

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Ранее были рассмотрены стационарные режимы теплообмена, т. е. такие, в которых температурное поле по времени не изменяется и в дифференциальном уравнении теплопроводности Фурье — Кирхгофа производная $\partial T / \partial \tau = 0$. Однако целый ряд важных практических задач теплообмена не может быть рассмотрен в рамках предположения о неизменности параметров процесса по времени. К ним относятся задачи о прогреве теплозащитных оболочек и конструктивных элементов скоростных летательных аппаратов, о нагреве стенок сопел реактивных двигателей твердого топлива, о расчете поля температур в энергетических ядерных реакторах при изменении режима работы, о тепловом режиме искусственного спутника Земли (ИСЗ). В этой главе будут рассмотрены нестационарные процессы теплопроводности в неподвижных средах (твердых телах) и даны аналитические и численные методы решения дифференциального уравнения Фурье — Кирхгофа для нестационарного случая с различными краевыми условиями.

Нестационарные тепловые процессы сопровождаются не только изменением температурного поля по времени, но почти всегда связаны с изменением энтальпии тела, т. е. с его нагревом и охлаждением.

Практические задачи нестационарного теплообмена можно разделить на две основные группы. К первой относятся процессы, происходящие при переходе тепла из некоторого начального теплового состояния в иное стационарное, обычно равновесное тепловое состояние. Примерами могут служить изменение температурного поля в теле, помещенном в среду, температура которой отличается от начальной температуры тела, или выравнивание температур в теле с заданным начальным распределением температур. Ко второй группе можно отнести процессы, происходящие в телах, испытывающих тепловое воздействие извне, изменяющиеся во времени по некоторому закону. Здесь можно назвать процессы периодического изменения температуры при движении ИСЗ по орбите, часть которой пролегает в тени Земли, суточные и годовые колебания температуры в верхних слоях земной коры, тепловые режимы аппаратов, находящихся на поверхности Луны, процессы в регенеративных теплообменниках и др.

В большинстве нестационарных тепловых процессов можно выделить три этапа, характеризующиеся различными режимами, из которых собственно нестационарными будут лишь два первых. На первом этапе поле температур в теле определяется не только изменившимся тепловым воздействием, например изменением температуры окружающей среды, но и начальным распределением температур в теле $T_0(x, y, z)$ при $\tau = 0$. Поскольку начальное температурное поле в общем случае может быть весьма произвольным, то и тепловой режим на этом первом этапе носит характер неупорядоченного процесса.

На втором этапе влияние начального состояния все более и более ослабевает, и дальнейшее протекание процесса управляется лишь условиями на границе тела, т. е. наступает режим упорядоченного процесса, в частности, регулярный режим.

Для большинства процессов первой группы характерен еще и третий этап, в котором температура тела во всех точках одинакова и равна температуре окружающей среды. Это состояние называют состоянием теплового равновесия.

Строго говоря, это новое равновесное тепловое состояние наступает лишь по прошествии бесконечно большого промежутка времени. Однако на практике тело относительно быстро достигает состояния, весьма близкого к состоянию теплового равновесия, поэтому и интересующие нас длительности нестационарных режимов отнюдь не бесконечны.

4.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Выведенное дифференциальное уравнение теплопроводности Фурье—Кирхгофа (2.16) в случае неподвижной среды и отсутствия внутренних источников тепла имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T \quad (4.1)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ и ∇^2 — оператор Лапласа, записанный в прямоугольной, цилиндрической, сферической или иной системах координат. Это уравнение устанавливает зависимость между температурой, временем и координатами тела в элементарном объеме, т. е. связывает временные и пространственные изменения температуры тела.

Если заданы форма и размеры тела, а также его физические свойства (λ, c, ρ, \dots), т. е. геометрические и физические условия однозначности, то для решения уравнения (4.1) необходимо задать еще начальные и граничные, или краевые условия.

Поскольку температура тела в общем случае является функцией координат и времени $f(x, y, z, \tau)$, то начальные условия, т. е. распределение температур в теле в начальный момент, задаются в виде $f(x, y, z, 0) = f_0(x, y, z)$, где f_0 — известная функция, которая необязательно должна быть задана аналитически, а может быть представлена численно или графически.

