

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ (Лекция 2)

4.4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ (МЕТОД ФУРЬЕ)

Классическим методом решения уравнения (4.10) является метод разделения переменных (метод Фурье). Идея метода состоит в предположении, что решение можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых является функцией безразмерных координат, а другая — функцией только критерия Fo. Таким образом, находятся частные решения уравнения Θ_n , удовлетворяющие граничным условиям, но не удовлетворяющие начальным. Затем, пользуясь линейностью уравнения, находят решение как линейную суперпозицию этих частных решений

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Theta_n,$$

причем такую, которая удовлетворяет уже начальным условиям путем соответствующего выбора коэффициентов A_n .

Итак, представляем Θ в виде:

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Bi, Fo) = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Bi) \cdot \psi(Fo). \quad (4.14)$$

Подстановка (4.14) в уравнение (4.10) дает:

$$\varphi \frac{\partial \psi}{\partial Fo} = \psi \bar{\nabla}^2 \varphi \quad \text{или} \quad \varphi \frac{d\psi}{dFo} = \psi \bar{\nabla}^2 \varphi, \quad (4.15)$$

откуда

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dFo} = \frac{1}{\varphi} \bar{\nabla}^2 \varphi, \quad (4.16)$$

Здесь слева функции только времени, а справа — только координат. Равенство (4.16) возможно лишь в том случае, если как левые, так и правые его части — одинаковые постоянные величины, не зависящие ни от времени, ни от координат. Обозначим эту константу через - « m » (знак минус принят для удобства последующих преобразований, что отнюдь не налагает каких-либо ограничений на знак самой константы m).

Тогда исходная задача сводится к следующим двум:

$$\frac{1}{\psi} \frac{d\psi}{dFo} = -m, \quad (4.17)$$

| | |
|---|--------|
| $\frac{1}{\varphi} \bar{\nabla}^2 \varphi = -m; \quad \varphi_w = -\frac{1}{Bi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_w$ | (4.18) |
|---|--------|

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (4.17) имеет вид

$$\psi = A \exp(-mFo), \quad (4.19)$$

где A — произвольная константа.

Из полученного вида решения видна непригодность значений $m < 0$ в рассматриваемой задаче, так как при $m < 0$ функция оказывается монотонно растущей функцией времени, что противоречит физическому смыслу задачи, согласно которому тело стремится к тепловому равновесию, т. е.

$$\lim_{Fo \rightarrow \infty} \psi = 0.$$

Решение второго уравнения (4.18) зависит от геометрии тела. При этом оказывается, что не все положительные значения m позволяют удовлетворить граничным условиям так, чтобы решение не было тривиальным: $\varphi \equiv 0$.

Дискретные значения постоянной m , при которых задача (4.18) имеет ненулевые решения, удовлетворяющие граничным условиям, называются собственными значениями задачи (4.18) и обозначаются $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n, \dots$ (причем $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n < \dots$). Соответствующие решения уравнения называются собственными функциями задачи (4.18) и обозначаются $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$

Общее решение ур-внения (4.10), таким образом, имеет вид

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n \exp(-m_n Fo), \quad (4.20)$$

Как уже говорилось, коэффициенты A_n выбираются из условия удовлетворения решения начальным условиям, т. е. при $Fo = 0$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Bi), \quad (4.21)$$

Для нахождения коэффициентов A_n единица раскладывается в ряд по собственным функциям φ_n .

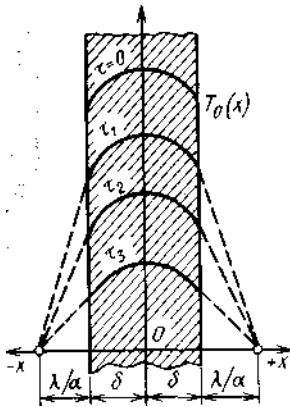


Рис. 4.5. Схема к задаче об охлаждении плоской стенки (граничные условия 3-го рода)

