$

$\alpha=\dfrac{\lambda}{L}\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\overline{n}}\right)_w,\quad\left(\dfrac{\partial\Theta}{\partial\overline{n}}\right)_W=\dfrac{\alpha\lambda}{L}=Nu$ - критерий Нуссельта (33)

3. Физический смысл критериев подобия

Критерий	Символ	Наименование	Пояснение
$\frac{U\tau}{L}$	Ho	Критерий гидродинамической гомохронности (число Струхаля)	Характеризует скорость изменения поля скорости течения среды во времени
$\frac{UL}{\nu}$	Re	Критерий режима движения (число Рейнольдса)	Характеризует гидродинамический режим потока, являясь мерой отношения в последнем сил инерции и молекулярного трения
$\frac{U^2}{gL}$	Fr	Критерий гравитационного подобия (число Фруда)	Является мерой отношения сил инерции и тяжести в однородном потоке
$\frac{\nu}{a}=\frac{Pe}{\mathrm{Re}}$	Pr	Критерий теплового потока (число Прандтля)	Является мерой отношения сил молекулярного и конвективного переносов тепла в потоке
$\frac{\Delta p}{\rho U^2}$	Eu	Критерий подобия полей давления (число Эйлера)	Является мерой отношения сил давления и инерции в потоке
$\frac{gL^3}{\nu^2}=$	Ga	Критерий полей свободного течения (число Галилея)	Является мерой отношения сил молекулярного трения и тяжести в потоке. В форме критерия Грасгофа $Gr=Ga\beta\Delta T$ характеризует взаимодействие сил молекулярного трения и подъемной силы, обусловленной различием плотностей в отдельных точках неизотермического потока

Критерий	Символ	Наименование	Пояснение
$\frac{a\tau}{L^2}$	*Fo*	Критерий тепловой гомохронности (число Фурье)	Характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела
$\frac{\alpha L}{\lambda}$	*Nu*	Безразмерный коэффициент теплоотдачи (критерий Нуссельта)	Характеризует связь между интенсивностью теплоотдачи и температурным полем в пограничном слое
$\frac{\alpha}{c\rho U}$	*St*	Критерий конвективного переноса тепла (критерий Стантона)	Является мерой отношения интенсивности теплоотдачи и удельного теплосодержания потока
$\frac{aL}{\lambda_{ст}}$	*Bi*	Критерий краевого подобия (критерий Био)	Характеризует связь между полем температур в твердом теле и условиями теплоотдачи на поверхности, являясь мерой отношения внутреннего и внешнего термических сопротивлений
$\frac{U}{a}$	*M*	Критерий газодинамического подобия (число Маха)	Является мерой отношения между скоростью течения среды и скоростью распространения в ней упругих деформаций а
$\frac{\sigma}{g(\rho-\rho'')L^2}$	*We*	Критерий поверхностного натяжения (критерий Вебера)	Является мерой влияния давления, создаваемого поверхностным слоем молекул

4. Три теоремы подобия

Применяя теорию подобия для исследования сложных явлений, используют три основных теоремы подобия.

Первая теорема подобия.

Для подобных между собой процессов (явлений) одноименные критерии подобия численно одинаковы.

Например, Re = idem, *Pr* = idem, *Nu* = idem (idem – одно и то же, вместо const, постоянное значение).

Равенство одноименных критериев подобия, представляющих собой одинаковые инварианты-комплексы, является следствием подобия физических явлений и подтверждается возможностью получения критериев подобия из уравнения связи.

Критерии подобия всегда безразмерны и имеют определенный физический смысл.

Критерии, составленные из физических величин, входящих в условие однозначности, называются определяющими.

Определяемыми называются критерии, в которые входит искомая величина (например, α).

Деление критериев подобия на определяющие и определяемые в известной мере условно.

Вторая теорема подобия.

Связь между числами подобия выражается в форме функциональной однозначной зависимости.

Например, $Nu = f(\mathrm{Re}, Pr, Gr)$.

Между определяемыми и определяющими критериями существует связь, математически выраженная в форме однозначной функциональной зависимости.

Значение этой теоремы заключается в том, что она указывает на возможность представить математическое описание рассматриваемых физических явлений в виде функциональной зависимости между критериями подобия, что придает всему анализу обобщенный характер.

Функциональная зависимость определяемого критерия от других критериев, характеризующих рассматриваемое явление, называется критериальным уравнением.

Критериальные уравнения не являются универсальными зависимостями.

Третья теорема подобия.

Условия, необходимые и достаточные для подобия физических явлений, заключаются в подобии условий однозначности и равенстве одноименных определяющих критериев подобия.

На положениях третьей теоремы основан метод исследования сложных явлений на моделях, в которых изучаемое явление должно осуществляться подобно тому, как оно протекает в образце.

Т.е. экспериментальным исследованиям должен предшествовать теоретический анализ, на основании которого установлены физические величины, характеризующие рассматриваемое явление, составлены условия однозначности и сформированы уравнения связи, если явление исследуется впервые. Затем должны быть выявлены критерии подобия, среди которых следует выделить определенный критерий, содержащий искомую величину.