В ряде практических задач начальное условие имеет более простой вид: $f(x, y, z, 0) = T_0 = const$.

Для однородных тел граничные условия могут быть заданы трех видов: температура любой точки поверхности тела в любой момент времени; тепловой поток у поверхности, либо температура среды, омывающей тело; условия теплообмена тела с окружающей средой. В отличие от стационарных задач все величины, входящие в граничные условия, могут изменяться во времени по заданному закону.

4.3. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ В ПРИМЕНЕНИИ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Предположим, что температура среды T_f , омывающей рассматриваемое тело, величина постоянная. Считаем также, что начальная температура тела одинакова и не зависит от координат, т. е. $T(x, y, z, 0) = T_0 = const$

Введем новую переменную

$$\mathcal{G} = T - T_f. \quad (4.2)$$

Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности запишется в виде

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = a \nabla^2 \mathcal{G} \quad (4.3)$$

Начальные условия: при $\tau = 0$ $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0(x, y, z)$, в нашем случае: $\mathcal{G}_0 = const$

Используем граничные условия 3-го рода:

$$q_w = \alpha(T_w - T_f) = \alpha \mathcal{G}_w, \quad (4.4)$$

где α – коэффициент теплоотдачи от тела к омывающей среде, T_w - температура стенки тела .

С другой стороны, плотность теплового потока у стенки тела равна:

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = -\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right)_w, \quad (4.5)$$

где λ - коэффициент теплопроводности тела, $\left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w$ - производная температуры в теле по нормали к поверхности.

Из (4.4) и (4.5) следует:

$$\mathcal{G}_w = -\frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial n} \right)_w, \quad (4.6)$$

Таким образом, решение уравнения (4.3) зависит от:

- 1) формы тела;
- 2) характерного размера тела L ;
- 3) теплофизических свойств тела - $a = \lambda / (c\rho)$;
- 4) начального условия \mathcal{G}_0 ;
- 5) условий теплообмена с окружающей средой, т.е. коэффициента теплоотдачи α

Для тел одинаковой формы имеем:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, y, z, \tau, L, a, \mathcal{G}_0, \alpha), \quad (4.7)$$

Совершенно очевидно, что получить универсальную форму решения для функции, зависящей от столь большого количества параметров, невозможно.

Попробуем, используя теорию подобия, уменьшить количество факторов, влияющих на решение.

Используем в качестве масштаба температур \mathcal{G}_0 , а в качестве масштаба длины - характерный размер тела L . Тогда:

$\Theta = \mathcal{G} / \mathcal{G}_0$ - безразмерная избыточная температура,

$\bar{x} = x / L, \bar{y} = y / L, \bar{z} = z / L$ - безразмерные линейные координаты.

При использовании новых переменных уравнение получаем:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tau} = \mathcal{G}_0 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}, \quad \nabla^2 \mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}_0}{L^2} \bar{\nabla}^2 \Theta, \quad \text{где } \bar{\nabla}^2 - \text{ оператор Лапласа,}$$

записанный в системе безразмерных координат $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Тогда уравнение (4.3) примет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{a}{L^2} \bar{\nabla}^2 \Theta$$

или

$$\frac{\partial \Theta}{\partial (a\tau / L^2)} = \bar{\nabla}^2 \Theta \quad (4.8)$$

Условия однозначности уравнения (4.8) имеют вид:

при $\tau = 0, \Theta = 1$;

на границе тела из (4.6) получаем:

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial n} \right)_w = - \frac{\alpha L}{\lambda} \Theta_w, \quad (4.9)$$

В уравнение (4.8) и в граничное условие (4.9) входят некие безразмерные комплексы - определяющие критерии подобия $a\tau / L^2$ и $\alpha L / \lambda$.

Безразмерный комплекс $a\tau / L^2$ называется критерием тепловой гомохронности Фурье $Fo = a\tau / L^2$ (см. гл. 3), который характеризует соотношение между временем протекания процесса и временем распространения температурной волны. Безразмерный комплекс $\alpha L / \lambda$ обозначается через $Bi = \alpha L / \lambda$ и так же, как и Fo , является критерием подобия процессов нестационарной теплопроводности, в частности, подобия граничных условий 3-го рода. По своему физическому смыслу он характеризует отношение термического сопротивления теплопроводности стенки L / λ к термическому сопротивлению теплоотдачи на границе между телом и окружающей средой $1 / \alpha$.