Рассмотрим конкретный пример определения собственных значений и собственных функций задачи в простом случае пространственно одномерной задачи об изменении температур в плоской бесконечной стенке толщиной 2δ (рис. 4.5). В качестве характерного размера L возьмем δ . В этом случае задача (4.18) будет иметь вид

| | |
|--|--------|
| $\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -m;$ | (4.22) |
| $\varphi(1) = -\frac{1}{Bi} \frac{\partial \varphi(1)}{\partial x};$ | (4.23) |
| $\varphi(-1) = -\frac{1}{Bi} \frac{\partial \varphi(-1)}{\partial x};$ | (4.24) |

Из симметрии рассматриваемой задачи следует, что распределение φ в стенке будет симметричным относительно плоскости $\bar{x} = 0$. Поэтому в плоскости симметрии будет выполняться

| | |
|---|--------|
| $\frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} = 0.$ | (4.25) |
|---|--------|

Это условие позволяет освободиться от 2-го граничного условия (4.24) при $\bar{x} = -1$ и свести к задаче о пластине толщиной δ , теплоизолированной от поверхности $\bar{x} = 0$.

Частное решение исходного уравнения (4.22), удовлетворяющее граничному условию (4.25), имеет вид

| | |
|---|--------|
| $\varphi = D \cos(\sqrt{m} \cdot \bar{x}).$ | (4.26) |
|---|--------|

Граничному условию при $\bar{x} = 1$ это частное решение удовлетворяет, если

| | |
|---|--------|
| $BiD_n \cos \sqrt{m} - D_n \sqrt{m} \sin \sqrt{m} = 0.$ | (4.27) |
|---|--------|

Это уравнение получается подстановкой равенства (4.26) в условие (4.23). Отсюда получаем:

| | |
|---------------------------------|--|
| $ctg \sqrt{m} = \sqrt{m} / Bi.$ | |
|---------------------------------|--|

Это характеристическое уравнение позволяет найти собственные значения m , а следовательно, и собственные функции рассматриваемой задачи.

Обозначая \sqrt{m} через μ , получаем

| | |
|-----------------------|--------|
| $ctg \mu = \mu / Bi.$ | (4.28) |
|-----------------------|--------|

На рис. 4.6 показан графический метод отыскания корней характеристического уравнения как координат точек пересечения котангенсоид $y_1 = ctg \mu$ с прямой $y_2 = \mu / Bi$. Очевидно, что число корней бесконечно, причем каждый последующий корень больше предыдущего: $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$. Этот набор корней зависит от Bi . Таким образом, решение задачи (4.18) в данном случае имеет вид:

| | |
|---|--------|
| $\varphi_n(\bar{x}, Bi) = D \cos(\mu_n \bar{x}),$ | (4.29) |
|---|--------|

или

| | |
|--|--------|
| $\varphi_n(\bar{x}, Bi) = D \cos(\sqrt{m_n} \cdot \bar{x}),$ | (4.30) |
|--|--------|

а общее решение (4.20) дифференциального уравнения теплопроводности

$$\Theta(\bar{x}, Bi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\sqrt{m_n} \cdot \bar{x}) \exp(-m_n Fo), \quad (4.31)$$

Условие (4.21) для нахождения коэффициентов A_n примет вид

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\sqrt{m_n} \cdot \bar{x}),$$

откуда $A_n = \frac{2 \sin(\sqrt{m_n})}{\sqrt{m_n} + \sin(\sqrt{m_n}) \cdot \cos(\sqrt{m_n})}$, т.е.

$$\Theta(\bar{x}, Bi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\sqrt{m_n})}{\sqrt{m_n} + \sin(\sqrt{m_n}) \cdot \cos(\sqrt{m_n})} \cos(\sqrt{m_n} \cdot \bar{x}) \exp(-m_n Fo), \quad (4.32)$$

4.5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Упомянувшиеся выше решения простейших задач, которые удается затабулировать или свести к расчетным номограммам, получены при неизменной по времени температуре окружающей среды T_f (или температуре стенки T_w или теплового потока q_w), а также при одинаковой по всему объему тела начальной температуре в момент $\tau = 0$.

