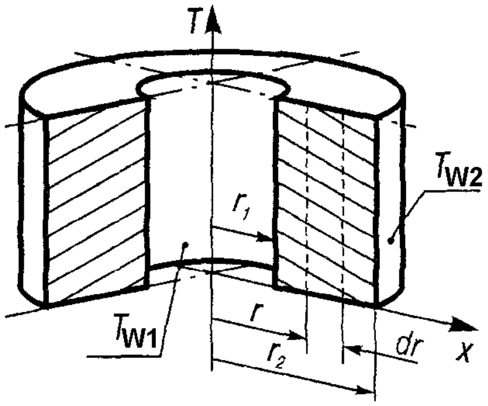
# ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ (Часть 2)

## 1. Теплопроводность через цилиндрическую стенку




Цилиндрическая стенка

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=0 \tag{1}$$

$$r=r_1: T=T_{W1};\ r=r_2: T=T_{W2} \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0 \tag{3}$$

$$r\frac{dT}{dr}=C_1 \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dr}=\frac{C_1}{r} \tag{4}$$

$$T(r)=C_1\ln r+C_2 \tag{5}$$

(6)

Граничные условия первого рода:

$$\text{при } r=r_1,\ T_{W1}=C_1\ln r_1+C_2\ ,$$

$$\text{при } r=r_2,\ T_{W2}=C_1\ln r_2+C_2 \tag{7}$$

$$C_1=\frac{T_{W2}-T_{W1}}{\ln(r_2/r_1)} \tag{8}$$

$$C_2=\frac{T_{W1}\ln r_2-T_{W2}\ln r_1}{\ln(r_2/r_1)} \tag{9}$$

$$T(r)=\frac{T_{W1}\ln(r_2/r)+T_{W2}\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} \tag{10}$$

$$q=-\lambda\frac{dT}{dr}=-\lambda\frac{T_{W2}-T_{W1}}{r\ln(r_2/r_1)}=\lambda\frac{T_{W1}-T_{W2}}{r\ln(r_2/r_1)} \tag{11}$$

Анализ показывает:

1. Удельный тепловой поток в цилиндрической стенке $q = -\lambda \frac{dT}{dr}$ непостоянен по толщине и убывает к внешней поверхности трубы $\left(\frac{dT}{dr} \sim \frac{1}{r}\right)$. Это связано с тем, что в стационарных условиях должен быть постоянным полный тепловой поток, проходящий через участок цилиндрической трубы длиной $L$ и равный $qS$, где $S = 2\pi rL$; поскольку же $S$ увеличивается с радиусом, то, естественно, удельный тепловой поток должен убывать.

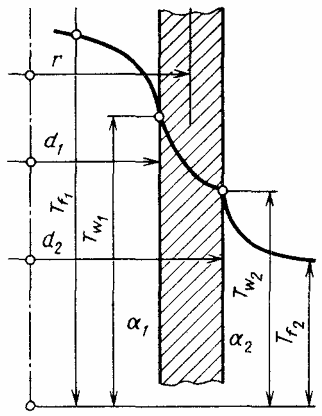
2. Температура по толщине цилиндрической стенки изменяется нелинейно — по логарифмическому закону.

Плотность теплового потока

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi rL = \frac{\lambda (T_{W1} - T_{W2}) 2\pi L}{\ln(r_2 / r_1)} \tag{12}$$

Линейная плотность теплового потока: $q_ц = \frac{Q}{L} = \frac{\lambda (T_{W1} - T_{W2}) 2\pi}{\ln(r_2 / r_1)}$ (13)

**2. Теплопередача через многослойную цилиндрическую стенку**




$$q_ц = \alpha_1 (T_{f1} - T_{w1}) 2\pi r_1 \tag{14}$$

$$q_ц = \frac{\lambda}{\ln (r_2/r_1)} (T_{w1} - T_{w2}) 2\pi \tag{15}$$

$$q_ц = \alpha_2 (T_{w2} - T_{f2}) 2\pi r_2 \tag{16}$$

$$q_ц = \pi K_ц (T_{f1} - T_{f2}), \tag{17}$$

где

$$\pi K_ц = \frac{\pi}{\frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\alpha_2 r_2}} \tag{18}$$

$$\frac{1}{K_ц} = \frac{1}{2\alpha_1 r_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\alpha_2 r_2} \tag{19}$$

Многослойная стенка:

$$R_ц = \frac{1}{K_ц} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}. \tag{20}$$