Критерии Fo и Bi называются определяющими критериями, состоящими из независимых переменных и условий однозначности, а функция Θ - определяемой.

В новых переменных уравнение Фурье — Кирхгофа имеет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \bar{\nabla}^2 \Theta, \quad (4.10)$$

А граничные условия 3-го рода

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial n}\right)_w = -Bi\Theta_w, \quad (4.11)$$

А решением уравнения является функция

$$\Theta = \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Fo, Bi), \quad (4.12)$$

Формула (4.12) означает, что безразмерные температуры двух тел одинаковой формы, равномерно нагретых в начальный момент времени $\tau = 0$, в сходственных точках пространства и времени будут одинаковы, если одинаковы критерии Bi . Например, на поверхности плоской пластины толщиной 2δ (характерный размер $L = \delta$) получаем:

$$\Theta_w = \Theta(Fo, Bi), \quad (4.13)$$

Зависимость (4.12) можно получить аналитически и с помощью численных методов: они представляются в виде таблиц или номограмм. На рис. 4.1 ... 4.3 приведены примеры номограмм для расчета процессов нагрева и охлаждения простейших тел в среде с постоянной температурой.

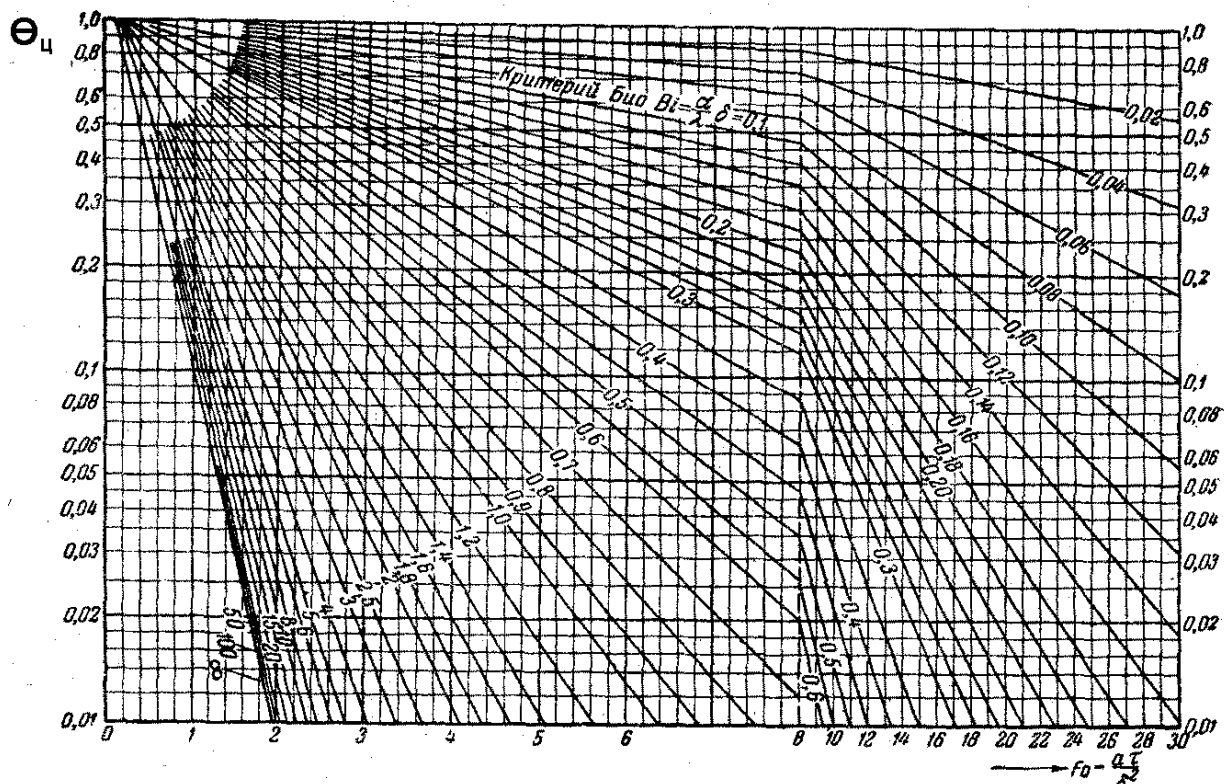


Рис.4.1а. Безразмерная избыточная температура Θ в середине плоской пластины.