В виде рядов выписывается решение в случае произвольно заданного распределения температур при $\tau = 0$ для тел простейшей формы и одномерных задач. Однако и в этом случае вычисление коэффициентов ряда является часто весьма трудоемким. В связи с этим, наряду с аналитическими развивались и численные методы решения нестационарных задач теплопроводности, причем с появлением мощных компьютеров эти методы приобрели решающую роль в проведении точных инженерных тепловых расчетов (прогрев теплозащитных покрытий, камер сгорания и сопел ЖРД, тепловые режимы ИСЭ). Численные методы являются, пожалуй, единственным инструментом решения нелинейных задач (когда теплофизические свойства непостоянны) и задач теплопроводности тел сложной формы.

4.5.1. Явный метод

Идею одного из простейших численных методов продемонстрируем на примере одномерной задачи прогрева (охлаждения) плоской стенки с граничными условиями 3-го рода.

Разобьем стенку изотермическими поверхностями (в рассматриваемой задаче они параллельны поверхности стенки) на слои равной толщины Δx . В центре каждого слоя поместим узел. Исключение составляют слои, непосредственно прилегающие к границам твердого тела: их толщина вдвое меньше и узлы расположены на границе (рис. 4.7). Пронумеровав узлы и соответствующие им слои и разделив интересующий нас период времени на малые интервалы $\Delta \tau_1, \Delta \tau_2, \Delta \tau_3, \dots, \Delta \tau_n$ и т. д., температуру k -го узла в n -й момент времени будем считать равной T_k^n . Считаем, что температура между узлами в каждый момент времени изменяется по линейному закону (рис. 4.8).

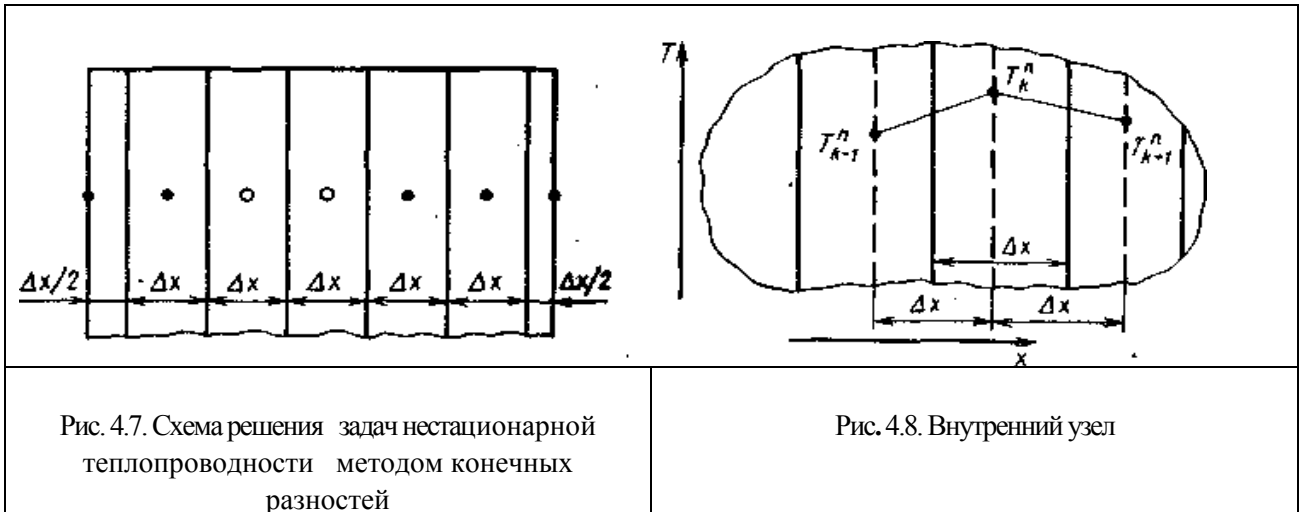
Запишем баланс тепла для k -го слоя (см. рис. 4.8). Очевидно, что тепловые потоки, втекающие через левую $Q_{\text{Л}}$ и правую $Q_{\text{П}}$ границы слоя, изменяют энтальпию I рассматриваемого слоя, т. е.

$$Q_{\text{Л}} + Q_{\text{П}} = \frac{\partial I}{\partial \tau}. \quad (4.33)$$

Тепловые потоки выражаются через закон Фурье: $Q_{\text{Л}} = -\lambda F \frac{\partial T}{\partial x}$, $Q_{\text{П}} = \lambda F \frac{\partial T}{\partial x}$, где F - площадь поверхности слоя.