## 3. Критический диаметр тепловой изоляции

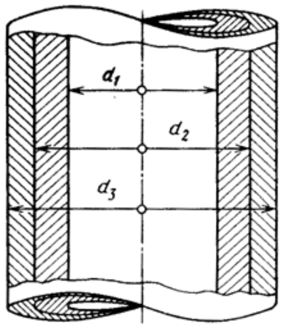



Схема цилиндра с тепловой изоляцией

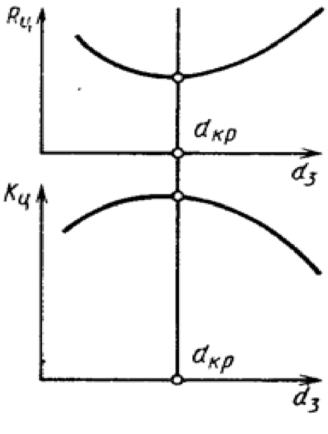
$$R_ц = \frac{1}{K_ц} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2}\ln\frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3} \qquad (21)$$

$$R'(d_3) = \frac{1}{2\lambda_2 d_3} - \frac{1}{\alpha_2 d_3^2} = 0 \qquad (22)$$

| $d_{кр} = \dfrac{2\lambda_2}{\alpha_2}$ | (23) |
|---|---|

Важно отметить, что критическое значение $d_3$ не зависит от внешнего диаметра изолируемого трубопровода $d_2$, а определяется лишь коэффициентом теплопроводности выбранного теплоизолятора $\lambda_2$ и коэффициентом теплопередачи с внешней поверхности трубы $\alpha_2$.

Следовательно, если диаметр изолируемой трубы $d_2$ больше $d_{кр}$, найденного для выбранного изоляционного материала ($\lambda_2$) и условий теплообмена с окружающей средой (2.61), то покрытие трубы слоем такой изоляции уменьшит теплопередачу через




Кривые изменения коэффициентов полного термического сопротивления и теплопередачи в зависимости от внешнего диаметра изоляции

цилиндрическую стенку. В случае же, когда $d_2 < d_{кр}$ нанесение на поверхность трубы выбранного изолятора первоначально приведет к возрастанию теплопередачи, и лишь после того, как наружный диаметр достигнет и превысит критическое значение, тепловой поток через стенку начнет убывать, затем станет равным исходной величине, которая была при отсутствии слоя изоляции, и лишь затем станет меньше ее. Тогда следует попытаться подобрать другой теплоизоляционный материал и (или) сделать многослойную изоляцию так, чтобы $\lambda_{экв} > \lambda_2$, и, если это не удастся, пойти на снижение теплопередачи путем значительного увеличения толщины изоляционного слоя ($d_3 \gg d_{кр}$).

## 4. Стержень бесконечной длины

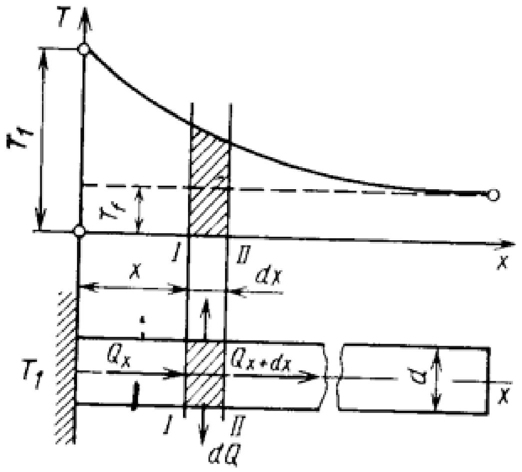



Рис. - Схема теплопроводности стержня бесконечной длины

Рассмотрим стационарную задачу о теплопроводности стержня бесконечной длины (рис. 2.18). Температура одного конца стержня поддерживается постоянной, равной $T_1$. Стержень омывается средой с постоянной температурой $T_f$. Коэффициент теплоотдачи от стержня к среде $\alpha$ вдоль всей его боковой поверхности будем считать постоянным. Коэффициент теплопроводности материала стержня $\lambda$ предполагается достаточно большим, а поперечные размеры стержня по сравнению с длиной настолько малыми, что изменением температуры в нем можно пренебречь. Температура стержня $T$, таким образом, считается функцией только одной координаты: $T = f(x)$. Разность между местной температурой стержня и температурой окружающей среды $T(x) - T_f$ обозначим через $\Theta(x)$. В начальной точке стержня $(x = 0)$ $T_1 - T_f = \Theta_1$.