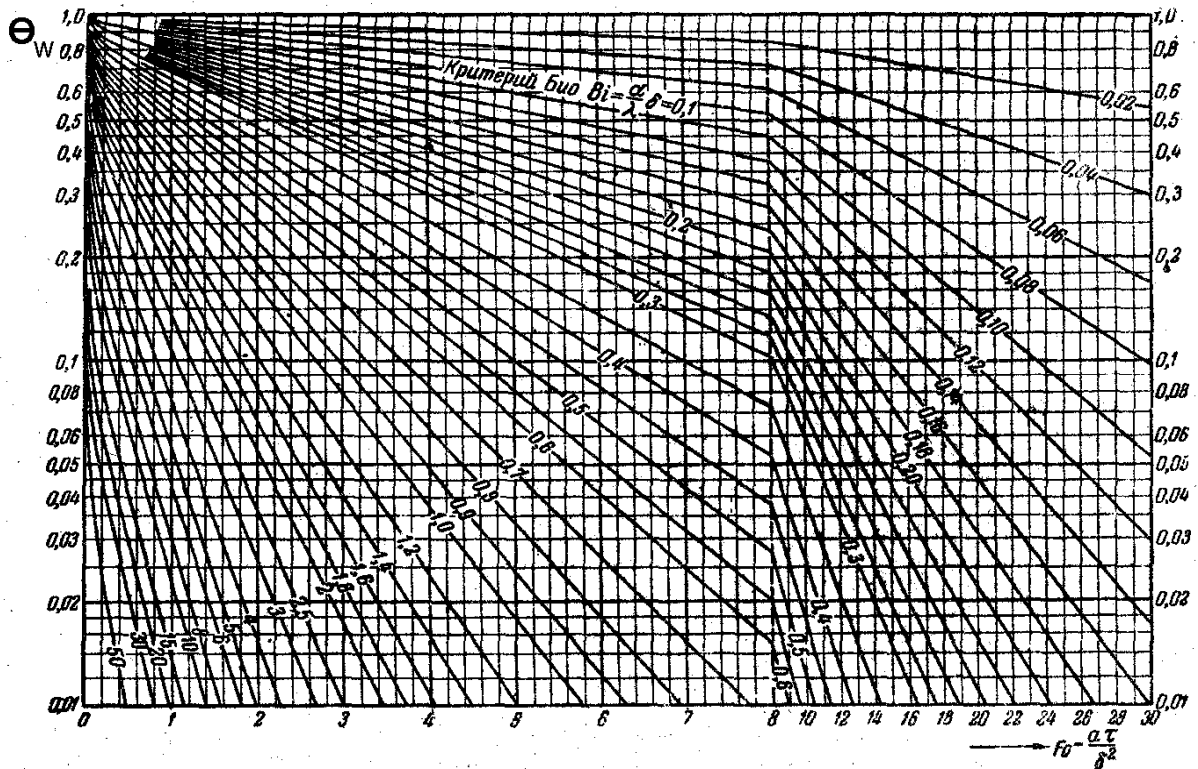


Рис.4.1б. Безразмерная избыточная температура Θ на поверхности плоской пластины.

Рассмотрим несколько примеров использования этих номограмм.

Пример I. Стальная плита толщиной $2\delta = 0.2$ м с начальной температурой $T_0 = 955\text{K}$ опущена в масляную ванну (температура масла принимается постоянной и равной $T_f = 355\text{K}$). Считая коэффициент теплоотдачи постоянным [$\alpha = 180\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$], определить температуру в плоскости симметрии и на поверхности плиты через 1 час 23 мин.