Так как мы предположили, что между узлами (а значит и на границе слоя) температура меняется по линейному закону, то

$$Q_{\text{Л}} = -\lambda F \frac{T_k^n - T_{k-1}^n}{\Delta x} = \lambda F \frac{T_{k-1}^n - T_k^n}{\Delta x}; \quad Q_{\text{П}} = \lambda F \frac{T_{k+1}^n - T_k^n}{\Delta x}$$



Энтальпия выражается соотношением $I = \rho F \Delta x c T$, где c – теплоемкость материала, ρ – плотность. Ее изменение за интервал времени $\Delta \tau$ в предположении, что плотность и теплоемкость постоянны, можно аппроксимировать выражением

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} \approx \rho F \Delta x c \frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta \tau}.$$

Подставляя соотношения для $Q_L, Q_P, \frac{\partial I}{\partial \tau}$ в уравнение (4.33), получим

$$\lambda F \frac{T_{k-1}^n - T_k^n}{\Delta x} + \lambda F \frac{T_{k+1}^n - T_k^n}{\Delta x} = \rho F \Delta x c \frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta \tau}.$$

Решая это уравнение относительно T_k^{n+1} , получим

$$T_k^{n+1} = Fo(T_{k+1}^n + T_{k-1}^n) + (1 - 2Fo)T_k^n, \quad (4.34)$$

где критерий Фурье определяется соотношением $Fo = \frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2}$, $a = \frac{\lambda}{c \rho}$.

Уравнение (4.34) позволяет в явной форме определить значения температур во всех внутренних узлах в $(n + 1)$ -й момент времени, если известны значения температур в n -й момент, поэтому такой способ численного решения называется явным.

Теперь рассмотрим баланс тепла в граничном слое (рис. 4.9).

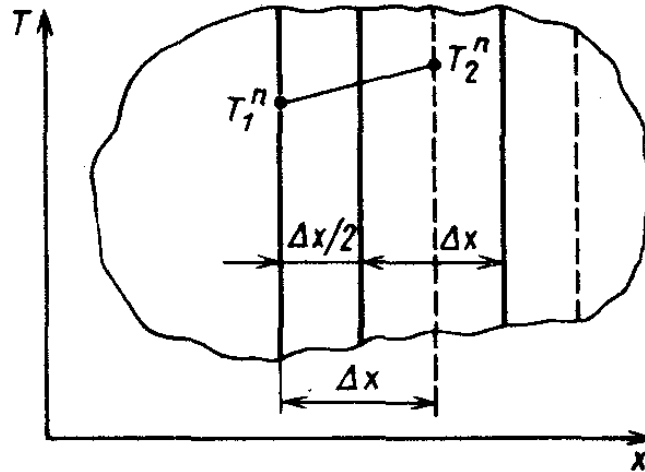


Рис. 4.8. Граничный узел

Отличие от предыдущего случая состоит в том, что поток тепла через левую границу слоя определяется по формуле Ньютона

$$Q_{\text{л}} = \alpha F (T_f^n - T_1^n), \text{ энтальпия равна } I = \frac{1}{2} \rho F \Delta x c T, \text{ т.е. } \frac{\partial I}{\partial \tau} \approx \frac{1}{2} \rho F \Delta x c \frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta \tau}$$

Записав балансное уравнение (4.33), получим

$$\alpha F (T_f^n - T_1^n) + \lambda F \frac{T_2^n - T_1^n}{\Delta x} = \rho F \Delta x c \frac{T_1^{n+1} - T_1^n}{\Delta \tau},$$

откуда

$$T_1^{n+1} = 2Fo(T_2^n + BiT_f^n) + (1 - 2Fo - 2Fo \cdot Bi)T_1^n, \quad (4.35)$$

где $Bi = \frac{\alpha \Delta x}{\lambda}$.

Чтобы решить задачу нестационарного теплообмена, необходимо знать начальное распределение температуры в каждой точке тела T_k^0 . С помощью соотношений (4.34) и (4.35) определяется распределение температуры в следующий момент времени $\Delta \tau - T_k^1$. Далее процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнут момент времени, для которого требуется знать распределение температуры. Аналогично можно решать двухмерные и трехмерные задачи.