Рассмотрим тепловое равновесие элемента стержня, удаленного от его начала на расстояние $x$, имеющего длину $dx$, площадь поперечного сечения $F$ и периметр сечения $U$.

$$Q_x = -\lambda \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_x F \tag{24}$$

$$Q_{x+dx} = -\lambda \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_{(x+dx)} F \tag{25}$$

$$dQ = \alpha \Theta U \, dx \tag{26}$$

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ \tag{27}$$

$$-\lambda \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_x F + \lambda \left(\frac{d\Theta}{dx}\right)_{x+dx} F = \alpha \Theta U \, dx \tag{28}$$

$$\frac{(d\Theta/dx)_{x+dx} - (d\Theta/dx)_x}{dx} = \frac{d^2\Theta}{dx^2} \tag{29}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{\alpha U}{\lambda F}\Theta \tag{30}$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \beta^2\Theta \quad \text{, где } \beta^2 = \frac{\alpha U}{\lambda F} \tag{31}$$

$$\Theta = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} \tag{32}$$

$$\text{при } x = 0, \Theta = \Theta_1 \text{ , при } x \to \infty \ \Theta \to 0 \qquad (33)$$

$$C_1 = 0, \qquad (34)$$

$$\Theta = \Theta_1 e^{-\beta x} \qquad (35)$$

$$Q_1 = -\lambda F \left( \frac{d\Theta}{dx} \right)_{x=0} = \lambda F \ \beta \Theta_1 = \Theta_1 \sqrt{\lambda F \alpha U} \qquad (36)$$

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ ОБЪЕМНОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ ($q_V \neq 0$)

Как уже говорилось, в веществе наряду с процессом теплопроводности может протекать выделение или поглощение тепла, связанное с какими-либо физико-химическими явлениями: конденсацией, джоулевым нагреванием, ядерными реакциями, экзо- или эндотермическими химическими реакциями и т. п. С позиции теплообмена такие явления могут быть охарактеризованы количеством тепла, выделяющегося или поглощающегося в единице объема вещества в единицу времени $q_V$. Эта характеристика носит название интенсивности объемного тепловыделения.

Рассмотрим простейшие задачи стационарной теплопроводности при наличии объемного тепловыделения, полагая, что величина $q_V$ не зависит от времени и координат.

### Бесконечная плоская пластина

Основное дифференциальное уравнение теплопроводности (2.15) для этой одномерной задачи будет иметь вид

$$a \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_V}{c\rho} = 0.$$

Принимая во внимание, что $a = \lambda \ (c\rho)$, получим

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{q_V}{\lambda} = 0.$$

Перенося $q_V/\lambda$ в правую часть и считая $q_V = \text{const}$, после первого интегрирования получим

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q_V}{\lambda} x + C_1,$$

а после второго —

$$f(x) = -\frac{q_V x^2}{2\lambda} + C_1 x + C_2.$$

Выражение является общим решением уравнения Постоянные интегрирования находятся из граничных условий.

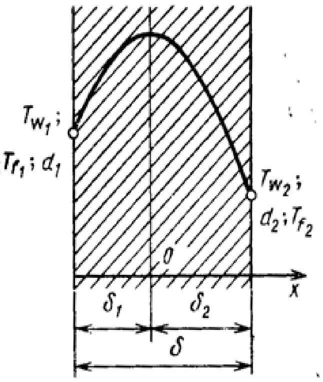



Схема распределения температур в пластине при объемном тепловыделении

Решение задачи принимает особо простой вид в случае симметричного теплосъема с пластины, т. е. когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и $T_{f1} = T_{f2} = T_f$. Очевидно, что $\delta_2 = \delta/2$, т. е. максимальная температура достигается в плоскости симметрии пластины.

$$T(x) = \frac{q_V}{2\lambda}\left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right] + \frac{q_V\delta}{2\alpha} + T_f.$$

Из решения видно, что распределение температуры имеет вид квадратичной параболы, а максимальная температура

$$T_{\max} = T|_{x=0} = \frac{q_V\delta^2}{8\lambda} + \frac{q_V\delta}{2\alpha} + T_f$$

при постоянных $q_V$ и $\delta$ будет тем больше, чем меньше теплопроводность пластины $\lambda$ и чем хуже теплоотдача с ее поверхности, т. е. чем меньше $\alpha$.

Температура на поверхности пластины ($x = \delta/2$), равная

$$T_w = \frac{q_V\delta}{2\alpha} + T_f,$$

также растет с ухудшением теплоотдачи.