Решение. Пренебрегая в первом приближении зависимостью теплофизических свойств стали от температуры, примем в рассматриваемом интервале температур $\lambda \approx 20\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ и $a = 4 \cdot 10^{-6}\text{м}^2/\text{с}$. Тогда значения определяющих критериев Fo и Bi будут

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 83 \cdot 60}{0.1^2} = 2,$$

$$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda} = \frac{180 \cdot 0.1}{20} = 0.9$$

Пользуясь номограммами, приведенными на рис. 4.1а, 4.1б, находим, что безразмерная температура в плоскости симметрии равна:

$$\Theta_{\text{ц}} = \frac{T_{\text{ц}} - T_f}{T_0 - T_f} = 0.3,$$

а на поверхности пластины:

$$\Theta_{\text{w}} = \frac{T_{\text{w}} - T_f}{T_0 - T_f} = 0.2,$$

Откуда:

$$T_{II} = 0.3 \cdot (T_0 - T_f) + T_f = 0.3 \cdot (955 - 355) + 355 = 535K ,$$

$$T_W = 0.2 \cdot (T_0 - T_f) + T_f = 0.2 \cdot (955 - 355) + 355 = 475K$$

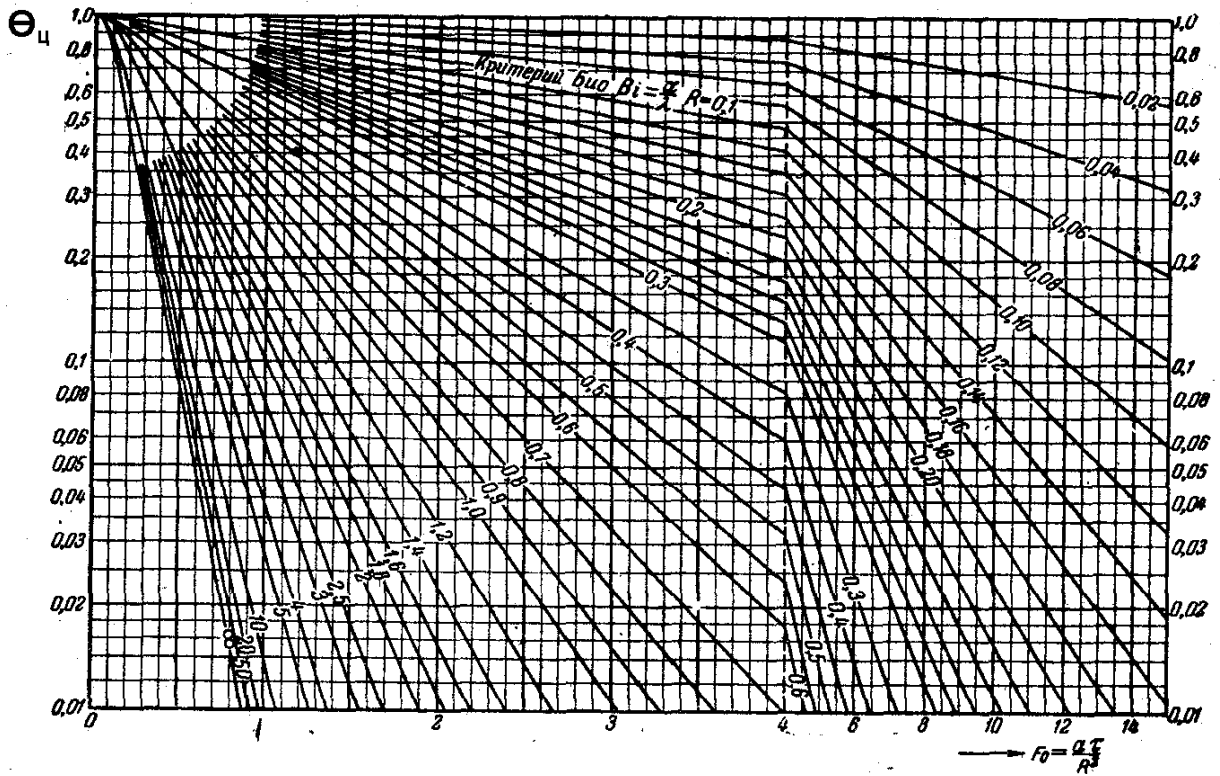


Рис.4.2а. Безразмерная избыточная температура Θ на оси бесконечного цилиндра.