Остановимся на выборе шагов интегрирования $\Delta \tau$ и Δx . Этот выбор не является произвольным. Покажем, что при некоторых соотношениях шагов можно получить результаты, противоречащие законам термодинамики. Пусть в какой-то момент времени в трех соседних точках температуры равны $T_{k-1}^n = 200\text{K}$; $T_k^n = 100\text{K}$; $T_{k+1}^n = 200\text{K}$. Пусть интервал времени $\Delta \tau$ таков, что критерий $Fo = 1$. Определим T_k^{n+1} по формуле (4.34); $T_k^{n+1} = (200 + 200) = 300\text{K}$.

В первый момент времени температура k -ой точки меньше, чем в двух соседних точках, и тепло подводится к ней от этих точек. Таким образом, тот факт, что в следующий момент времени температура k -ой точки превысила 200 К, противоречит второму закону термодинамики. Анализ показывает, что нарушение законов термодинамики не будет происходить только при выполнении условия

$$Fo \leq \frac{1}{2}, \quad (4.36)$$

т. е., когда коэффициент при T_k^n в формуле (4.34) не является отрицательным.

Условие (4.36) называется критерием устойчивости уравнения (4.34). Если оно не выполняется, решение становится неустойчивым.

Критерий устойчивости для слоя, прилегающего к границе, имеет вид

$$1 - 2Fo - 2Fo \cdot Bi \geq 0. \quad (4.37)$$

Для получения устойчивого решения необходимо и достаточно выполнение обоих условий: (4.36) и (4.37). Например, если положить $Fo = 1/4$, то из (4.37) получим условие $Bi < 1$. Это значит, что, если значение коэффициента теплоотдачи α достаточно велико, необходимо уменьшить шаг Δx , что, в свою очередь, повлечет уменьшение шага $\Delta \tau$ согласно (4.36). Ограничения типа (4.36), (4.37) являются существенным недостатком явных методов.

4.5.2. Неявный метод

Как уже говорилось, основной недостаток явных методов связан ограничениями на шаг по времени согласно критериям устойчивости (4.36), (4.37). Часто для удовлетворения этих критериев приходится выбирать очень малый шаг $\Delta \tau$, что приводит к возрастанию времени расчетов. Избежать ограничений на шаг по времени, связанных с удовлетворением критериев устойчивости, позволяет переход к неявным методам.

Рассмотрим сначала внутренний узел. Если выразить потоки тепла через температуры на $(n+1)$ -ом шаге по времени (а не на n -ом, как это было сделано в предыдущем разделе), то получится следующий конечно-разностный аналог дифференциального уравнения теплопроводности

$$\lambda F \frac{T_{k-1}^{n+1} - T_k^{n+1}}{\Delta x} + \lambda F \frac{T_{k+1}^{n+1} - T_k^{n+1}}{\Delta x} = \rho F \Delta x c \frac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta \tau},$$

откуда получаем систему уравнений для определения температур на $(n+1)$ -м шаге по времени

$$T_k^{n+1}(1 + 2Fo) - FoT_{k+1}^{n+1} - FoT_{k-1}^{n+1} - T_k^n = 0, \quad (4.38)$$

В отличие от явного метода, при использовании которого температура T^k выражается явно через остальные члены уравнения (4.35), в данном случае необходимо решать одновременно систему уравнений (4.38) для всех узлов. Такой метод называется неявным. Он является устойчивым при любом значении $\Delta \tau$, и в этом его основное преимущество по сравнению с явным методом. Его недостаток — это необходимость решать систему алгебраических уравнений (4.38).

Аналогично выводится уравнение для граничных узлов:

$$[1 + 2Fo(1 + Bi)]T_1^{n+1} - 2Fo(T_2^{n+1} + BiT_f^{n+1}) - T_1^n = 0, \quad (4.38)$$

Таким образом, получена система из $(N - 2)$ -ых уравнений для внутренних узлов и двух — для граничных. Она содержит N неизвестных и таким образом является замкнутой.