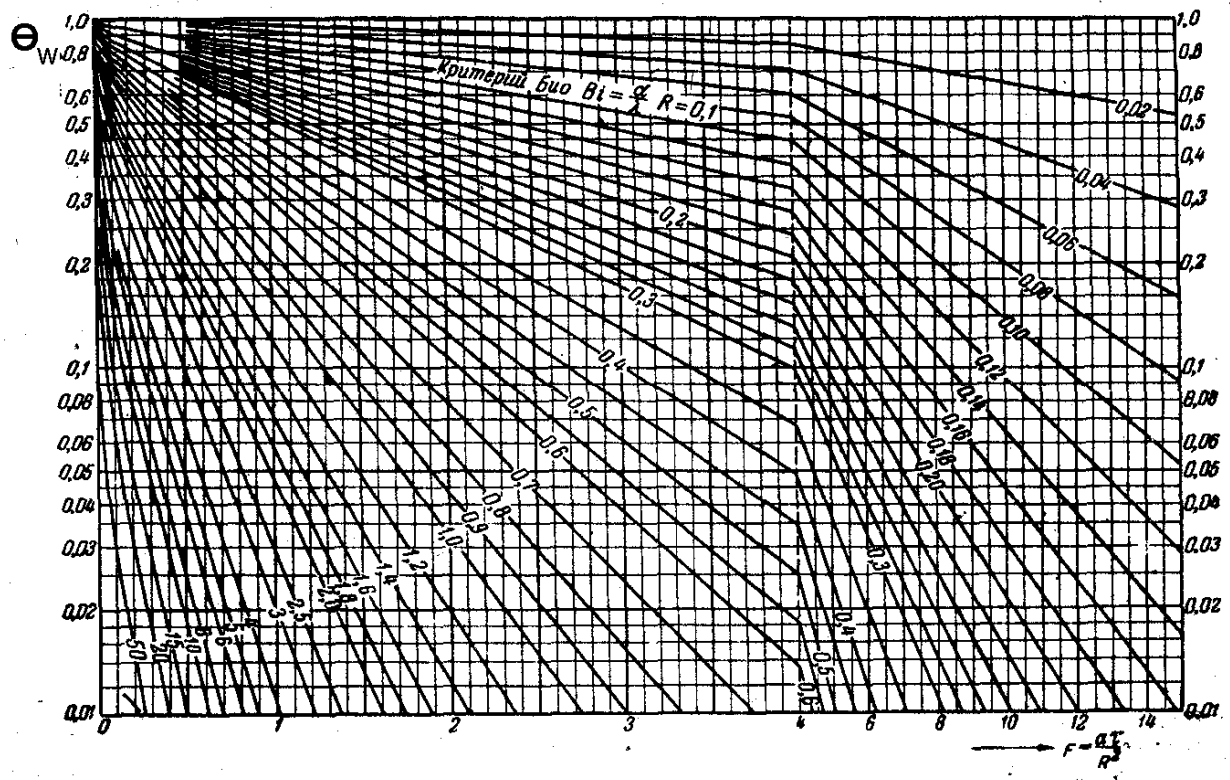


Рис.4.2а. Безразмерная избыточная температура Θ на поверхности бесконечного цилиндра.

Интересно рассмотреть качественный характер и некоторые предельные случаи изменения безразмерной избыточной температуры по безразмерному времени (Fo) при граничных условиях 3-го рода. Очевидно, что при фиксированном числе Bi температура поверхности T_w быстрее приближается к температуре окружающей среды T_f , чем температура в точках, расположенных глубоко внутри тела (сравните рисунки 4.1а и 4.1б). Степень этого различия в скоростях зависит, однако, от Bi . Так, при $Bi \rightarrow 0$ температуры центра и на поверхности в течение всего процесса можно считать одинаковыми, так как приток тепла к телу вследствие конвекции мал (мало α), и температура внутри тела успевает в каждый момент выровняться в силу большой его теплопроводности (большое λ). В случае же $Bi \rightarrow \infty$ отличие в температурах внутренних точек тела и его поверхности будет максимальным, так как задача, как уже говорилось, стремится к задаче с граничными условиями 1-го рода, когда $T_w = T_f$ в течение всего процесса. Это легко обнаружить и на номограммах (см. рис. 4.1 ... 4.3), сравнивая зависимости безразмерной температуры от Fo в центре и на поверхности при малых и больших значениях Bi .

В практике часто нельзя воспользоваться решениями для тел бесконечной протяженности (пластина, цилиндр) в силу того, что продольный размер реального объекта (например, длина цилиндра) сравним с поперечным (его диаметром). В этих случаях задача существенно неоднородна.

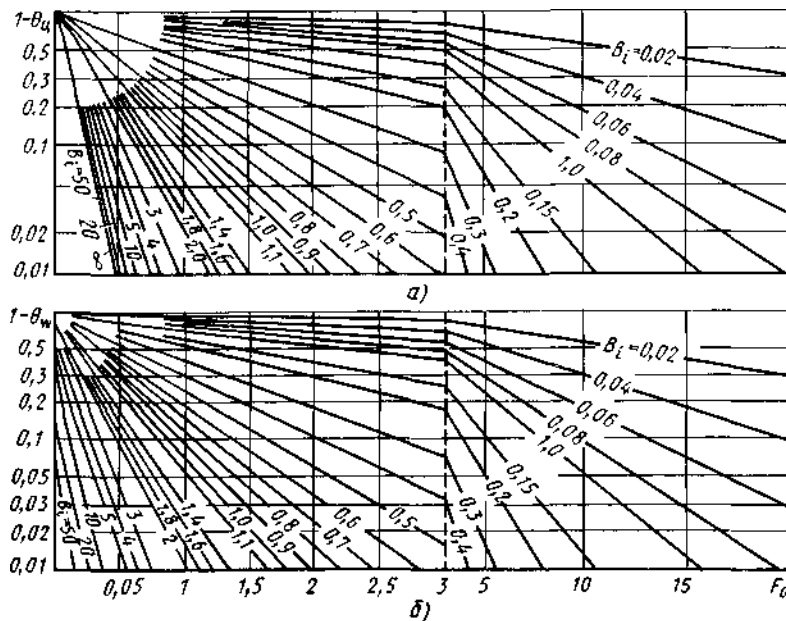


Рис. 4.3. Номограммы для определения безразмерной избыточной температуры
шара: *a* — в центре; *б* — на поверхности

Можно показать, что для ряда простейших тел конечных размеров решение может быть получено комбинацией имеющихся решений для тел бесконечной протяженности. Для цилиндра радиусом R и длиной 2δ решение находится по формуле

$\Theta = \Theta_{пл} \Theta_{цил}$, где $\Theta_{пл}$, $\Theta_{цил}$ - решения для пластины и цилиндра соответственно (см.рис.4.4.)

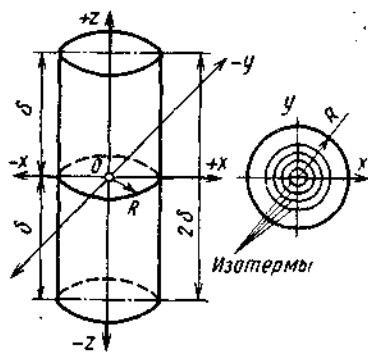


Рис. 4.4. Схема решения задачи о нагреве (охлаждении) цилиндра конечной длины (граничные условия 3-го рода)

Для параллелепипеда с ребрами $2\delta_1$, $2\delta_2$ и $2\delta_3$ безразмерное решение будет равно $\Theta = \Theta_1 \Theta_2 \Theta_3$, где Θ_i - безразмерное решение соответствующей задачи о бесконечной пластине толщиной $2\delta_i$. Построение комбинированных решений для тел конечной протяженности, продемонстрированное здесь на примере задачи с граничными условиями 3-го рода, возможно и в задачах с граничными условиями других родов. Следовательно, номограммы типа приведенных на рис. 4.1 ... 4.3 для определения температур простейших тел в нестационарных процессах применимы к весьма широкому кругу неоднородных задач.

Следует учитывать, что полученные с помощью номограмм решения носят приближенный характер, так как они получены в предположении постоянства α по поверхности, неизменности теплофизических свойств тела по температуре и т. д.